

## 混合型仮定による静的・動的平板理論とその精度

平 島 健 一\*  
根 岸 嘉 和\*\*

(昭和61年8月11日受理)

### Static and Dynamic Theory of Plates due to Hybrid Assumption and its Accuracies

Ken-ichi HIRASHIMA\* and Yoshikazu NEGISHI\*\*

#### Abstract

By using of mixed Hamilton's principle with Reissner's functional, the present paper derives the general higher-order static and dynamic theory of transversely isotropic elastic plate under the assumption of stress components as well as displacement ones (that is, hybrid assumption), which satisfy exactly the boundary (loading) conditions on the upper and lower surfaces of the plate. The results of this formulation include the both cases of bending and stretching behaviours of the plates.

It is shown that several famous dynamic theories of plates can be derived as a special case of our result with employment of first-order terms and with some modifications.

Numerical results for the statical cases of torsion of a rectangular plate with transversely isotropy and transversely loaded plate with simply supported edges under the several lower-order theories are compared with the exact solution of elasticity.

#### 1. ま え が き

著者らは先に静的な平板の解析理論として、定式化の最初の段階で変位と平板の上下表面の境界(荷重)条件を完全に満足する応力の双方を仮定した、いわゆる混合型平板理論を弾性論の基礎式に基づいて誘導し、簡単な数値例とともに報告した<sup>1)</sup>。この範ちゅうに属する従来までに発表された理論としては、Reissnerのせん断変形を考慮した理論(1次理論)<sup>2)</sup>および同氏によりごく最近発表された混合型理論(2次理論)<sup>3)</sup>ならびに古賀の理論<sup>4)</sup>が挙げられるが、それらは著者らのその論文での結果を曲げ挙動に限定した上で、さらに特殊化したものとして導出しうることが同論文で明らかにされた。またこの他に、これに類する理論としてはReissnerが1次理論を改良した中間的な改良理論を列挙することができる<sup>5),6)</sup>。

本論文においては、上述のものと同系統の混合型の平板理論を動的な場合も含め、最も一般的な形に拡張

し線形弾性学の混合型の変分原理に基づく定式化によって、その支配方程式および境界条件式を誘導することを主目的とする。また他の理論との関係について触れるとともに、いくつかの代表的な数値例を提示して本理論の精度特性の一面を明らかにする。

#### 2. 理論の定式化

Fig. 1に示す座標系の平板に対しReissnerの変分原理を動的な問題に拡張し、混合型の動弾性学の変分手法を用いて支配方程式ならびに境界条件式を導く。ここで用いる変分原理(混合型Hamilton原理)は次式

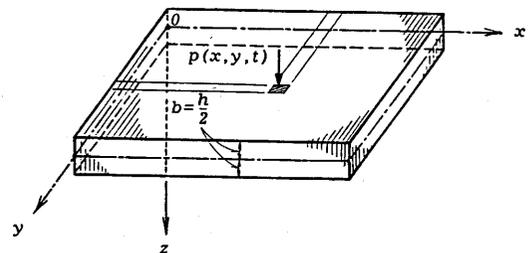


Fig. 1 Geometry of rectangular plate and rectangular Cartesian coordinate system  $(x, y, z)$ .

\* 土木工学科, Department of Civil Engineering

\*\* 福島工業高等専門学校, Fukushima National College of Technology

で示される。

$$\delta L_c = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T - I_R) dt = 0. \quad (1)$$

上式中の  $T$  は運動エネルギーであり、次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{u}_j \dot{u}_j dV. \quad (2)$$

ここに、 $\rho$  は質量密度を、 $u_j$  は変位成分を表わし、ドット( $\dot{\cdot}$ )は時間  $t$  に関する偏微分を表わすものとする。他方、 $I_R$  は Reissner の汎関数であり次式で与えられる。

$$I_R = - \int_V \{ U_c(\tau_{ij}) + (\tau_{ij,j} + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i) \lambda_i \} dV + \int_{S_\sigma} (t_i - \bar{t}_i) u_i ds + \int_{S_u} t_i \bar{u}_i ds. \quad (3)$$

ここに、 $\tau_{ij}$  は応力テンソルである。

なお上式において  $U_c(\tau_{ij})$  はコンプリメンタリエネルギー関数であり、 $\bar{f}_i$ 、 $t_i$  は物体力および表面力を表わし、 $S_\sigma$  は作用応力が表面力  $\bar{t}_i$  で規定された境界を、 $S_u$  は変位が  $\bar{u}_i$  で規定された境界をそれぞれ表わす。またコンマ( $\cdot$ )の後の添字はその座標に関する偏微分を表わす。平板の応力および変位を以下に示すような基準化した板厚座標  $\zeta = z/b = 2z/h$  ( $h = 2b$ : 板厚) に関する無限項多項式で展開する。

まず応力に関しては与えられた上下表面での境界(荷重)条件を満足するように次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} (\tau_{xx}, \tau_{yy}, \tau_{xy}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xx}^{(n)}, \tau_{yy}^{(n)}, \tau_{xy}^{(n)}) \cdot P_n(\zeta), \\ (\tau_{xz}, \tau_{yz}) &= b \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{xz}^{(n)}, \tau_{yz}^{(n)}) \cdot R_n(\zeta), \\ \tau_{zz} &= -\frac{\rho}{2} + b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{zz}^{(n)} \cdot S_n(\zeta), \\ (\tau_{xz}^{(0)} = \tau_{yz}^{(0)} = 0, \tau_{zz}^{(1)} &= -\frac{3}{2b^2} \rho). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $P_n(\zeta)$  は Legendre 多項式であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_n(\zeta) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{d\zeta^n} (\zeta^2 - 1)^n, \\ P_0(\zeta) &= 1, \quad P_1(\zeta) = \zeta, \\ P_2(\zeta) &= \frac{1}{2} (3\zeta^2 - 1), \quad P_3(\zeta) = \frac{1}{2} (5\zeta^3 - 3\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また  $R_n(\zeta)$  は  $P_n(\zeta)$  を 1 回、 $S_n(\zeta)$  は  $P_n(\zeta)$  を 2 回、それぞれ積分して得られる多項式で、おのおの次式でその一般式が与えられるものである。

$$\left. \begin{aligned} R_n(\zeta) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} (\zeta^2 - 1)^n, \\ S_n(\zeta) &= \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^{n-2}}{d\zeta^{n-2}} (\zeta^2 - 1)^n. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

なお、Legendre 関数  $P_n(\zeta)$ 、 $R_n(\zeta)$  および  $S_n(\zeta)$  の板厚に沿う分布形は付録 A の Fig. A・1 に示されている。

次に変位成分に関して次のような展開仮定を設ける。

$$\left. \begin{aligned} (u, v) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u^{(n)}, v^{(n)}) \cdot P_n(\zeta), \\ w &= \bar{w}_0 + b \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^{(n)} \cdot R_n(\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

面外変位  $w$  に関しては式(7)<sub>2</sub>の仮定と並行して、さらに次のような重みつき積分平均  $w^{(n)}$  および  $w_0$  を定義する。

$$w^{(n)} = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 w \cdot R_n(\zeta) d\zeta, \quad w_0 = \int_{-1}^1 w d\zeta. \quad (8)$$

したがって、これらは式(7)<sub>2</sub>の表示を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} w^{(n)} &= -\delta_{n1} \bar{w}_0 + \frac{b}{k_n} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \cdot \bar{w}^{(m)}, \\ w_0 &= 2\bar{w}_0 - \frac{2}{3} b \bar{w}^{(1)}. \end{aligned} \right\} \quad (8')$$

ここで、後述の式の簡略化のために次のような量を定義しておく。

$$\left. \begin{aligned} Q_z^{(n)} &= b \int_{-1}^1 \tau_{zz} \cdot P_n(\zeta) d\zeta \\ &= -b\rho\delta_{n0} - b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \cdot \tau_{zz}^{(m)}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

すなわち  $Q_z^{(n)}$  は面外直応力の重みつき積分平均に相当するものであり、これらの式において次のような記号を導入した。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_m^n &= \int_{-1}^1 R_n(\zeta) \cdot R_m(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{1}{2n+1} (\hat{\Gamma}_m^{n+1} - \hat{\Gamma}_m^{n-1}), \\ \hat{\Gamma}_m^k &= \int_{-1}^1 P_k(\zeta) \cdot R_m(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{2}{(2k+1)(2m+1)} (\delta_{k,m+1} - \delta_{k,m-1}), \\ k_n &= 2/(2n+1) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

上記中の  $\delta_{ij}$  は Kroncker の delta である。上式の記号  $\Gamma_m^n$ 、 $\hat{\Gamma}_m^k$  の具体的な値については付録 B に示した。

式(1)の変分を各項別に実行して得られた式を、式(4)、(7)の展開仮定ならびに式(8)の重みつき積分変位を用いて書き下す。

まずコンプリメンタリエネルギーに関して、

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V U_c(\tau_{ij}) dV$$

$$\begin{aligned}
 &= \delta \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \int_A \frac{b}{2E} \int_{-1}^1 [(\tau_{xx}^2 + \tau_{yy}^2 + K_E \tau_{zz}^2 \\
 &\quad - 2\nu(\tau_{xx}\tau_{yy} + \frac{K_G}{K_V}[\tau_{xx}\tau_{zz} + \tau_{yy}\tau_{zz}])] \\
 &\quad + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^2 + K_G \tau_{xz}^2 + K_G \tau_{yz}^2)] d\xi dx dy \\
 &= \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \int_A b \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{k_n}{E} (\tau_{xx}^{(n)} - \nu \tau_{yy}^{(n)}) + \frac{\nu_z}{E_z} (\rho \delta_{n0} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)}) \right] \delta \tau_{xx}^{(n)} + \left( \frac{k_n}{E} (\tau_{yy}^{(n)} - \nu \tau_{xx}^{(n)}) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\nu_z}{E_z} (\rho \delta_{n0} + b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)}) \right] \delta \tau_{yy}^{(n)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b^2}{E_z} (1 - \delta_{n1}) \left[ \rho \left( -\frac{1}{3} \delta_{n0} + \frac{1}{15} \delta_{n2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \nu_z \Gamma_m^n (\tau_{xx}^{(m)} + \tau_{yy}^{(m)}) - b^2 \Lambda_m^n \tau_{zz}^{(m)} \right\} \right] \delta \tau_{zz}^{(n)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{G} \left\{ k_n \tau_{xy}^{(n)} \delta \tau_{xy}^{(n)} + (1 - \delta_{n0}) b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{xz}^{(m)} \delta \tau_{xz}^{(m)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \tau_{yz}^{(m)} \delta \tau_{yz}^{(m)}) \right\} \right] dx dy \quad (11)
 \end{aligned}$$

上式中の  $K_E, K_G, K_V$  および  $\Lambda_m^n$  はそれぞれ次式で示される量である。

$$\left. \begin{aligned}
 K_E &= \frac{E}{E_z}, K_G = \frac{G}{G_z}, K_V = \frac{\nu}{\nu_z}, \\
 \Lambda_m^n &= \int_{-1}^1 S_n(\xi) \cdot S_m(\xi) d\xi.
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$\Lambda_m^n$  の具体的な値については付録 B に示した。

次に付帯条件 (運動方程式) の項に関する変分を実行するに際して、前述のとおり、応力成分に関しては式(4)、変位成分に関しては式(7)の各展開形の仮定を用いるとともに物体力の重みつき積分として次の量を定義する。

$$\left. \begin{aligned}
 (\bar{f}_x^{(n)}, \bar{f}_y^{(n)}) &= k_n \int_{-1}^1 (\bar{f}_x, \bar{f}_y) \cdot P_n(\xi) d\xi, \\
 \bar{f}_z^{(n)} &= k_n \int_{-1}^1 \bar{f}_z \cdot R_n(\xi) d\xi, \bar{f}_0 = \int_{-1}^1 f_z d\xi.
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

さらに Lagrange の未定乗数を次のように展開しておく。

$$\left. \begin{aligned}
 (\lambda_x, \lambda_y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_x^{(n)}, \lambda_y^{(n)}) \cdot P_n(\xi), \\
 \lambda_z &= \lambda_0 + b \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_z^{(n)} \cdot R_n(\xi).
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

以上の準備ののち変分計算を行なうと最終的に付録 C に示した式(C.1)のようになる。

次に表面力の補足仕事については、本理論では応力 (荷重) 境界である上下表面において Fig. 1 に示すような荷重条件のもとでの境界条件が、式(4)の応力仮定により完全に満足されているため、実質的には、平板

の側端面における補足仕事のみを考えればよい。したがって、平板側面に沿う周辺座標系  $(n, s)$  に基づいて演算を実行すると以下ようになる。(Fig. 1 に示したように、 $n$  は側面に立てた法線方向座標。)

$$\begin{aligned}
 &\delta \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \int_{S_\sigma} (t_i - \bar{t}_i) u_i ds + \delta \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \int_{S_u} t_i \cdot \bar{u}_i ds \\
 &= \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \oint_C b \sum_{n=0}^{\infty} [k_n \{ (\tau_{nn}^{(n)} - \bar{\tau}_{nn}^{(n)}) \delta u_n^{(n)} \\
 &\quad + (\tau_{ns}^{(n)} - \bar{\tau}_{ns}^{(n)}) \delta u_s^{(n)} + b(\tau_{nz}^{(n)} - \bar{\tau}_{nz}^{(n)}) \delta w^{(n)} \\
 &\quad + u_n^{(n)} \cdot \delta \tau_{nn}^{(n)} + u_s^{(n)} \cdot \delta \tau_{ns}^{(n)} + (1 - \delta_{n0}) b w^{(n)} \cdot \delta \tau_{nz}^{(n)} \}_{S_\sigma} \\
 &\quad + k_n \{ \bar{u}_n^{(n)} \cdot \delta \tau_{nn}^{(n)} + \bar{u}_s^{(n)} \cdot \delta \tau_{ns}^{(n)} \\
 &\quad + (1 - \delta_{n0}) b \bar{w}^{(n)} \cdot \delta \tau_{nz}^{(n)} \}_{S_u}] ds. \quad (15)
 \end{aligned}$$

最後に運動エネルギーに関しては次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_0}^{\hat{t}_1} T dt &= \delta \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \cdot \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \\
 &= \int_{t_0}^{\hat{t}_1} dt \int_A [b \rho \sum_{n=0}^{\infty} \{ k_n (\dot{u}^{(n)} \cdot \delta u^{(n)} \\
 &\quad + \dot{v}^{(n)} \cdot \delta v^{(n)} + b \dot{w}^{(n)} \cdot \delta w^{(n)}) \\
 &\quad + b \rho \dot{\bar{w}}_0 \cdot \delta \bar{w}_0 \}] dx dy. \quad (16)
 \end{aligned}$$

以上をまとめると混合型 Hamilton 原理式は最終的に付録 C の式(C.2)のように求められる。

式(C.2)の中の変位係数の変分の係数関係および式(8)より Lagrange の未定乗数の力学的意味が式(7)で設定した変位係数  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$  および  $\bar{w}_0$  と次のように対応することになる。

$$\left. \begin{aligned}
 \lambda_x^{(n)} &= u^{(n)}, \lambda_y^{(n)} = v^{(n)}, \\
 \lambda_z^{(n)} &= \bar{w}^{(n)}, \lambda_0 = \bar{w}_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

なお式(C.2)中の線積分の項は上式の関係を用い、さらに座標変換の関係を導入して式を整理したものであり、これらの関係式より境界条件が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 u_n^{(n)} &= \bar{u}_n^{(n)}, u_s^{(n)} = \bar{u}_s^{(n)}, w^{(n)} = \bar{w}^{(n)} \text{ on } S_u, \\
 \tau_{nn}^{(n)} &= \bar{\tau}_{nn}^{(n)}, \tau_{ns}^{(n)} = \bar{\tau}_{ns}^{(n)}, \tau_{nz}^{(n)} = \bar{\tau}_{nz}^{(n)} \text{ on } S_\sigma.
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

また運動方程式は Lagrange の未定乗数の変分の係数関係式から次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{xx,x}^{(n)} + \tau_{xy,y}^{(n)} + \tau_{xz,z}^{(n)} + \bar{f}_x^{(n)} - \rho \dot{u}^{(n)} &= 0, \\
 &\quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
 \tau_{xy,x}^{(n)} + \tau_{yy,y}^{(n)} + \tau_{yz,z}^{(n)} + \bar{f}_y^{(n)} - \rho \dot{v}^{(n)} &= 0, \\
 &\quad (n = 0, 1, 2, \dots) \\
 \frac{b}{k_n} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{xz,x}^{(m)} + \tau_{yz,z}^{(m)} + \tau_{zz}^{(m)}) + \bar{f}_z^{(n)} - \rho \dot{w}^{(n)} &= 0, \\
 &\quad (n = 1, 2, \dots) \\
 -\frac{2b}{3} (\tau_{xz,x}^{(1)} + \tau_{yz,z}^{(1)} + \tau_{zz}^{(1)}) + \bar{f}_0 - \rho \dot{\bar{w}}_0 &= 0.
 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式において物体力と慣性項を無視したものは著者らの既発表のノート<sup>1)</sup>(以下ノートと略記する)の式(7)に帰着することは言うまでもない。

最後に変位一応力関係式(厳密には変位係数一応力係数関係式)は、応力係数の変分の係数関係式を式(17)を用いて具体化し、式(7)<sub>2</sub>および式(9)を用いて簡略化することにより以下のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(n)} - \nu \tau_{yy}^{(n)} - \frac{\nu z}{k_n b} K_E \cdot Q_z^{(n)} &= E u_{,x}^{(n)}, \\ \tau_{yy}^{(n)} - \nu \tau_{xx}^{(n)} - \frac{\nu z}{k_n b} K_E \cdot Q_z^{(n)} &= E v_{,y}^{(n)}, \\ \sum_{m=0}^{\infty} \{ \nu \Gamma_m^n (\tau_{xx}^{(m)} + \tau_{yy}^{(m)}) - b^2 \Lambda_m^n \tau_{zz}^{(m)} \} \\ + p \cdot \left( \frac{1}{3} \delta_{n0} - \frac{1}{15} \delta_{n2} \right) &= \frac{k_n}{b} E_z w^{(n)}, \\ &(n = 0, 2, 3, \dots) \\ \tau_{xy}^{(n)} &= G(u_{,y}^{(n)} + v_{,x}^{(n)}), \\ \frac{b^2}{k_n} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{xz}^{(m)} &= G_z(b w_{,x}^{(n)} - u^{(n)}), \\ \frac{b^2}{k_n} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{yz}^{(m)} &= G_z(b w_{,y}^{(n)} - v^{(n)}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

上式の第1, 2式を  $\tau_{xx}^{(n)}, \tau_{yy}^{(n)}$  について解けば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (u_{,x}^{(n)} + \nu v_{,y}^{(n)}) + \frac{K_E \nu z}{1-\nu} \cdot \frac{1}{k_n b} Q_z^{(n)}, \\ \tau_{yy}^{(n)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (v_{,y}^{(n)} + \nu u_{,x}^{(n)}) + \frac{K_E \nu z}{1-\nu} \cdot \frac{1}{k_n b} Q_z^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これらはもちろんノートの式(9)<sub>1,2</sub>と同じ式であり、第4式と第5, 6式はそれぞれノートの式(9)<sub>3</sub>および式(10)<sub>1,2</sub>と完全に一致する。また第3式を具体的に展開し式(9)を用いて表示するとノートの式(11)が、また  $n = 0$  の場合の具体式として式(11)<sub>3</sub>が得られる。最後に  $n = 1$  の場合の変位一応力関係式は  $\tau_{zz}^{(1)}$  を  $\tau_{zz}^{(1)} = -\frac{3}{2b^2} p$  と固定したため変分の式から得ることはできないのでノートの手法に従い導き出すことによって、式(11)<sub>2</sub>と同様の式を得る。これらを再記すれば次のようになる<sup>1)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} w^{(n)} &= -\frac{1}{2E_z} \left\{ \frac{Q_z^{(n+2)}}{2n+3} - \frac{2(2n+1)Q_z^{(n)}}{(2n-1)(2n+3)} \right. \\ &\quad + \left. \frac{Q_z^{(n-2)}}{2n-1} \right\} + \frac{\nu z}{E_z} b \left\{ \frac{\tau_{xx}^{(n+2)} + \tau_{yy}^{(n+2)}}{(2n+3)(2n+5)} \right. \\ &\quad - \left. \frac{2(\tau_{xx}^{(n)} + \tau_{yy}^{(n)})}{(2n-1)(2n+3)} + \frac{\tau_{xx}^{(n-2)} + \tau_{yy}^{(n-2)}}{(2n-3)(2n-1)} \right\}, \\ w^{(1)} &= -\frac{1}{2} w_0 - \frac{1}{10E} (Q_z^{(3)} - Q_z^{(1)}) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{\nu z}{5E_z} b \left\{ \frac{1}{7} (\tau_{xx}^{(3)} + \tau_{yy}^{(3)}) - \frac{1}{3} (\tau_{xx}^{(1)} + \tau_{yy}^{(1)}) \right\}, \\ w^{(0)} &= -\frac{1}{6E_z} (Q_z^{(2)} - Q_z^{(0)}) \\ &+ \frac{\nu z}{3E_z} b \left\{ \frac{1}{5} (\tau_{xx}^{(2)} + \tau_{yy}^{(2)}) - (\tau_{xx}^{(0)} + \tau_{yy}^{(0)}) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

### 3. 従来の応力仮定型の動的平板理論と本理論における1次理論の関係

ここでは動的曲げ挙動に着目し、各種支配式のうち1次の項のみを採用した理論式に、妥当性のある仮定を導入してそれらを特殊化すれば従来の応力仮定型の動的平板理論に帰着することを示す。

まず、基本的な支配式として  $x$  および  $y$  方向の運動方程式は式(19)<sub>1,2</sub> の  $n = 1$  の式を採用し、 $z$  方向の運動方程式は式(19)<sub>4</sub> を採用する。一方、変位一応力関係式としては式(20)<sub>3,4,5</sub> および式(21)<sub>1,2</sub> の  $n = 1$  の場合の式を採用するが、以下では説明を簡単にするためにこれらの支配式を  $x-z$  面内の挙動に限定 ( $x$  方向に伝播する波動の解析ないしは、はり理論の問題を想定したことに相当)し、上下表面での自由境界を仮定して  $\tau_{zz}^{(1)} \equiv 0$  とおいた次式から出発する。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx,x}^{(1)} + \tau_{xz}^{(1)} - \rho \dot{u}^{(1)} &= 0, \\ -\frac{2}{3} b \tau_{xz,x}^{(1)} - 2\rho \dot{w}_c &= 0, \\ \tau_{xx}^{(1)} - \frac{E}{1-\nu^2} u_{,x}^{(1)} &= 0, \\ -u^{(1)} - b w_{c,x} - \frac{b^2}{k_1 G} \Gamma_1^1 \tau_{xx}^{(1)} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

なお、上式の第2, 4式は以下で扱う従来の応力仮定型の諸理論における仮定に合わせるため、 $w \equiv w_c$  とし、 $w_0 = 2w_c$ ,  $w^{(1)} = -w_c$  なる関係より、面外変位の項をいずれも  $w_c$  で表わしてある。上式をそのままの形で用いると、Schmidt 理論<sup>10)</sup>を線形化した理論による支配式に一致し、これはまた Levinson らの動的平板理論<sup>11)</sup>の式ならびに、Mindlin 理論<sup>12)</sup>でせん断補正係数  $\kappa^2 = 5/6$  と置いた式とも一致することになる。一方、Mindlin 理論と同等の理論を導くためには、まず、Mindlin の仮定に立ち帰り、面外せん断変形に関する変位一応力関係式として  $\kappa^2$  を導入した  $u_{,x} + w_{,x} = \frac{1}{\kappa^2 G} \bar{\tau}_{xz}$  (ただし、 $\bar{\tau}_{xz}$  は板厚方向に一定とする)を用いる。さらに、これらの各項を  $u = u^{(1)} \cdot R_1(\zeta)$ ,  $w = w_c$ ,  $\bar{\tau}_{xz} = \frac{b}{3} \tau_{xz}^{(1)}$  と置けば、

$$u^{(1)} + b w_{c,x} - \frac{b^2}{3\kappa^2 G} \tau_{xz}^{(1)} = 0. \quad (24)$$

を得るが、これを式(23)<sub>4</sub>の代りに採用することにより  $x^2$  の導入をはかった Mindlin 理論の支配式<sup>12)</sup>と同等のものが得られる。なおこの式において  $x^2 = 5/6$  と置けば  $1/3x^2 = 2/5 = \Gamma_1^1/k_1$  となり、上述の Schmidt の理論をはじめとする諸理論での式<sup>10),11)</sup>に一致することはいうまでもない。

次に Ambartsumyan 理論<sup>13)</sup>と同等の理論式に関しては式(23)の第3式の曲げ応力に関する変位一応力関係式を以下に示す式で書き換えることにより得られる。すなわち、奥行き方向に平面問題としての基礎関係式：

$$\tau_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} u_{,x} - \frac{\nu}{1-\nu} \tau_{zz} \quad (25)$$

に立ち帰り、 $\tau_{zz}$  を Ambartsumyan の仮定にしたがった慣性力項を考慮した式：

$$\tau_{zz} = -\frac{1}{2} p + b^2 \cdot S_1(\zeta) \cdot \tau_{zz}^{(1)} + bR_2(\zeta) \cdot \rho \ddot{w}_c \quad (26)$$

で表わし、表面の荷重条件より  $\tau_{zz} = bR_2(\zeta) \cdot \rho \ddot{w}_c$  が求まるが、これを代入した式の重みつき積分表示として最終的に次式を得る。

$$\tau_{xx}^{(1)} = \frac{E}{1-\nu^2} u_{,x}^{(1)} - \frac{\nu}{5(1-\nu)} b \rho \ddot{w}_c = 0 \quad (27)$$

上式を第3式として採用し、他の三つの式と連立させて解けば Ambartsumyan 理論の結果<sup>13)</sup>に到達する。

最後に、Baluch & Voyiadjis の理論<sup>14)</sup> (以下 B-V 理論と略記) と同レベルの理論の支配式が原式を次のように特殊化することによって得られる。

まず面外方向変位を B-V 理論に習って次のように仮定することによって曲げモーメントによる平板の厚さ方向直ひずみを考慮する。

$$w = w_c - \frac{\nu}{3E} b \tau_{xx}^{(1)} \quad (28)$$

上式より、式(23)の第2、4式の面外変位に関する項が、ここではそれぞれ、

$$w_0 = 2w_c - \frac{\nu}{3E} b \tau_{xx}^{(1)}, w^{(1)} = -w_c + \frac{\nu}{10E} b \tau_{xx}^{(1)} \quad (29)$$

なる式で与えられることになる。これらを用いて第2、4式を書き換え他の第1、3式と連立させて解くことにより、B-V 理論と同レベルの理論式が脚注\*に示したように得られる。ただしこの式はポアソン比に関する項において1点だけ B-V 理論<sup>14)</sup>のものとわずかに差異を生ずるものとなっている。

なお、本理論の支配式を静的な曲げ問題に限定し1次項 ( $n = 1$ ) のみを採用した場合は Reissner 理論<sup>2)</sup>に一致し、2次項 ( $n = 2$ ) まで採用した場合が古賀らの理論<sup>4)</sup>および Reissner の混合型理論<sup>3)</sup>に一致するこ

とは、著者らのノート<sup>1)</sup>ならびに本論文のまえがきで述べたとおりである。

#### 4. 数値計算例

前節でみたように、本定式化による結果の動的な1次理論は、従来までの代表的ないわゆるせん断変形や板厚方向直ひずみ、ならびに回転慣性を考慮した諸理論と同一でないし、ほぼ類似のものになることから、著者らの既発表論文での動的問題の例題における数値例の結果<sup>15)</sup>と前記の1次理論はほとんど同じ結果を与えることが推量される。なお2次理論以上の高次理論に対する動的問題への適用例については紙面の都合上、別途発表することにして、ここでは静的な例のみを取り上げることにする。この静的な場合でも一般的な傾向については著者らの一連の既発表論文<sup>15)</sup>の結果を参考にしてもらえば  $h/l$  が十分に小さい通常の薄板の場合にはその中の各種理論と同様の傾向を示すので、ここではある程度差異が顕著になる形状比のものをを用いて本理論の精度特性について検証する。

##### (A) 正弦波荷重を受ける周辺単純支持矩形板

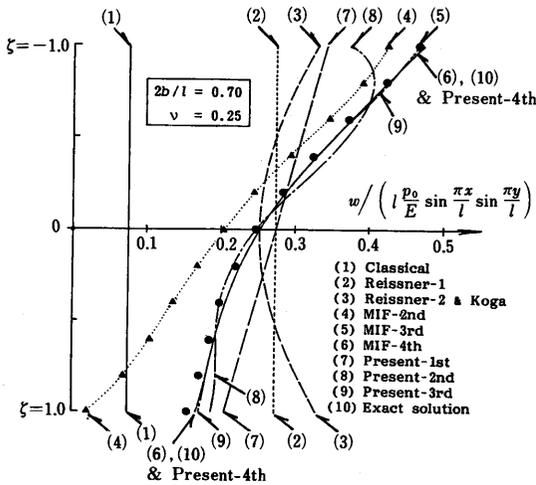
平板の中央 ( $x = y = l/2$ ) で最大値となり、境界線で零となるような半波長タイプの正弦波の鉛直静荷重が作用する単純支持の等方性正方形板 ( $l \times l \times 2b$ ,  $2b/l = 0.70$ ,  $\nu = 0.25$ ) の場合についての計算結果を示したものが Fig. 2 から Fig. 7 である。なお、この問題を取り上げた理由はそれぞれの平板理論に対し、解析解が求められるからである。

Fig. 2 は各種理論による面外変位  $w$  の板厚方向分布を示したものである。なおここに示す本理論による結果は1次理論では重みつき積分平均変位  $w^{(0)}$ ,  $w^{(1)}$  から直接求めた直線分布であり、2次以上の理論では前述のとおり面内変位 ( $u$  または  $v$ ) と面外せん断応力 ( $\tau_{xz}$  または  $\tau_{yz}$ ) の計算値から変位一応力関係式を介して計算したものである。本理論による計算結果についてみると理論の次数が上がりにしたがって精度が向上していることがわかる。まず、1次理論では中央面での値が Reissner<sup>2)</sup>での平均たわみに一致し、それに最低次の面外圧縮挙動を考慮したことによる上下逆対称な1次分布の面外変位が重ね合わされたものとなっ

\* この場合のたわみの運動方程式は次のようになる。

$$\frac{E}{1-\nu^2} b w_{c,xxxx} - \left\{ 1 + \frac{12}{5(1-\nu^2)} \right\} \rho b \ddot{w}_{c,xx} + \frac{3}{b} \rho \ddot{w}_c + \frac{6}{5G} b \rho^2 \ddot{w}_c = 0.$$

上式で点線で示した項は板厚方向直ひずみを考慮したことによる付加項である。B-V 理論<sup>14)</sup>ではこの項の分母の  $\nu^2$  が  $\nu$  になることに差異がある。



**Fig. 2** Distributions of transverse displacement  $w$  along the thickness of isotropic square plate with simply-supported edges ( $\nu = 0.25$ )

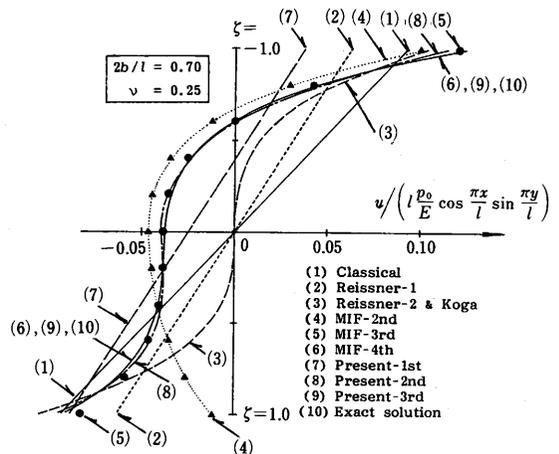
ており、その分だけ精度的な向上が見られる。

2次理論では、荷重載荷面である上表面付近で多少目立った差異を生ずる以外はほぼ厳密解のまわりに変動した分布形を示し、1次理論に比してかなり精度が向上していることがわかる。3次理論では上下表面付近で厳密解<sup>16)</sup>とわずかに異なった値を示す以外は厳密解と同一の線上にのり、4次理論では厚さ方向の全域にわたり厳密解と完全に一致した分布が得られている。なお後述の本理論による他の力学量の板厚方向分布はほぼ3次理論で厳密解に達しているが、ここでの面外方向変位は上述のとおり面内変位と面外せん断応力をもとに算出しているため、解には多少大きな誤差が含まれ、4次理論ではじめて厳密解に等しい値に行きついたものと思われる。

他方 Reissner 理論<sup>2)</sup>は上述のとおり本理論の1次理論の中央面位置での面外方向変位と同じ値の一定たわみを示し、また Reissner の混合型理論<sup>3)</sup>ならびに古賀らの理論<sup>4)</sup>による結果は、分布形がさらに高次化(4次分布)するものの、曲げ挙動のみに着目し伸縮挙動を無視しているため、やはり上下対称の分布形となってしまう、この計算例のように伸縮挙動が大きな比重を占める場合には根本的な精度改善をもたらす理論とはなり得ない\*ことがわかる。なおこれらの両理論においては、 $w$ の板厚方向分布に関して明確な記述がないため、ここではその重みつき積分平均から未定係数を逆算して得た分布形を示してある。また初期関数法<sup>17)</sup>(Method of Initial Function, 以下 MIF と略記)に

よる結果に関して見ると 2nd order ではじめて容認し得る解が(1st order では過大な誤差が生じる)、また、3rd order でかなり厳密解に近い値が、さらに 4th order で完全に厳密解に一致した分布が得られる。最後に古典理論による結果は板厚方向成分を完全に無視した理論であるためそれらがかなりの重要性をもつ本計算例の場合、中央面での面外方向変位の約 1/3 にあたる一定値しか与えない。

**Fig. 3** は同じく面内変位  $u$  の板厚方向分布を各種理論で計算した結果を示したものである。これらのうち本理論による結果は、1次理論での値が Reissner 理論での値(本理論の  $n = 1$  のみ採用に相当)に最低次( $n = 0$ )の面外伸縮挙動を重ね合わせたものであり、2次理論での値が Reissner の混合型理論および古賀の理論での値( $n = 1, 3$ に相当)に、低次の2項( $n = 0, 2$ )の伸縮挙動を併せ考慮したものである。これらは、いずれも面外伸縮挙動の考慮により精度が向上し、各次数の理論による値が厳密解を平均化した値、あるいは厳密解のまわりに変動する値を示すようになることがわかる。同時に理論の次数の増加にともない解析精度が向上し、2次理論でかなり厳密解に、3次理



**Fig. 3** Distributions of in-plane displacement  $u$  along the thickness of isotropic square plate with simply-supported edges ( $\nu = 0.25$ ).

\* ただし Reissner の設定した境界(荷重)条件は上下表面で  $p/2$  ずつ分割載荷された平板曲げの解析モデルに対応しているもので、伸縮挙動は生じないことになっている。これは本理論で1次と3次(曲げに関する低次の2項ずつ)の項のみを採用したものに一致するが、ここでは Fig. 1 に示すような上表面のみに一括載荷したモデルの解として同じ解を採用した場合の比較検討を試みたものである。

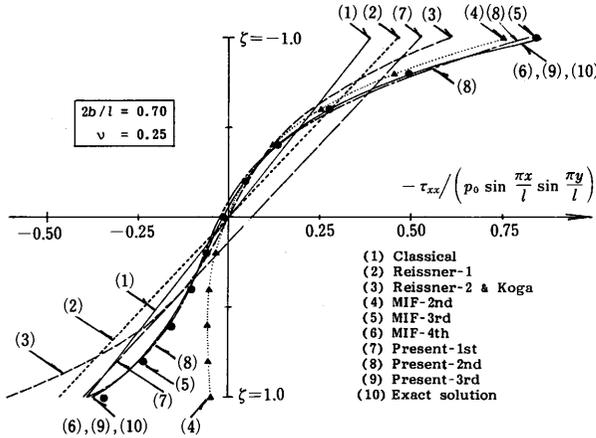


Fig. 4 Distributions of bending stress  $\tau_{xx}$  along the thickness of isotropic square plate with simply-supported edges ( $\nu = 0.25$ ).

論で厳密解と完全に一致した値が得られることがわかる。一方本理論と上述のような関係を有する Reissner 理論ならびに Reissner の混合型理論および古賀の理論での計算結果は、面内伸縮挙動を考慮できないために中央面で零をとる上下逆対称な分布となるために精度は低下し、高次化された後者の理論<sup>3),4)</sup>による場合でも特に中央面近くでの変位において大きな誤差を生じていることが指摘できる。また古典理論による結果は前に示した面外変位の解析精度ほどではないが法線保持の直線分布の仮定のためやはり精度の低いものとなっている。他方、MIF による結果は、板厚方向変位の場合と同様、2nd order ではじめて有意な解が得られ、3rd order でかなり厳密解に近い値を示し、4th order で完全に一致した値を与えることがわかる。なお MIF による解析はここに示す平板曲げの問題のように側端面での境界条件を完全に満足した解を仮定できる場合には、MIF のもつ上下表面での境界(荷重あるいは変位)条件を満足し 3次元弾性論の基礎式をすべて網羅しているという理論特性から理論式の次数を上げるにつれてすべての物理量が限りなく厳密解に近づくという性質を有するものであるが、ここでの数値結果はそれを裏づける典型的な例といえよう。

Fig. 4 は曲げ応力  $\tau_{xx}$  の板厚方向分布を示したものであるが、この曲げ応力の解析精度に関する各理論の特性は前述の面内変位  $u$  に関するものとはほぼ同等であるため、ここでの詳述は省略するが、Reissner 理論<sup>2)</sup>による値ならびに Reissner の混合型理論<sup>3)</sup>および古賀の理論<sup>4)</sup>による値が、いずれも上表面近くで過小な値を示し、下表面近くで過大な値を示している。また、理論のレベルが上昇するにつれ上表面位置において古

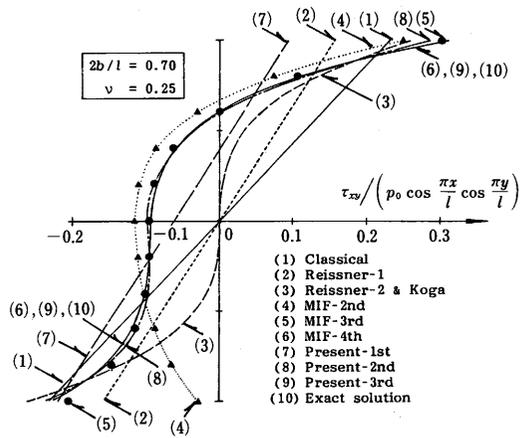


Fig. 5 Distributions of in-plane shear stress  $\tau_{xy}$  along the thickness of isotropic square plate with simply-supported edges ( $\nu = 0.25$ ).

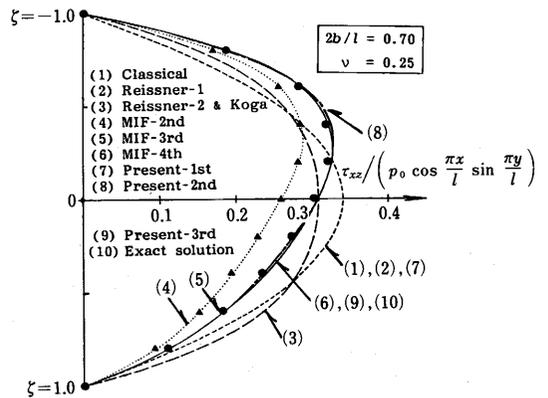


Fig. 6 Distributions of out-of-plane shear stress  $\tau_{xz}$  along the thickness of isotropic square plate with simply-supported edges ( $\nu = 0.25$ ).

典理論から厳密解まで順次大きな負の最大曲げ応力を示しており、この順番がおおむね、この問題に関して全般的な解析精度の低い方から高い方への順位をそのまま表わしていると言っても過言ではない。さらに本理論は 3 次理論で、MIF は 4th order でそれぞれ厳密解と全域にわたって一致した解を与えるようになる。

Fig. 5 は面内せん断応力  $\tau_{xy}$  の板厚方向分布の計算結果を示したもので、この値は変位-応力関係式  $\tau_{xy} = G(u_{,y} + v_{,x})$  より算出されるものであるため、今の問題の場合には本質的に面内変位成分の板厚方向分布と全く同等となる。したがってこの図は Fig. 3 の  $u$  と全く同等で横座標値のみ変わるだけである。

Fig. 6 は面外せん断応力  $\tau_{xz}$  の板厚方向分布の計算

結果を示したもので、ここに示すすべての理論とも上下表面での境界（荷重）条件を満足する理論であるため、各理論とも上下表面での自由境界の条件は満たされている。厳密解は荷重側面にピークを持つ上下非対称な分布を示すが、この性状を近似し得るのは横荷重による板の伸縮挙動を考慮した本理論ならびにMIFの高次理論のみである。本理論による計算値は1次理論ではReissner理論（1次理論）での上下対称2次放物線分布と一致するものであるが、2次理論になると厳密解のまわりになぜか変動する値を示すようになり、3次理論で完全に厳密解に一致した値を与えることがわかる。一方、MIFによる値は2nd orderでは定性的には厳密な分布形に近いが数値的に7/8程度と過小値を与える。しかし3rd orderではやはり小さめながらもかなり厳密解に近い値を示し、4th orderで完全に厳密解に一致する。なおReissnerの混合型理論（2次理論）および古賀の理論での値は、中央面における値が厳密な解に近づく以外は目立った改良点は見当たらず、やはり上下対称分布成分のみ採用した場合の限界を示していると言えよう。なお古典理論<sup>1)</sup>の値としては2次放物線分布を示したが、これは直線分布の面内直応力とのつり合いから求められた応力であり、これによるせん断変形は無視（後述の面外直応力についても同様）していることは言うまでもない。

Fig. 7は面外直応力 $\tau_{zz}$ の板厚方向分布の計算結果を比較したものである。ここにおいても前述の面外せん断応力と同様の傾向が指摘でき、すべての理論とも上下表面の境界（荷重）条件を満たした解を与えている。本理論の1次理論とReissner理論<sup>2)</sup>（1次理論）および古典理論が中央面で荷重の1/2の強度を示す3次分布を与えており、Reissnerの混合型理論<sup>3)</sup>（2次理論）および古賀の理論<sup>4)</sup>がやはり中央面で $-p/2$ を示す5次分布を与えている。これに対し厳密な分布はやや小さめな値となっており、ここでも本理論による値は2次理論でほぼ厳密解に等しい値となり、3次理論で完全に一致している。また、MIFによる値も2nd orderでは下表面付近を中心にかなり過大な値を与えているが、3rd orderで飛躍的に厳密解に近づき4th orderで完全に一致している。

以上に示したとおり、本混合仮定型理論による結果は、いずれも理論の次数が高くなるにしたがって厳密解に近づき、3次理論（ $n = 0 \sim 5$ ）でほぼ厳密解に一致した解が得られることがわかる。

この傾向より、本理論は著者らの変位仮定型の一般化高次理論<sup>15)</sup>で同次数の変位係数を採用した理論と同程度の精度を有する理論であるといえる。なお、図

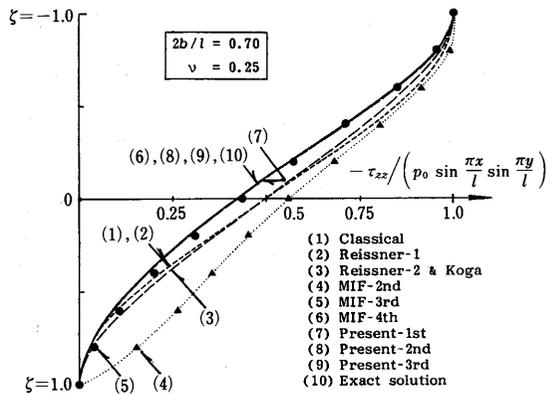


Fig. 7 Distributions of out-of-plane normal stress  $\tau_{zz}$  along the thickness of isotropic square plate with simply-supported edges ( $\nu=0.25$ ).

中に示したReissner理論、ならびにReissnerの混合型理論および古賀の理論は面内伸縮挙動を考慮していないため、この例のように伸縮挙動がかなりの比重を占める問題にそのまま適用するには無理なことがわかる。

(B) 面内等方性平板の単純ねじり

次にFig. 8に示すような横等方性矩形板の両端に角度 $\theta$ なる回転変位を与えた単純ねじり問題を各次数の理論で解析した結果および変位仮定型の一般化高次理論の変位成分に関してのおおの対応する次数の理論で計算した結果とともに示したものが、Fig. 9からFig. 12である。これらの図のパラメータ $C$ は $C = \frac{a}{2b} \sqrt{G_z/G}$ （ここに、 $G, G_z$ はそれぞれ平板面内、面外のせん断弾性係数を表わす）と置いた平板の幾何形状と材料性質を融合させたパラメータであり、 $C$ が大きいほど古典的な平板モデルに近づき、 $C$ が小さいほどそれからはなれる平板となることを示している。

まずFig. 9は板の上下表面中央で生ずる最大面内

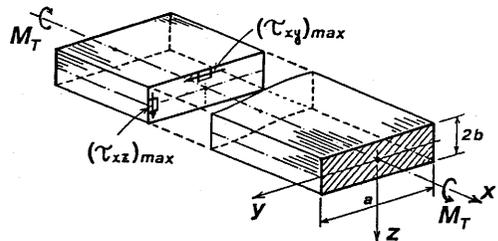


Fig. 8 Coordinates and plate shape with simple torsion at the ends of transversely isotropic rectangular plate.

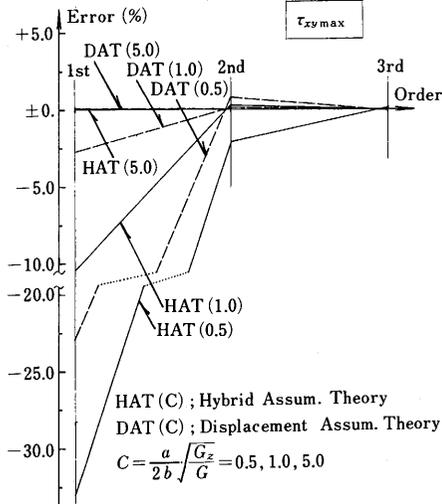


Fig. 9 Error percentages of  $(\tau_{xy})_{max}$  according to various theories under the case shown in Fig. 8.

せん断応力  $(\tau_{xy})_{max}$  を各次数の理論により計算し、それらの厳密解に対する誤差(%)を  $C$  の3ケースについて求めたものである。図では誤差率を表わし、離散した点を折れ線で結ぶことにより理論の次数の増加に伴う精度の推移を示したものである。この図より全般的には変位仮定型理論<sup>15)</sup>の方がここでの混合仮定型理論より精度がよく、ともに理論の次数が上がると共に急速に厳密解に近づいてゆくことがわかる。その様子を  $C$  の各値ごとに見ると、 $C = 0.5$  では1次理論で23%、および33%とかなり大きな誤差を生じ、3次理論でもわずかながら誤差を生ずる。また  $C = 1.0$  では1次理論での誤差は2.7%および10.4%とやはり大きい、2次理論でかなり厳密解に近づき、3次理論ではほぼ厳密解に一致した値を示す。他方  $C = 5.0$  では1次理論でもほぼ厳密解に等しい値を両方の理論とも与えており、 $C$  が大きい場合は低次理論でも良好な精度の解が得られるが、 $C$  が小さくなるに従って高次理論による解析が必要になってくるのがわかる。

Fig. 10 は側端面中央位置で生ずる最大面外せん断応力  $(\tau_{xz})_{max}$  の解析精度の比較を示している。全般に上下表面で境界(荷重)条件を満足させた混合仮定型理論の方がそれを無視した変位仮定型理論より高精度の解を与えている。ここでも理論の次数の増加に伴い両理論とも、より精度の良い解を与えるようになるが、解の厳密解への収束性は前掲の面内せん断応力  $(\tau_{xy})_{max}$  よりも鈍く、 $C = 5.0$  の場合でも3次理論において多少(0.4~0.6%程度)の誤差を生じている。またやはり  $C$  が大きくなるほど両理論とも解析精度が高

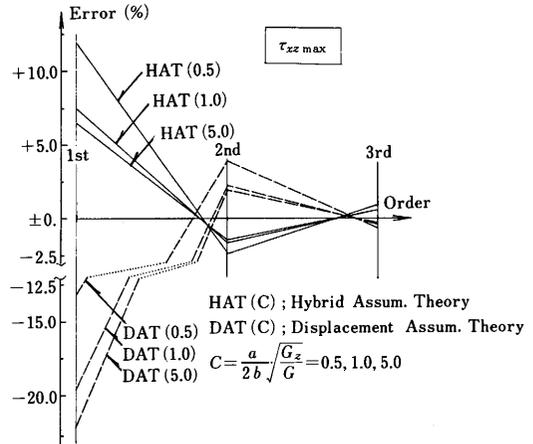


Fig. 10 Error percentages of  $(\tau_{xz})_{max}$  according to various theories under the case shown in Fig. 8.

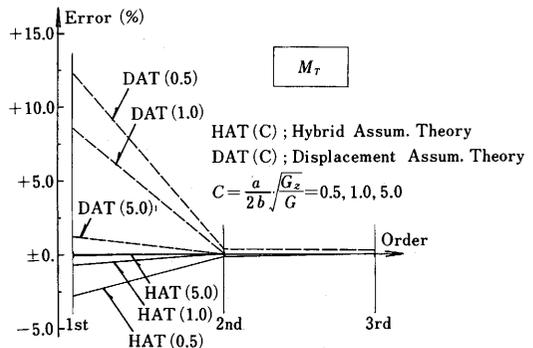


Fig. 11 Error percentages of torsional moment  $M_T$  according to various theories under the case shown in Fig. 8.

くなっているが、 $C$  の値による差についても  $(\tau_{xy})_{max}$  におけるほど顕著な相違は見られない。

Fig. 11 はねじり角  $\theta$  に対応したねじりモーメント  $M_T$  を次式：

$$M_T = \iint (\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y) dydz. \quad (30)$$

に基づいて計算した結果についての比較である。全般に前述の応力に比べ精度は高いものとなっており、 $C = 5.0$  と  $1.0$  の場合は2次理論で両理論ともほぼ厳密解に収束している。他方  $C = 0.5$  では混合仮定型理論が3次理論で厳密解に到達しているが、変位仮定型理論では2次、3次ともほぼ同じ値で多少の誤差(+0.35%)を生じていることがわかる。また全体的に混合仮定型理論の方が変位仮定型理論より高精度の結果を与えている。

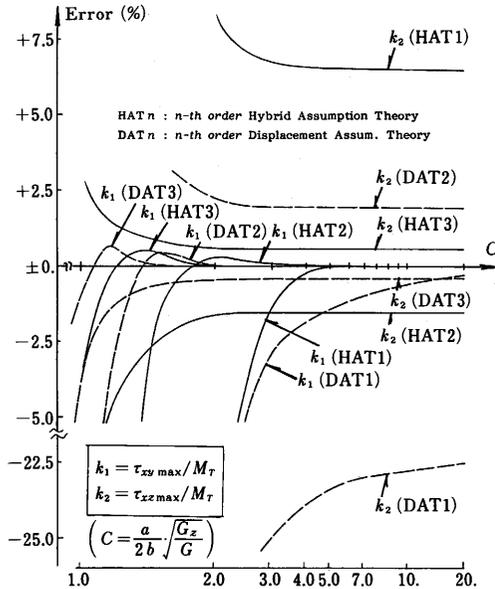


Fig. 12 Error percentages of parameters  $k_1$  and  $k_2$  according to various theories under the case shown in Fig. 8.

Fig. 12 は本計算例における面内および、面外のせん断応力とねじりモーメントからそれぞれ  $k_1 = \frac{(\tau_{xy})_{max}}{M_T}$ ,  $k_2 = \frac{(\tau_{xz})_{max}}{M_T}$  なる二つのパラメータを求め、これらの値を通じ混合仮定ならびに変位仮定の各次数の理論の解析精度特性を  $C$  の値の変化に応じて示したものである。まず、 $k_1$  についてみると  $C$  の値が大きくなると急速に厳密解に近い値が得られるようになり、変位仮定の1次理論が  $C = 20.0$  でもまだ多少の誤差 ( $-0.3\%$ 程度)を生ずる以外は各理論とも  $C = 1.5 \sim 7.0$  以上の場合には厳密解に等しい値を与える。なお、高次理論においては変位仮定型の方が混合仮定型より精度よい結果を与えている。一方、 $k_2$  についての結果はここに示す1次から3次までの各理論とも  $C$  が  $1.5 \sim 3.0$  程度の値より大きくなると厳密解に行きつかないうちに、各理論次数に応じたある一定値に収束してしまう傾向をもつ。なお、混合型理論と変位仮定型理論の比較では変位仮定型の1次理論が面外せん断応力の一様分布仮定の結果、20%以上の誤差をとまうことになり、混合仮定型の1次およびその他の理論に比して著しく精度の低い値を示す以外は、両理論で同次数の理論同士はほぼ同程度の精度の値を与えつつ、前述の  $k_1$  同様、次数の増大につれてより高精度の解を与えるようになる。

以上、面内等方性矩形板の単純ねじり問題について

本混合仮定型理論による結果を変位仮定型の一般化高次理論による結果と比較しつつ高次近似理論の精度特性に関して考察を行なったが、ここに示した例は問題の性質上、面内成分に関しては上下逆対称で、面外成分に関しては上下対称な項のみから各力学量が形成され、面内伸縮挙動は含まれないことから、ここで示した混合仮定型理論の1次理論はReissner理論<sup>2)</sup>に、2次理論はReissnerの混合型理論<sup>3)</sup>および古賀の理論<sup>4)</sup>に完全に一致することは言うまでもない。なお、変位仮定型の1次理論にせん断補正係数  $\chi^2 = 5/6$  を導入した形で計算を行なうと混合仮定型の1次理論と全く同じ支配式が得られ、ここに示した面外せん断応力の分布形の2次放物線分布を一様分布で置きかえたもの(したがって  $(\tau_{xz})_{max}$  は  $2/3$  になる)で与えられる以外は全く同様の解が得られることを付記しておこう。

5. むすび

線形動弾性学の混合型変分原理を用いて、平板の上下表面での境界(荷重)条件を完全に満足する混合型の一般的な2次元化平板理論を等質の横等方性平板に対して誘導した。

ここで定式化した理論を特殊化すればごく最近のものを含めて従来までに提案された静的ならびに動的な平板理論式が得られることを示すとともに、静的な例に限定して数値計算例を実施して本理論の低次項採用によって得られる1次~4次のorderの理論結果と弾性厳密解との比較を行ない、その精度特性を詳細に検証した。取り上げた数値例に対し、他の理論結果(初期関数法による平板理論<sup>17)</sup>、著者らの変位仮定に基づく一般化平板理論等<sup>15)</sup>についても精度比較がなされ、本理論の採用項数を増やしてゆけば極めて高い精度のものが得られることが判明した。

本理論は静的、動的な場合を含めて変位仮定型の一般化高次理論と対となるものであり、ここに、それらの基本的な特徴、差異等を数値例を通してある程度明らかにすることができたが、今後とも、動的な場合も含めより多くの例に適用して検証する必要がある。

付録A. 板厚方向の分布関数  $P_n(\xi)$ ,  $R_n(\xi)$  および  $S_n(\xi)$

本文の式(5)および(6)で定義された関数  $P_n(\xi)$ ,  $R_n(\xi)$  および  $S_n(\xi)$  の板厚方向の分布形を、基準化した板厚座標  $\xi = z/b = 2z/h$  を用いて  $n = 0 \sim 5$  までのものについて図示したものが Fig. A.1 である。 $P_n(\xi)$  は  $n$  次の Legendre 多項式であり、 $R_n(\xi)$ ,  $S_n(\xi)$  はこれを

それぞれ1回および2回積分して求めた関数である。

### 付録B. 記号 $\Gamma_m^n$ , $\bar{\Gamma}_m^n$ および $\Lambda_m^n$ の値

本文の式(10)および(12)で定義した表記の記号に対し、整数  $n, m$  の小さな値をとる場合の分について具体的に示したものが **Table B.1~B.3** である。もちろん、これ以外の  $n, m$  の場合については式(10), (12)から容易に計算できる。

### 付録C. 混合型の Hamilton 原理の式

$$\begin{aligned}
 & \delta \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V (\tau_{ij,j} + \bar{f}_i - \rho \ddot{u}_i) \cdot \lambda_i dV \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_A b \left[ \sum_{n=0}^{\infty} k_n [(\tau_{xx,x}^{(n)} + \tau_{xy,y}^{(n)} + \tau_{xz}^{(n)} \right. \\
 & \quad + \bar{f}_x^{(n)} - \rho \ddot{u}^{(n)}) \cdot \delta \lambda_x^{(n)} + (\tau_{xy,x}^{(n)} + \tau_{yy,y}^{(n)} + \tau_{yz}^{(n)} \\
 & \quad + \bar{f}_y^{(n)} - \rho \ddot{u}^{(n)}) \cdot \delta \lambda_y^{(n)} + b \left\{ \frac{b}{k_n} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{xz,x}^{(m)} + \tau_{yz,y}^{(m)} \right. \\
 & \quad + \tau_{zz}^{(m)}) + \bar{f}_z^{(n)} - \rho \ddot{u}^{(n)} \left. \right\} \cdot \delta \lambda_z^{(n)} - k_n \{ \lambda_{x,x}^{(n)} \cdot \delta \tau_{xx}^{(n)} \\
 & \quad + \lambda_{x,y}^{(n)} \cdot \delta \tau_{xy}^{(n)} - (1 - \delta_{n0}) \lambda_x^{(n)} \cdot \delta \tau_{xz}^{(n)} + \rho \dot{\lambda}_x^{(n)} \cdot \delta u^{(n)} \} \\
 & \quad - k_n \{ \lambda_{y,x}^{(n)} \delta \tau_{xy}^{(n)} + \lambda_{y,y}^{(n)} \delta \tau_{yy}^{(n)} \\
 & \quad - (1 - \delta_{n0}) \lambda_y^{(n)} \cdot \delta \tau_{yz}^{(n)} + \rho \dot{\lambda}_y^{(n)} \delta v^{(n)} \} \\
 & \quad - b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \{ (1 - \delta_{n0}) (\lambda_{z,x}^{(m)} \cdot \delta \tau_{xz}^{(n)} + \lambda_{z,y}^{(m)} \cdot \delta \tau_{yz}^{(n)}) \\
 & \quad - (1 - \delta_{n1}) \lambda_z^{(m)} \cdot \delta \tau_{zz}^{(n)} \} + k_n b \rho \dot{\lambda}_z^{(n)} \cdot \delta w^{(n)} \\
 & \quad + \left[ \left\{ -\frac{2b}{3} (\tau_{xz,x}^{(1)} + \tau_{yz,y}^{(1)} + \tau_{zz}^{(1)}) + \bar{f}_0 - \rho \ddot{u}_0 \right\} \delta \lambda_0 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{2b}{3} (\lambda_{0,x} \cdot \delta \tau_{xz}^{(1)} + \lambda_{0,y} \cdot \delta \tau_{yz}^{(1)}) - \rho \dot{\lambda}_0 \cdot \delta w_0 \right] dx dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{t_0}^{t_1} dt \oint_C b \left[ \sum_{n=0}^{\infty} [k_n \lambda_x^{(n)} (\mu_x \cdot \delta \tau_{xx}^{(n)} \right. \\
 & \quad + \mu_y \cdot \delta \tau_{xy}^{(n)}) + k_n \lambda_y^{(n)} (\mu_x \cdot \delta \tau_{xy}^{(n)} + \mu_y \cdot \delta \tau_{yy}^{(n)}) \\
 & \quad + (1 - \delta_{n0}) b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \cdot \lambda_z^{(m)} (\mu_x \cdot \delta \tau_{xz}^{(n)} + \mu_y \cdot \delta \tau_{yz}^{(n)}) \\
 & \quad \left. - \frac{2b}{3} (\mu_x \lambda_0 \cdot \delta \tau_{xz}^{(1)} + \mu_y \lambda_0 \cdot \delta \tau_{yz}^{(1)}) \right] ds. \quad (C.1)
 \end{aligned}$$

$\delta L_C$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_A b \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{k_n}{E} (\tau_{xx}^{(n)} - \nu \tau_{yy}^{(n)}) + \frac{\nu z}{E_z} (p \delta_{n0} \right. \right. \right. \\
 & \quad + b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)} - k_n \lambda_{x,x}^{(n)} \} \delta \tau_{xx}^{(n)} + \left\{ \frac{k_n}{E} (\tau_{yy}^{(n)} - \nu \tau_{xx}^{(n)}) \right. \\
 & \quad + \frac{\nu z}{E_z} (p \delta_{n0} + b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n \tau_{zz}^{(m)}) - k_n \lambda_{y,y}^{(n)} \} \delta \tau_{yy}^{(n)} \\
 & \quad - \frac{b^2}{E_z} (1 - \delta_{n1}) \left[ -p \left( \frac{1}{3} \delta_{n0} - \frac{1}{15} \delta_{n2} \right) \right. \\
 & \quad \left. - \sum_{m=0}^{\infty} \{ \nu z \Gamma_m^n (\tau_{xx}^{(m)} + \tau_{yy}^{(m)}) - b^2 \Lambda_m^n \tau_{zz}^{(m)} \right. \\
 & \quad \left. + E_z \Gamma_m^n \lambda_z^{(m)} \right] \delta \tau_{zz}^{(n)} + \left\{ \frac{k_n}{G} \tau_{xy}^{(n)} - k_n (\lambda_{x,y}^{(n)} \right. \\
 & \quad + \lambda_{y,x}^{(n)}) \delta \tau_{xy}^{(n)} + (1 - \delta_{n0}) \left\{ \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (K_G \tau_{xz}^{(m)} \right. \\
 & \quad \left. - G \lambda_{z,x}^{(m)}) + k_n (\lambda_x^{(n)} + b \delta_{n1} \lambda_{0,x}) \right\} \delta \tau_{xz}^{(n)} \\
 & \quad + (1 - \delta_{n0}) \left\{ \frac{b^2}{G} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (K_G \tau_{yz}^{(m)} - G \lambda_{z,y}^{(m)}) + k_n (\lambda_y^{(n)} \right. \\
 & \quad \left. + b \delta_{n1} \lambda_{0,y}) \right\} \delta \tau_{yz}^{(n)} + k_n (\tau_{xx}^{(n)} + \tau_{yy}^{(n)} + \tau_{zz}^{(n)} + \bar{f}_x^{(n)} \\
 & \quad - \rho \ddot{u}^{(n)}) \delta \lambda_x + k_n (\tau_{xy}^{(n)} + \tau_{yx}^{(n)} + \tau_{zz}^{(n)} + \bar{f}_y^{(n)} \\
 & \quad - \rho \ddot{v}^{(n)}) \delta \lambda_y + b k_n \left\{ \frac{b}{k_n} \sum_{m=0}^{\infty} \Gamma_m^n (\tau_{xz,x}^{(m)} + \tau_{yz,y}^{(m)} \right.
 \end{aligned}$$

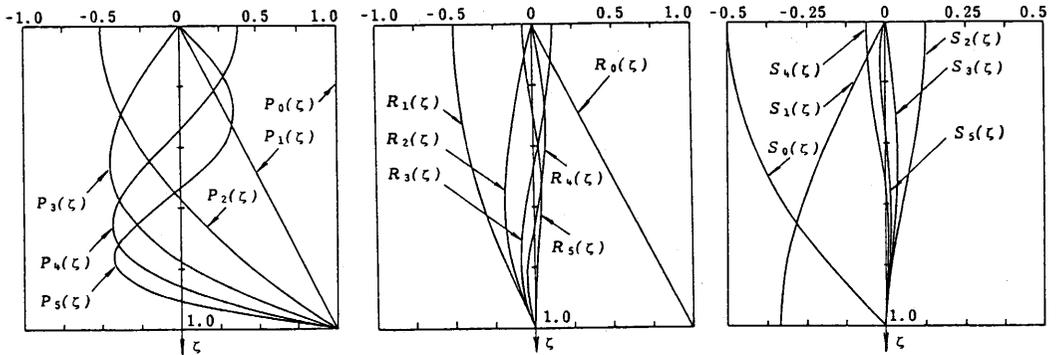


Fig. A.1 Distributions along the thickness of functions  $P_n(\zeta)$ ,  $R_n(\zeta)$  and  $S_n(\zeta)$ .

**Table B.1** Some numerical values of  $I^n_m$  for arbitrary small integers  $m$  and  $n$ .

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6
0	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{15}$				
1	0	$\frac{4}{15}$	0	$-\frac{2}{105}$			0
2	$-\frac{2}{15}$	0	$\frac{4}{105}$	0	$-\frac{2}{315}$		
3		$-\frac{2}{105}$	0	$\frac{4}{315}$	0	$-\frac{2}{693}$	
4	0		$-\frac{2}{315}$	0	$\frac{4}{693}$	0	$-\frac{2}{1287}$

**Table B.2** Some numerical values of  $\tilde{I}^n_m$  for arbitrary small integers  $m$  and  $n$ .

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5
0	0	$-\frac{2}{3}$				
1	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{2}{15}$			0
2		$\frac{2}{15}$	0	$-\frac{2}{35}$		
3			$\frac{2}{35}$	0	$-\frac{2}{63}$	
4	0			$\frac{2}{63}$	0	$-\frac{2}{99}$

**Table B.3** Some numerical values of  $A^n_m$  for arbitrary small integers  $m$  and  $n$ .

$n \backslash m$	0	1	2	3	4
0	$\frac{4}{15}$	0	$-\frac{2}{35}$	0	$\frac{2}{945}$
1		$\frac{34}{315}$	0	$-\frac{8}{945}$	0
2			$\frac{32}{945}$	0	$-\frac{8}{10395}$
3				$\frac{12}{10395}$	0
4		(Sym.)			$\frac{4}{15015}$

$$+ \tau_{zz}^{(m)} + \bar{f}_z^{(n)} - \rho \dot{w}^{(n)} \delta \lambda_z^{(n)} \Big] + \left\{ -\frac{2b}{3} (\tau_{xz,x}^{(1)} \right.$$

$$+ \tau_{yz,y}^{(1)} + \tau_{zz}^{(1)} + \bar{f}_0 - \rho \dot{w}_0) \delta \lambda_0 + \rho k_n \{ (\dot{u}^{(n)} - \dot{\lambda}_x^{(n)}) \delta u^{(n)} + (\dot{v}^{(n)} - \dot{\lambda}_y^{(n)}) \delta v^{(n)} + b (\dot{w}^{(n)} - \dot{\lambda}_z^{(n)}) \delta w^{(n)} \} + \rho (\bar{w}_0 - \bar{\lambda}_0) \delta w_0 \Big] dx dy + \int_{t_0}^{t_1} dt \oint_c b \sum_{n=0}^{\infty} k_n \{ (u_n^{(n)} - \bar{u}_n^{(n)}) \delta \tau_{nn}^{(n)} + (u_s^{(n)} - \bar{u}_s^{(n)}) \delta \tau_{ns}^{(n)} + (1 - \delta_{n1}) b (w^{(n)} - \bar{w}^{(n)}) \delta \tau_{nz}^{(n)} \}_{su} + \{ (\tau_{nn}^{(n)} - \bar{\tau}_{nn}^{(n)}) \delta u_n^{(n)} + (\tau_{ns}^{(n)} - \bar{\tau}_{ns}^{(n)}) \delta u_s^{(n)} + b (\tau_{nz}^{(n)} - \bar{\tau}_{nz}^{(n)}) \delta w^{(n)} \}_{s\sigma} \Big] ds. \tag{C.2}$$

参考文献

- 1) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文集，No. 350, pp. 351-354, 1984
- 2) Reissner, E.: J. Appl. Mech., Vol. 12, pp. A69-A77, 1945
- 3) Reissner, E.: ZAMM, Vol. 63, pp. 285-289, 1983
- 4) 古賀達蔵：機械学会論文集 (A編)，Vol. 48, No. 433, pp. 1151-1159, 1982
- 5) Reissner, E.: Int. J. Solids Struct., Vol. 11, pp. 569-573, 1975
- 6) Reissner, E.: Int. J. Solids Struct., Vol. 12, pp. 545-554, 1976
- 7) Toupin, R.A.: J. Appl. Mech., Vol. 19, pp. 151-152, 1952
- 8) Crandall, S.H.: Proc. Int. Cong. Appl. Mech., pp. 80-87, 1957
- 9) Rao, J.S. et al: J. Appl. Mech., Vol. 48, pp. 672-673, 1981
- 10) Schmidt, R.: J. Indust. Math., Vol. 27, pp. 23-38, 1977
- 11) Levinson, A.: Mech. Res. Commun. Vol. 7, pp. 343-350, 1980
- 12) Mindlin, R.D.: J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, 1951
- 13) Ambartsumyan, S.A. (神谷訳)：「異方弾性板の理論」(森北出版)，1975
- 14) Voyiadjis, G.Z. & Baluch, M.H.: J. Sound Vib., Vol. 76, pp. 57-64, 1981
- 15) 平島健一・根岸嘉和：土木学会論文報告集，No. 330, pp. 1-14, 1983, No. 333, pp. 21-34, 1983; No. 341, pp. 163-172, 1984
- 16) Pagano, N.J.: J. Comp. Mat., Vol. 4, pp. 20-34, 1970
- 17) Vlasov, V.Z.: Proc. 9th Int. Cong. Appl. Mech., Vol. 6, pp. 321-330, 1956
- 18) Lechnitskii, S.G.: Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, (Eng. Trans.), Holden-Day, pp. 283-298, 1963