

# 関係性変容法則化の試み

－金魚の二者関係数式化（1）－

Logistic approach to the relationship between two goldfish on having feed

岡林 春雄

Haruo OKABAYASHI

## (A) はじめに

人間を含め動物は、開放系（open system）であるといわれる。開放系とは、その個体自体が自分の外のものやとりをし、そのやりとりの中から発達していくシステムをもっているということである。やりとり、すなわち、関係性の中で人間は発達し、変容する。そして、その関係性は常に一定のものではない。親子関係をとってみても、赤ちゃんの頃には庇護される存在であったものが、反抗期等を経て、幼児期、児童期、青年期と発達しながら、親から自立し、成人期、老年期にいたっては親の面倒をみることにもなるのである。その関係性変容に関して、心理学は大きな関心を寄せてきた。しかしながら、親子関係にしても、親と子、そして、親子をとりまく環境といったように、関係に影響する要因が多岐にわたるので、その関係性変容はなかなか定式化できずに今日に至っている。

本研究では、変容を追究する考え方として近年注目されているダイナミカルシステム（Dynamical System：岡林他、2008 参照）の発想をふまえながら、人間の関係性変容にアプローチするにあたり、そのパイロットスタディとして、生活空間をある程度コントロールできる水槽に住んでいる金魚の二者関係の変容を時間軸にそって追ってみたい。

## 1. 関係性の意味

関係性は重要である。OECD(Organization for Economic Cooperation and Development：経済協力開発機構)も関係性について提言をしている。教育の成果と影響に関する情報への関心が高まり、キーコンピテンシー（Key Competency：主要能力）の特定と分析に伴うコンセプトを各国が共有する必要性から、OECD はプログラム「コンピテンシーの定義と選択」(DeSeCo：Definition and Selection of Competencies：Theoretical and Conceptual Foundations) を 1997 年末にスタート（2003 年に最終報告：PISA 調査の概念枠組みの基本となっている）させた。その「コンピテンシー（能力）」とは、単なる知識や技能だけではなく、技能や態度を含む様々な心理的・社会的なリソースを活用して、特定の文脈の中で複雑な要求（課題）に対応することができる力であり、キーコンピテンシーとは、日常生活のあらゆる場面で必要なコンピテンシーをすべて列挙するのではなく、コンピテンシーの中で、特に、①人生の成功や社会の発展にとって有益、②さまざまな文脈の中でも重要な要求（課題）に対応するために必要、③特定の専門家ではなくすべての個人にとって重要、といった性質を持つとして選択されたもので、個人の能力開発に十分な投資を行うことが社会経済の持続可能な発展と世界的な生活水準の向上にとって唯一の戦略である。このキーコンピテンシーは3つのカテゴリーをもっている：①社会・文化的、技術的ツールを相互作用的に活用する能力（個人と社会との相互関係）、②多様な社会グループにおける人間関係形成能力（自己と他者との相互関係）、③自律的に行動する能力（個人の自律性と主体性）。この3つのキーコンピテンシーの枠組みの中心にあるのは、個人が深く考え、行動することの必要性であり、深く考えることには、目の状況に対して特定の定式や方法を反復継続的に当てはまる力だけではなく、変化に対応する力、経験から学ぶ力、批判的な立場で考え、行動する力が含まれる。その背景には、「変化」、「複雑性」、「相互依存」に特徴付けられる世界への対応の必要性がある。

このように、PISA (Programme for International Student Assessment) で重視しているキーコンピテンシー、

また、ジェネリックスキル(Generic skills:汎用的能力)にしてもコミュニケーション能力を含めて関係性・関わり的重要性を示唆しているのである。

ところが、OECDも指摘しているように、人間関係は複雑である。Aさんの言動から、BさんはAさんに好意をもち接近しようとするのに対して、CさんはAさんに嫌悪感をもち回避しようとする。小学校時代のいじめ(起こって欲しくはないのだが)にしても、いじめていた子がいつの間にかいじめられる立場になっていたりすることがある。人によって違う人間関係、刻々と変化する人間関係。あまりにも複雑なため、これまで心理学は、重要なテーマでありながら、人間関係のメカニズムに入り込めず、要素構成的な観点から、このタイプの人はこのタイプの人と相性がよく、このタイプの人とは相性が悪いといった報告をするにすぎなかった(これでは、巷で流行している血液型相性判断と同じではないか:タイプ論にしても因子論にしても同様である)。

たしかに人間関係は複雑である。そのような複雑な事象を解明するために、近年、複雑系、力学系といった言葉——著者は、それらの概念を総称してダイナミカルシステム理論(Dynamical Systems Theory)と呼んでいる——がいろいろな科学の共通話題となってきている。

## 2. 数式の意味

ある現象の発生する確率  $p$  を、その現象の生起を説明するために観測された変数群  $X=(x_1, \dots, x_r)$  という状態のもとで現象が発生するという条件つき確率を  $p(X)$  で表し、これを

$$p(X)=\Pr\{\text{発生} \mid x_1, x_2, \dots, x_r\}=F(x_1, \dots, x_r)$$

という関数  $F$  を用い、丹後・山岡・高木(1996)は、フラミンガム研究の解析手法から

$$F(Z)=\frac{\exp(Z)}{1+\exp(Z)}=\frac{1}{1+\exp(-Z)}$$

というモデル式を解説している。ここで、 $Z=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\dots+\beta_rX_r$  であり、 $r$  個の変数の影響を線形合成変数として表現している。

これは、ロジスティック式である。ロジスティック式は、ベルハルスト(Verhulst, 1938)により人口増加を説明するモデルとして考案された。元来、ロジスティック式は、①個体数  $N=0$  では、増加率が0になる、②個体数が増加するにつれ、増加率は減少する、③環境の収容可能個体数に限度があるから、その数を  $K$  とすれば、 $N=K$  のとき、増加率は0になる、といった条件を備えている。

$$\frac{dN}{dt}=r(K-N)N$$

ここで、 $K$  は環境収容力、つまり、その環境における個体数の定員である。 $r$  は(相対)内的増加率で、その生物が実現する可能性のある、最大の増加率である。実際の増加率  $r(K-N)$  は  $N$  が  $K$  に近づくにつれて減少し、 $N=K$  ならば増加率は0である。 $N > K$  だと、増加率はマイナスとなり、個体数が  $K$  にな

るまで減少する。また、ここで  $K=\frac{r}{k}$  とおけば、

$$\frac{dN}{dt}=N(r-kN)$$

となり、この場合、 $k$  は、1個体の増加によって増加率が減少する率を表す。

初期値が  $0 < N < K$  の場合、ロジスティック式で表される微分方程式の解は

$$N=\frac{K}{1+\exp rK(t_0-t)}$$

であり( $t_0$  は初期値で決まる任意性)、前述の  $F(Z)$  と同じ意味合いになる。

上記以外にも、関係性の研究としてこれまでの有名なものに、捕食—被食関係の研究(Lotka, 1925; Volterra, 1926)があり、ロトカとヴォルテラ方程式(ロトカ・ヴォルテラ方程式、Lotka-Volterra equation)は、捕食者と被食者の増減関係を非線形微分方程式で表現、モデル化したものである。また、

マーレー (Murray, 1988) が豹柄を表現した式、地域やインターネット上での関わりを示すべき法則 (例. 丸田, 2003; バラバシ, 2002) など世の中で起こっている現象を表現する素晴らしい数式が報告されているのだが、関係性の変容を考える際、ヴァンギート (van Geert, 1998) が「成長過程をシミュレートするために使われる基本になる式」として紹介した

$$L_{t+n} = L_t + L_{tp}(1 - L_t/K) + L_{tp}(\sum dSt)$$

ここで、 $L_{t+n}$  : 時間  $t+n$  の特定変数レベル  $n$  は遅延の長さ

$L_t$  : 時間  $t$  の特定変数レベル

指数  $p$  : すでに獲得されたレベル  $L$  によって影響を受ける成長割合の中身

(もし、 $p=0$  なら成長はリソースが利用されていない - 実際のレベルと

均衡レベルの差によって規定される。成長過程は古典的な学習曲線をとる。

$p=0$  なら成長はすでに達成されたレベルによって規定される。S字型をとる。

$p>1$  なら成長は *unutilized resources* に依存する。)

$K$  : 能力レベル

$\sum dSt$  :  $L$  に影響するすべての付加的支援と競合する影響の総和

は注目しておかなければならないであろう。

関係性を話題にする際、ひとつの個体 (例. Aさん) と別の個体 (例. Bさん) のある時間、場面での関わりとともに、個体Aは時間とともに変容するし、個体Bも変容する。したがって、個体Aと個体Bとの関係は、それぞれの変容の中から起こってくるのである。また、同じことの繰り返し (iteration) の中で、その両者は繰り返しの中から新たな関係性が出現してくるのである。古典的なロジスティック関数

$$f(x) = rx(1-x)$$

は、面白い現象を示してくれる。定数  $r$  を 3.2 とし、 $x$  の初期値を 0.5 とすれば、繰り返しを続けて、算出値は 0.513045 と 0.799455 の二つの数に収束することがわかる。それに対して、 $r = 3.45$  として  $x$  を 0.1 から始めると、ダイナミカルシステムの第3クラスにあたるカオスのアトラクタが出現する (詳しくは、岡林・河合・中川・千野, 2008 参照)。日常生活は繰り返しである。その繰り返しは、意味がないのではなく、条件を整えば、新たな事態を自己組織化してくる可能性がある。

### 3. 動物観察の意味

人間が生きている世界には、人間の生活に影響を与える要因が数多くある。その数多くの要因をそのまま研究に持ち込むと収拾がつかなくなる。そこで、人間のそばに居り、人間と同じように生活しながらも影響要因が比較的限定されうるものとして動物が観察対象として考えられている。あくまでも心理学にとって、動物は人間の行動や思考を単純化して表現してくれるものであり、動物観察から人間の心理にアプローチする重要な媒体なのである。従来の研究でも、Pavlov(1927) は犬を被験体とし、Skinner(1938) はネズミやハト (pigeon)、Thorndike(1911) はネコ、Köhler(1921) は類人猿を研究対象として使っている。

本研究では、金魚を観察対象とするが、金魚は水槽というフレームの中で大きな金魚と小さな金魚が暮らしており、その関係の中で両者 (両金魚) は餌をどのように獲得していくのかを学習していくのである。

## (B) 本研究：金魚の二者関係を通して

### 1. 目的

餌の獲得という事象をもとに、金魚の二者関係を数式でモデル化する。

## 2. 関わりに関する要因

餌の獲得行為（成功）は身体の大きさ（size）、俊敏性（agile）、動機づけ（motivation: drive, need, & incentive）そして、慣れをふくめてストラテジーが関わってくると考えられるが、その関わりを総合したものが  $x(t)$  である。 $dx/dt = f(x)$  は、行為の変化率  $dx/dt$  が時間的に少し前の行為  $x$  によって決定されることを意味する。すなわち、行為者が行為することで、水槽という環境の中での相手との社会状態が決まり（いいかえれば、餌が食べられるかどうかが決まる）、その社会状態に応じて行為者は、一瞬ごとに行為を変化させるのである。本研究では、俊敏性を瞬発力という形で観察可能な動きが出てくると考え、1秒にどのくらい泳げるのかを測定する。動機づけ、慣れについては、隠れた要因とし、本研究では、餌の獲得をめぐる二者の関わりでは、金魚の大きさ比、瞬発力比を観察可能な二要因として取り扱う。

## 3. 観察対象ならびに観察状況

観察対象になったのは、大きい金魚と小さい金魚の2匹の金魚である。どちらの金魚も甲府市と姉妹都市関係を結んでいる大和郡山市から来たものであるが、小さい金魚がやってきたとき（当初は3cm）には、大きい金魚はこの水槽ですでに2年暮らしており、体調も7.5cmになっていた。この2匹の金魚が住んでいるのは、縦19cm、横31.2cm、高さ24cmの水槽であり、水槽の上面を2回トントンと叩いてから、餌1粒を入れる、ということを経験した。

2月から6月まで、222回の観察の結果、次の項で述べるデータが得られた。基本的に1日2回（朝、夕）、餌は入れられ、その前後1時間に体長（長さ）と瞬発力（1秒間に泳ぐ最大距離）が測定された。

## 4. データ

2月から6月にかけて時間を追って餌獲得状況を観察した結果を表1に示す。大きさ比は大きい金魚が小さい金魚より何倍かを示し（大きさは体長を示し、単位はcmである）、瞬発力比は大きい金魚が小さい金魚より何倍かを示し（瞬発力は1秒に最大何cm泳ぐことができるのかを示している）、餌獲得は大きい金魚が餌を食べたのなら○、大きい金魚が食べられなかったなら（小さい金魚が食べたのなら）×が付いている。

この年は、2月から3月にかけてだんだん暖かくなってきたと思ったら、4月、5月で寒くなったりして気温の変動が激しかった。気候に連動して、金魚の動きも良くなったり、悪くなったりしたが、6月に入り、大きい金魚は高齢のため、あまり動こうとしなくなった。表1の最後は、×が続いているのはそのためであり、その段階で観察を終了した。

表1 時間を追っての餌獲得の推移

| 日時       | 大きい金魚の体長 | 小さい金魚の体長 | 体長比  | 大きい金魚の瞬発力 | 小さい金魚の瞬発力 | 瞬発力比 | 餌獲得 |
|----------|----------|----------|------|-----------|-----------|------|-----|
| 2.09 asa | 7.50     | 3.00     | 2.50 | 19.00     | 7.00      | 2.71 | ○   |
| 2.09 yu  | 7.50     | 3.00     | 2.50 | 19.00     | 7.00      | 2.71 | ○   |
| （中途省略）   |          |          |      |           |           |      |     |
| 4.21 yu  | 7.90     | 3.70     | 2.14 | 18.00     | 18.00     | 1.00 | ×   |
| 4.22 asa | 7.90     | 3.70     | 2.14 | 18.00     | 18.00     | 1.00 | ○   |
| 4.22 yu  | 7.90     | 3.80     | 2.08 | 18.00     | 18.00     | 1.00 | ×   |
| 4.23 asa | 7.90     | 3.80     | 2.08 | 17.00     | 18.00     | .94  | ○   |
| 4.23 yu  | 7.90     | 3.80     | 2.08 | 17.00     | 18.00     | .94  | ○   |

|          |      |      |      |       |       |      |   |
|----------|------|------|------|-------|-------|------|---|
| 4.24 asa | 7.90 | 3.80 | 2.08 | 17.00 | 18.00 | .94  | × |
| 4.24 yu  | 8.00 | 3.80 | 2.11 | 18.00 | 18.00 | 1.00 | ○ |
| (中途省略)   |      |      |      |       |       |      |   |
| 5.29 asa | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 17.00 | 1.00 | ○ |
| 5.29 yu  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 17.00 | 1.00 | × |
| 5.30 asa | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 17.00 | 1.00 | ○ |
| 5.30 yu  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 15.00 | 1.13 | ○ |
| 5.31 asa | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 15.00 | 1.13 | ○ |
| 5.31 yu  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 15.00 | 1.13 | ○ |
| 6.1 asa  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 17.00 | 15.00 | 1.13 | ○ |
| 6.1 yu   | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 15.00 | 17.00 | .88  | × |
| 6.2 asa  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 14.00 | 17.00 | .82  | × |
| 6.2 yu   | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 13.00 | 20.00 | .65  | × |
| 6.2 asa  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 10.00 | 20.00 | .50  | × |
| 6.2 yu   | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 8.00  | 20.00 | .40  | × |
| 6.3 asa  | 8.00 | 4.00 | 2.00 | 6.00  | 20.00 | .30  | × |

図1は、時間の経過とともに、大きな金魚が餌を獲得できたかどうか（小さな金魚が餌を獲得できなかったかどうか）を示したものである。

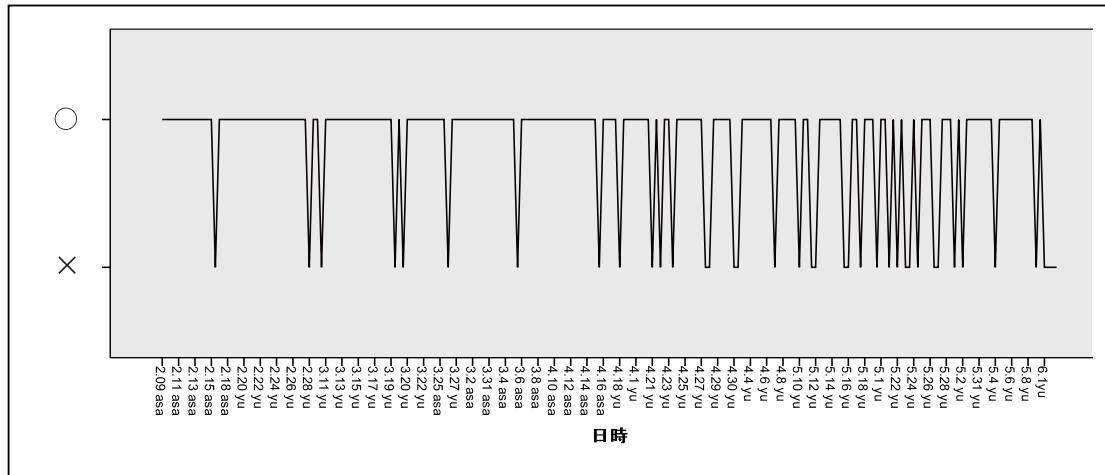


図1 日時の経過にもなう餌の獲得状況抜粋  
(縦軸：上が大きい金魚が餌を獲得、下が小さい金魚が餌を獲得)

これらのデータをもとに、ロジスティック回帰分析を行った（表2）。餌が獲得できたかどうかという事象についてであるので、二項ロジスティックである。オッズ比は、表2の Exp(B) で示されている。

表2 方程式中の変数

|         | B     | 標準誤差  | Wald  | 自由度 | 有意確率 | Exp(B) |
|---------|-------|-------|-------|-----|------|--------|
| 金魚の大きさ比 | -.991 | 3.075 | .104  | 1   | .747 | .371   |
| 瞬発力比    | 3.482 | 1.549 | 5.054 | 1   | .025 | 32.523 |
| 定数      | -.140 | 5.243 | .001  | 1   | .979 | .869   |

表2より導き出される餌獲得成功率 ( $F$ ) は、

$$F = \frac{1}{1 + \exp\{-(-.991 \times \text{大きさ比} + 3.482 \times \text{瞬発力比} - .140)\}}$$

となる。ここで、 $-2$ 対数尤度=190.633、Cox-Snell  $R^2 = .093$ 、Nagelkerka  $R^2 = .152$ であった。

表2より、瞬発力比に5%水準で有意差があることにより（大きさ比に有意差がない）、瞬発力比を変化させると、 $F$ はどのように変動するのかを見てみた（表3と図2）。

表3 瞬発力比による $F$ の変動  
(大きさ比を2に固定)

| 瞬発力比   | $F$    |
|--------|--------|
| 0.1    | 0.1450 |
| 0.2    | 0.1937 |
| 0.3    | 0.2539 |
| 0.4    | 0.3253 |
| 0.5    | 0.4058 |
| 0.6    | 0.4918 |
| 0.7    | 0.5782 |
| 0.8    | 0.6600 |
| 0.9    | 0.7333 |
| 1.0    | 0.7957 |
| 1.1    | 0.8466 |
| 1.2    | 0.8865 |
| (中途省略) |        |
| 3.9    | 0.9999 |
| 4.0    | 0.9999 |

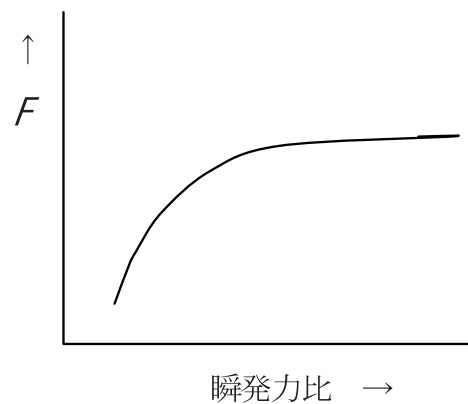


図2 瞬発力比を.10から.10刻みで増やしたときの $F$ の変化  
(横軸:瞬発力比、縦軸: $F$  餌獲得成功率)



表3と図2から、瞬発力比が変化すると餌獲得成功率 ( $F$ ) は、はじめは急激に増加するものの、瞬発力比が2倍になると、その増加率はフラットに近づき、それ以後、微弱な伸びを示しながらも高原状態(プラトウ)になるというように変容することがわかる。

### (C) 考察

#### 1. 本研究結果概略とその意味

2者関係では、社会状態はひとりだけの行為では決まらず、自分の行為と相手の行為のセットによってはじめて決まる。つまり、(行為, 行為) = 社会状態であり、両行為者は、社会状態に応じて一瞬ごとに行為を変化させることになる。本研究では、金魚の二者関係を餌の獲得事象から考察し、上記  $F$  式を得ることができた。

$F$  式ならびに  $F$  値の変容データから、二者関係において、その初期値・初期状態が大きな意味をもつことがわかる。大きい金魚は小さい金魚に比べて、身体の大きさ、瞬発力が優れていたが、環境への慣れもあった。初期状態で優位に立った大きい金魚は、はずみで餌を獲得できないことはあっても(小さな揺れ)、おしなべて、餌獲得に成功してきた。その後、気候の変動で、両者の動きが悪くなっても(瞬発力の鈍化)、餌の獲得に成功したのは、確率的には大きい金魚であった。そこに、二者それぞれのもつ特徴(本研究では俊敏性・瞬発力等)が影響を及ぼし、小さな揺れが繰り返されながら(小さな不均衡状態)、やがて、大きな揺れになり(大きな不均衡状態)、そこで起こる新しい状態が安定していく(均衡状態)、ということがわかる。すなわち、観察の途中から、時間の経過は、小さい金魚にとっては身体が大きくなる、瞬発力がするどくなる、といった促進的役割をもったのに対して、大きい金魚にとっては高齢化という衰退の役割をもっていたのである。スポットとして、小さい金魚が餌を獲得することに成功した(小さな揺れ)後、6月1日を境に、大きな揺れが起こったのである。

#### 2. 発達変容: 学習と適応

餌獲得に関する優位性は、初期状態を基にしながらも、小さな揺れを繰り返し、その小さな揺れの蓄積(学習)によって大きな揺れが起こり、常態化する(新たな平衡状態)のだと考えられる。この新たな平衡状態は、二者関係における新たな段階(stage)なのである。生き物は、日常生活の中で、学習と適応を繰り返している。Piaget(1954)は、それを同化(assimilation)と調節(accommodation)によると表現する。新しい環境に入ると(例. 親元を離れ自炊するようになり、周囲にも知り合いがいらない)、当初は緊張し、料理の仕方を学び、新しく知り合った友だちとどのように話したらよいのか、あれこれ模索する。そのプロセスは学習過程であり、適応過程である。とりあえずやってみて失敗すれば別の方法でやってみて、たまたまうまくいけば、そのやり方をその後、取り入れてみたり(試行錯誤学習、または、オープンラント学習)、TVドラマの真似をしてみたり(模倣学習)、自分の今ある状況を見通しながら、どのようにすればうまくいくのか考えてみたり(洞察学習)、それぞれの個体でプロセスは違っても、学習をしながら新しい環境に適応していくのである。そして、その環境に一度適応(この場合は、慣れと呼ばれることもある)すると、手抜きをし、マンネリ化した(例. 料理は簡単なワンパターンなものになり栄養が偏り、友だちはいつも2~3人の少人数でしか話をせず、話題は常に限られている)生活になってしまう。

一般に、人間の生活は大学入学・卒業、就職、結婚、病気、等々の節目があり、その節目には乗り越えなければならないハードルが待ち受けている。そのハードルを乗り越える術を身につけることが学習であろうし、現実それを乗り越えることが適応であろう。

\*

二者関係を基本とする他者との関係は、発達変容を考える上で、同化と調節を行う環境の軸である。また、本研究で示されている現象(図2など)は、非線形である。今回は、餌の獲得に成功したかどうか、

といった単純な事象について取り扱ったが、その単純なはずの事象でも、この有り様である。人間や動物の営みは、線形では表現できない。日常の繰り返しは、意味をもたないのではなく、これまでの研究で誤差として扱われてきたものが揺れとして重要な意味をもつのである。今後、本研究で見出された関係式を高次のレベルに発展させたい。

## 参考文献

- Barabasi, A.-L. & Franqos, J. (2002). *Linked: The new science of networks science of networks*. New York: Plume.
- Köhler, W. (1921). *Intelligenzprüfungen an menschenaffen*, 1921 (rev. ed. of *Intelligenzprüfungen an anthropoiden*) - *The mentality of apes* (tr. by Ella Winter, 1925) London: Kegan Paul, Trench, Trubner & Co., Ltd.
- Lotka, A. J. (1925). *Elements of physical biology*. Baltimore: Williams & Wilkins Co.
- 丸田一 (2003). 都市の規模や勢力の分布に関する考察及びベキ指数を用いた都市圏集積度分析手法の提案  
GLOCOM Review, 8 : 5 (77), 1-46.
- マレー, J.D.(1988). ヒョウの斑点はどのように決まるか サイエンス Scientific American, 5 (日本版) 日経サイエンス社 64-72.
- 岡林春雄・河合優年・中川正宣・千野直仁 (2008). *ダイナミカルシステム・アプローチ (DSA) の基本的な考え方*  
岡林春雄 (編著) 心理学におけるダイナミカルシステム理論 (26-50). 金子書房
- 岡林春雄・Arrow, H.・Fogel, A.・河合優年・中川正宣・千野直仁・小島康次 (2008). *心理学におけるダイナミカルシステム理論* 金子書房
- Pavlov, I. P.(1927). *Conditioned reflexes: An investigation of the physiological activity of the cerebral cortex. Translated and edited by G. V. Anrep*. London: Oxford University Press.
- Piaget, J.(1954). *The construction of reality in the child*. New York: Basic Books.
- Skinner, B.F.(1938). *The behavior of organisms: An experimental analysis*. New York: Appleton-Century-Crofts.
- 丹後俊郎・山岡和枝・高木晴良 (1996). *ロジスティック回帰分析* 朝倉書店
- Thorndike, E.(1911, 2000). *Animal intelligence: Experimental studies*. New Jersey: Transaction Publishers.
- van Geert, P.(1998). We almost had a great future behind us: The contribution of non-linear dynamics to developmental - science - in - the - making. *Developmental Science*, 1 (1), 143-159.
- Verhulst, P.F. (1844). *Recherches mathématiques sur la loi d'accroissement de la population*.  
Mémoires de l'academie royale de Belgique, tome XVIII.
- Volterra, V.(1926). *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*. Mem. R. Accad. Naz. dei Lincei. Ser. VI, 2, 31-113.