

多孔材料中の毛管浸透流に関する 基礎的研究

宮 沢 直 季*
荻 原 能 男*

(昭和59年 8 月30日受理)

Basic Study on Capillary Osmotic Flow in Porous Media

by Naoki MIYAZAWA* and Yoshio OGIHARA*

Abstract

Coefficient of permeability and capillary constant have been used as indices for evaluating permeability of porous media such as concrete or sand. But, one of the indices, capillary constant have less physical meaning. In this paper, the authors therefore propose two new physical parameters, "final osmotic height" and "average osmotic velocity", based on the capillary flow theory instead of the indices mentioned above. At first, applicability of the theory to sand layer is examined. In the next, a method of determination of the parameters from permeability test of porous media is shown. At last, physical characteristics of the parameters obtained are discussed.

1. はじめに

従来、コンクリートなどの多孔体では浸透性に関して透水係数とキャピラリ一定数をその品質の良否を定める目安としている。ところが、キャピラリ一定数は流体との接触角、多孔体の粒径などの直接測定に困難な物性と関係しており、特にコンクリートなどでは物理的意味付けが明確でないことから、著者らは多孔体中の毛管浸透流の理論より、キャピラリ一定数に替える新しい物性値として最終浸透高を提案している。また、最終浸透高 ZE の $1/2$ の高さを通過する時の速度を平均浸透速度と定義すると、これが透水係数と同じ値になることを指摘した¹⁾。

本論文では、上記の提案を実用に供するものとするために、砂の基礎的実験資料²⁾から物性値を決定する方法を提案し、さらに求めた物性値の値についても検討する。

2. 記 号

本論文で用いた主な記号を以下に示す。

T : 表面張力 (gf/cm)
 α : 接触角

d : 管内径 (cm)
 z : 浸透長あるいは浸透高 (cm)
 z_0 : 水中に入った管の部分の長さ (cm)
 ρ : 水の密度 (gf·sec²/cm⁴)
 μ : 水の粘性係数 (gf·sec/cm²)
 $U = dz/dt$: 浸透速度 (cm/sec)
 ZE : 毛細管モデルにおける最終浸透高 (cm)
 d_p : 多孔材料の粒子の直径 (cm)
 ν : 水の動粘性係数 (cm²/sec)
 h_s : 多孔材料における平均飽和域高さ (cm)
 ξ : 無次元浸透長
 θ : 無次元浸透時間
 V_0 : 平均浸透速度 (cm/sec)
 t_0 : 代表浸透時間 (sec)
 $\eta = d\xi/d\theta$: 無次元浸透速度

3. 理 論

3.1 多孔材料中の毛管浸透流に関する基礎方程式

多孔材料中の毛管浸透流の解析モデルを図-1 に示すような鉛直上向き方向に立てた毛細管内の1次元流れと考える。この毛管水に関する運動方程式は、層流流れであることを考慮して次式で与えられる¹⁾。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + A \frac{dz}{dt} + (gz - B) \frac{1}{z + z_0} = 0 \quad (1)$$

* 土木工学科, Department of Civil Engineering

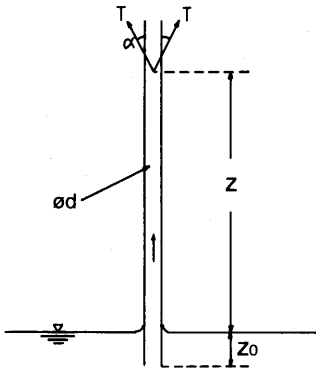


図-1 一様断面毛細管モデル

ただし、 $A = \frac{32\nu}{d^2}$, $B = \frac{4T \cos \alpha}{\rho d}$

そこで、慣性項 d^2z/dt^2 を無視すると上式は

$$A \frac{dz}{dt} + (gz - B) \frac{1}{z + z_0} = 0 \tag{2}$$

となり、無次元化を行うと

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1 - \xi}{\xi + \xi_0} \tag{3}$$

と簡単な形となる。ただし、おのおのの無次元量は $\xi = z \cdot \frac{g}{B}$, $\theta = t \cdot \frac{g^2}{AB}$, $\xi_0 = z_0 \cdot \frac{g}{B}$ である。式(3)を積分し初期条件として $\theta = 0$ のとき $\xi = 0$ ($t = 0$ のとき $z = 0$ に相当) を使うと次式を得る。

$$\theta = -\{\xi + (1 + \xi_0) \ln|1 - \xi|\} \tag{4}$$

ここでは、式(4)に示した無次元量 ξ , θ をそれぞれ無次元浸透長、無次元浸透時間と呼ぶことにする。

さて、本解析モデルにおいて、水柱が最高に上昇して安定した高さを最終浸透高 ZE と呼ぶと、 ZE は次式で与えられる。

$$ZE = \frac{B}{g} = \frac{4T \cos \alpha}{\rho g d} \tag{5}$$

また、式(2)において $z_0 = 0$ として $z = \frac{ZE}{2}$ における水柱の上昇速度を V_0 とすると、

$$V_0 = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{z=\frac{ZE}{2}} = \left\{ \frac{1}{A} (B - gz) / z \right\}_{z=\frac{ZE}{2}} = \frac{g}{A} \tag{6}$$

となり、これを平均浸透速度と呼ぶ。最終浸透高 ZE を平均浸透速度 V_0 で上昇する時間 t_0 は、

$$t_0 = \frac{ZE}{V_0} = \frac{AB}{g^2} \tag{7}$$

となり、これを代表浸透時間と呼ぶ。したがって、各無次元量は上述の物性値(最終浸透高 ZE , 代表浸透時間 t_0)を用いると、 $\xi = z/ZE$, $\theta = t/t_0$, $\xi_0 = z_0/ZE$

となる。以上より慣性項を無視した鉛直上向き浸透流の無次元表示の解は式(4)で表わされ、最終浸透高 ZE , 代表浸透時間 t_0 等の物性値を含んでいる。

また、図-1の毛細管が水平の場合には運動方程式およびその解は次式で与えられる。

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + A \frac{dZ}{dt} - B \cdot \frac{1}{z + z_0} = 0 \tag{8}$$

$$\theta = \frac{\xi^2}{2} + \xi_0 \xi \tag{9}$$

同様に、毛細管の上端から鉛直下方に向かって水が流れる場合には次式で与えられる。

$$\frac{d^2z}{dt^2} + A \frac{dz}{dt} - (gz + B) \frac{1}{z + z_0} = 0 \tag{10}$$

$$\theta = \xi - (1 - \xi_0) \ln(1 + \xi) \tag{11}$$

図-2は $\xi_0 = 0$ としたときの鉛直上向き浸透、水平浸透、鉛直下向き浸透について無次元浸透長 ξ と無次元浸透時間 θ の関係を図示したものである。浸透の向きによって浸透長に相当の差が生じてくるのがわかる。

3.2 最終浸透高 ZE とキャピラリー一定数 K_c の関係

3.1で誘導した毛管浸透流モデルにおける最終浸透高 ZE が多孔材料中の浸透流に関する従来の物性値(キャピラリー一定数 K_c) とどのように対応するかについて述べる。コンクリート等の多孔材料中の毛管浸透流に対しては、従来土砂や粉体中の毛管浸透流に用いるキャピラリー一定数 K_c を用いていた。キャピラリー一定数 K_c の定義式は、

$$K_c = \frac{\rho g d_p h_s}{T \cos \alpha} \tag{12}$$

であり、この場合の表面張力によって生じる推進力は、

$$\Delta p = K_c \frac{T \cos \alpha}{d_p} \tag{13}$$

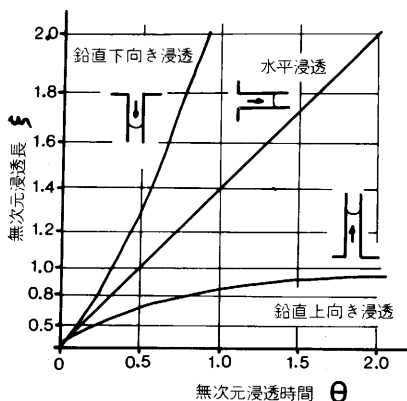


図-2 無次元浸透長と無次元浸透時間の関係

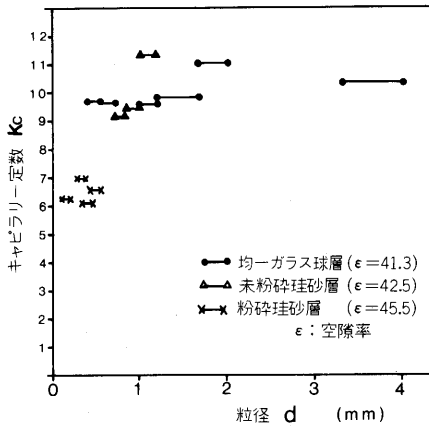


図-3 各粒子層のキャピラリー定数³⁾

である。図-3に各種の粒子層における粒径に対するキャピラリー定数 K_c の実験値を示す³⁾。このように K_c の値は粒径によって変化し、ほぼ6~12である。また、毛細管モデルにおける最終浸透高 ZE (式(5))と多孔材料における平均飽和域高さ h_s (式(12))を比較すると次式のような対応関係が得られる。ただし、表面張力 T と粒子との接触角 α が式(5)、式(12)で同一とみなす。

$$K_c = \frac{h_s / \left(\frac{d}{4}\right)}{ZE / d_p} \quad (14)$$

上式において、本モデルである単一円管の場合には $d_p = d$ とすると $K_c = 4$ となり、毛細管の内径とは関係なく定数である。このように、従来多孔材料中の物性値としていたキャピラリー定数 K_c は、表面張力 T 、接触角 α だけでなく材料中を浸透する粒子間を流れる液体の径路の幾向学的形状と複雑に関係しており定めにくいことから、実測可能な最終浸透高 ZE を新しく多孔材料の物性値とするのがより現実的であると思われる。

3.3 平均浸透速度 V_0 と透水係数 k の関係

同様に3.1で誘導した平均浸透速度 V_0 は以下のようにして多孔材料中の透水係数 k と同等になることが証明される。式(6)より平均浸透速度 V_0 は、 $V_0 = \frac{g}{A} = \frac{\rho g d^2}{32\mu}$ である。一方、一様円管内の層流の平均流速公式はハーゲン・ポアズイユの法則より $U_m = \frac{\rho g d^2}{32\mu} \frac{dh}{dx}$ となるのでダルシーの法則 $U_m = k \frac{dh}{dx}$ と比較すると $k = \frac{\rho g d^2}{32\mu} = V_0$ となり、透水係数 k と平均浸透速度 V_0 とは等しくなる。ただし、 $\frac{dh}{dx}$ はエネルギー勾配である。

4. データ解析

多孔材料には最終浸透高を実測するとき、最終値に達するまでに数か月以上も要するものもある。そこで、毛管浸透流の浸透時間と浸透長をいくつか測定してそれらのデータから物性値(最終浸透高 ZE 、平均浸透速度 V_0 等)を推定する方法について述べる。

4.1 実験

実験装置は図-4のように内径 $d = 13$ mm、長さ $l = 1,000$ mmの透明アクリル製円管を内寸法 300 mm \times 300 mm \times 170 mmの水槽の上に鉛直に立てたものである。管の下端には綿布を取付け管内の砂が落ちずに水が浸透できるようにしてある。実験に用いた多孔材料は表-1のような7種類の砂を用い、それぞれ水洗いをし炉乾燥して絶対乾燥状態で使用した。砂の詰め方は、全体を5層に分け、1層につき20回の振動を与えて十分に締め固めた。測定は水が浸透し始めた瞬間を0として、それから測定時間10秒、20秒、30秒、……、14日のときの浸透長を求めた。1種類の砂につき4回の実験を行った。実験より得られた浸透時間と浸透高の関係を図-5に示す。実験結果より測定開始後約1日でほぼ安定し、粒径の大きいものほど安定するのが早いことが認められる。

4.2 差分法による推定方法

ここでは、実験より得られたデータを用いて差分法により最終浸透高 ZE 、平均浸透速度 V_0 を推定する方法について述べる。鉛直上向き浸透流の基礎方程式(1)は、 $z_0 = 0$ とすると次式となる。

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + A \frac{dz}{dt} + (gz - B) \frac{1}{z} = 0 \quad (15)$$

この式を g で割り、 $A/g = 1/V_0$ 、 $B/g = ZE$ を考慮し

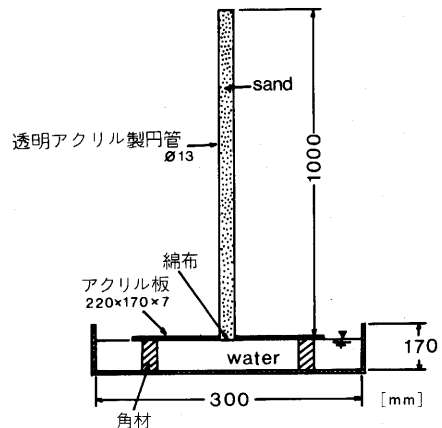


図-4 実験装置

表-1

砂ふるい分け範囲	実験No.	単位 容積重量 gf/cm ³	実験時 平均水温 °C	ヘーゼン公 式による透 水係数 cm/s
d=0.11~0.25mm	11	1.314	12.5	0.030
	12	1.431	10.7	
	13	1.417	10.7	
	14	1.396	9.5	
d=0.25~0.40mm	21	1.409	12.5	0.097
	22	1.395	10.7	
	23	1.419	10.7	
	24	1.409	9.5	
d=0.40~0.60mm	31	1.486	12.5	0.229
	32	1.436	10.7	
	33	1.428	10.7	
	34	1.440	9.5	
d=0.60~0.85mm	41	1.505	12.5	0.48
	42	1.413	10.7	
	43	1.443	10.7	
	44	1.416	9.5	
d=0.85~1.20mm	51	1.504	9.0	0.96
	52	1.502	9.0	
	53	1.536	9.5	
	54	1.462	9.5	
d=1.20~2.00mm	61	1.451	9.0	2.3
	62	1.506	9.0	
	63	1.456	9.5	
	64	1.437	9.5	
d=2.00~5.00mm	71	1.411	9.0	11
	72	1.394	9.0	
	73	1.419	9.5	
	74	1.486	9.5	

ヘーゼン公式 $k = (69 \sim 114) de^2 (0.7 + 0.03t)$
 k : 透水係数 cm/s, de : 有効径 cm, t : 水温 °C

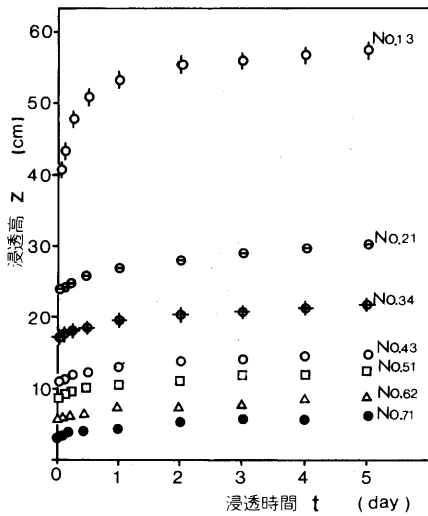


図-5 浸透時間と浸透高の関係 (実測値)

て変形すると、

$$ZE + \left(-z \frac{dz}{dt}\right) V_0 = z \left(\frac{1}{g} \frac{d^2z}{dt^2} + 1\right) \quad (16)$$

と表わされる。実験資料は時刻 t_1 に対する浸透高 z_1 、時刻 t_2 に対する浸透高 z_2, \dots, \dots 、時刻 t_n に対する浸透 z_n の n 組のデータであり、このデータを用いて差分化した浸透速度 U_i^* 、浸透加速度 a_i^* を求めると次式のように表わされる。

(差分化した浸透速度 U_i^*)

$$U_i^* = \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{z_i - z_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}\right) / 2 \quad (17)$$

$i = 2, 3, \dots, n-1$

(差分化した浸透加速度 a_i^*)

$$a_i^* = \left(\frac{U_{i+1}^* - U_i^*}{t_{i+1} - t_i} + \frac{U_i^* - U_{i-1}^*}{t_i - t_{i-1}}\right) / 2 \quad (18)$$

$i = 3, 4, \dots, n-2$

この差分化した ($n-4$) 組のデータの中から 2 組のデータを取り出して式(16)に代入すると、

$$ZE + (-z_i \cdot U_i^*) V_0 = z_i \left(\frac{a_i^*}{g} + 1\right) \quad (19)$$

$$ZE + (-z_{i+1} \cdot U_{i+1}^*) V_0 = z_{i+1} \left(\frac{a_{i+1}^*}{g} + 1\right) \quad (20)$$

$i = 3, 4, \dots, n-2$

が得られて、この式を連立して物性値 ZE と t_0 を計算する。このようにして ($n-4$) 組のデータから ($n-5$) 組の物性値 ZE と t_0 を求めて、そのおのおのに対して平均浸透速度 $V_0 = ZE/t_0$ が求められる。また、慣性項を無視したときは式(16)より、

$$ZE + \left(-z \frac{dz}{dt}\right) V_0 = z \quad (21)$$

となり、同様の方法で、 ZE 、 V_0 を計算することができる。

3種類の砂に対して最終浸透高 ZE と平均浸透速度 V_0 を求め各浸透高 z に対して図示したものが図-6 ~ 図-11 である。また、慣性項を無視した場合の最終浸透高 ZE と平均浸透速度 V_0 を式(21)を使って計算したが、慣性項を入れた場合と比べてほとんど同じ値になり、図-6 ~ 図-11 では同一点となった。これらの計算結果より慣性項 d^2z/dt^2 はほとんど影響しないことがわかる。また、最終浸透高 ZE は浸透高 z の増加とともに増加する傾向があり、粒径の小さい場合は浸透初期において値のばらつきが大きく、粒径が大きくなると浸透の全域にわたって値がばらつくことがわかる。一方、平均浸透速度 V_0 (透水係数 k に相当する) は浸透高 z の増加にともなって値が急激に小さくなることわかる。

4.3 最小自乗法による推定方法

4.2の結果より砂層中の毛管浸透流では、慣性項の影

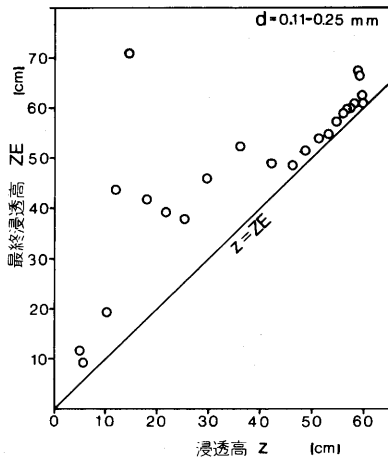


図-6 最終浸透高 ZE の浸透高 z による変化 (No. 14)

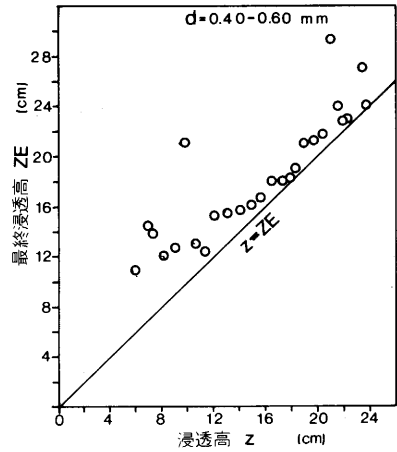


図-8 最終浸透高 ZE の浸透高 z による変化 (No. 61)

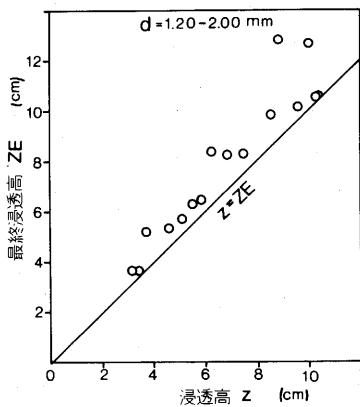


図-7 最終浸透高 ZE の浸透高 z による変化 (No. 34)

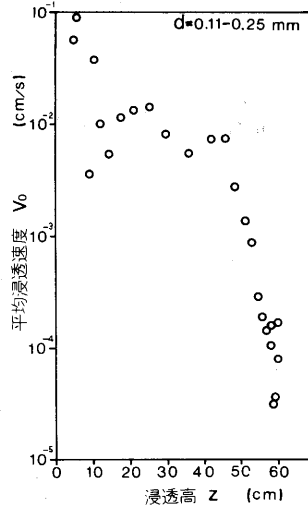


図-9 平均浸透速度 V_0 の浸透高 z による変化 (No. 14)

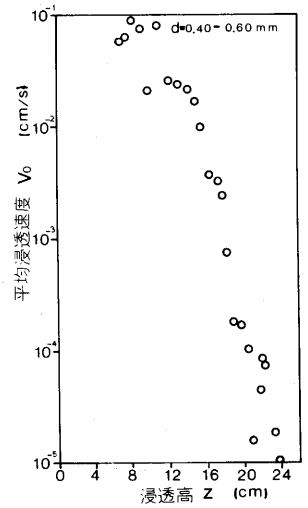


図-10 平均浸透速度 V_0 の浸透高 z による変化 (No. 34)

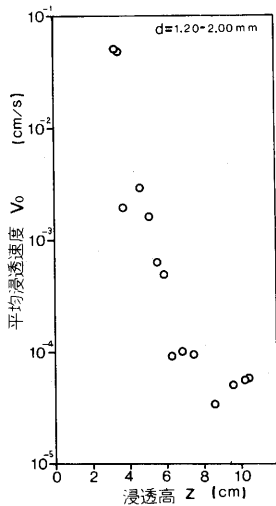


図-11 平均浸透速度 V_0 の浸透高 z による変化 (No. 61)

弊が小さいことが確認された。そこで、慣性項を無視した鉛直上向き浸透流に関する基礎方程式をもう一度示すと式(3)、式(4)より

$$\frac{d\xi}{d\theta} = \frac{1-\xi}{\xi+\xi_0} \quad (3)$$

$$\theta = -\{\xi + (1+\xi_0)\ln|1-\xi|\} \quad (4)$$

である。また、 $\xi = z/ZE$ 、 $\theta = t/t_0$ 、 $V_0 = ZE/t_0$ であるから、無次元浸透速度 $\eta = d\xi/d\theta$ は、

$$\eta = \frac{d\xi}{d\theta} = \frac{d(z/ZE)}{d(t/t_0)} = \frac{dz/dt}{ZE/t_0} = \frac{U}{V_0} \quad (22)$$

となる。式(3)を最終浸透高 ZE、平均浸透速度 V_0 を用いて書き換えると浸透速度 U と浸透高 z の関係は、

$$\frac{U}{V_0} = \frac{ZE - z}{z + z_0} \quad (23)$$

で表わされる。そこで、今まで考えてきた物性値（最終浸透高 ZE 、平均浸透速度 V_0 ）のほかに、浸透の初期における実験値の乱れは多孔体表面の物理的性質に関係すると考えて、新たに物性値 z_0 を加えて、実験資料から最小自乗法を用いて3個の物性値を求める。ここで、物性値 z_0 を表面浸透高と呼ぶことにする。実験資料は浸透時間 t_i に対する浸透高 z_i が n 組得られている。このデータから i 番目の浸透速度 U_i を次式より求める。

$$U_i = \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{t_{i+1} - t_i} + \frac{z_i - z_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right) / 2 \quad (24)$$

$i = 2, 3, \dots, n-1$

したがって、 $(n-2)$ 組のデータ $(z_1, U_1), (z_2, U_2), \dots, (z_{n-2}, U_{n-2})$ が得られたわけである。

つぎに、式(23)を変形して $V_0 \cdot ZE = X_0$ とすると、 $F = U \cdot z + U \cdot z_0 - X_0 + V_0 \cdot z = 0$ (25) となる。したがって、浸透速度 U と浸透高 z に関する $m = n-2$ 組のデータを用いた式(25)の正規方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial z_0} \sum_{i=1}^m F_i^2 = 2 \sum_{i=1}^m U_i z_i + 2z_0 \sum_{i=1}^m U_i^2$$

$$-2X_0 \sum_{i=1}^m U_i + 2V_0 \sum_{i=1}^m z_i U_i = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial V_0} \sum_{i=1}^m F_i^2 = 2 \sum_{i=1}^m U_i z_i^2 + 2z_0 \sum_{i=1}^m U_i z_i$$

$$-2X_0 \sum_{i=1}^m z_i + 2V_0 \sum_{i=1}^m z_i^2 = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial X_0} \sum_{i=1}^m F_i^2 = 2 \sum_{i=1}^m U_i z_i + 2z_0 \sum_{i=1}^m U_i$$

$$-2X_0 \cdot m + 2V_0 \sum_{i=1}^m z_i = 0$$

となり、上式を行列表示すると

$$\begin{bmatrix} [U^2] & [zU] & -[U] \\ [zU] & [z^2] & -[z] \\ -[U] & -[z] & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} z_0 \\ V_0 \\ X_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[U^2 z] \\ -[Uz^2] \\ [Uz] \end{Bmatrix} \quad (27)$$

となる。これを解いて z_0, V_0, X_0 を求め、さらに ZE は $X_0 = V_0 \cdot ZE$ の関係より求めることができる。もし物性値 z_0 を考慮しなければ式(27)は

$$\begin{bmatrix} [z^2] & -[z] \\ -[z] & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} V_0 \\ X_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -[Uz^2] \\ [Uz] \end{Bmatrix} \quad (28)$$

となり、 V_0, ZE を求めることができる。

3種類の砂に対して、実験データに合うような平均浸透速度 V_0 、最終浸透高 ZE 、表面浸透高 z_0 を最小自乗法により計算し、浸透速度に対する浸透高を図示したものを図-12~図-14に示す。図中の丸印は実験値であり、実線が表面浸透高 z_0 を考慮した行列式(27)より求めた物性値 (ZE, V_0, z_0) を式(23)に代入して求めた値を示している。また点線は z_0 を考慮しない行列式(28)より求めた物性値 (ZE, V_0) を式(23)に代入して求めた値を示している。これらの計算結果から、 z_0 を考慮してもしなくても解析結果には差がなく、砂の粒径が小さい範

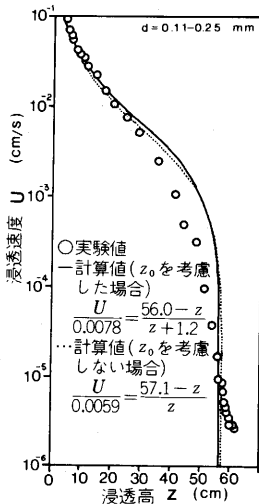


図-12 浸透高 z に対する浸透速度 U の実験値と解析結果 (No. 13)

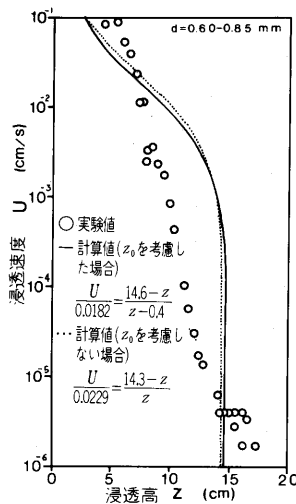


図-13 浸透高 z に対する浸透速度 U の実験値と解析結果 (No. 34)

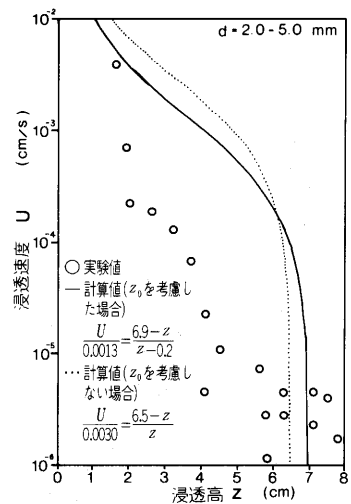


図-14 浸透高 z に対する浸透速度 U の実験値と解析結果 (No. 61)

囲 ($d = 0.11 \sim 0.25 \text{mm}$) では、全体的に良く実験値と合っていると思われる。しかし、最終浸透高 ZE への近づき方を比較して見ると、実験ではまだ水が上昇する傾向を示しているのに対し、本解析結果では浸透速度 $U = 1.0 \times 10^{-5} \text{cm/s}$ あたりでは最終浸透高 ZE に収束してしまい、実験による浸透高より低い値となる。また、砂の粒径が大きくなるに従って、理論曲線は実験値より離れる傾向を示し、特に $d = 2.0 \sim 5.0 \text{mm}$ のふるい分け範囲で顕著である。

5. おわりに

本報告より得られた結果を以下にまとめる。

- 1) 砂を用いた基礎的実験から物性値 V_0 , ZE を差分法によって求めた。最終浸透高 ZE が浸透高 z の増加とともに増加する傾向や平均浸透速度 V_0 が浸透高 z の増加とともに小さくなる傾向を示して一定値をとらなかった。
- 2) 上記のように物性値が一定値をとらないのは慣性力の影響があるのではないかと考えて調べたが、砂の場合毛管浸透流の慣性項がさほど影響しないことがわかった。
- 3) 代表的物性値を求めるために理論式(23)の最小自乗法を行って物性値を求めた。その結果砂の粒径が

小さい範囲では実験値と比較的一致しているが、砂の粒径が大きくなるに従って実験値と一致しないことがわかった。

- 4) 以上のように多孔材料の毛管浸透流に関する単純モデルを提案して物理的性質の代表値を定めたが、特に砂粒の大きい場合には一定にならなかった。そこで、今後の課題としては、多孔材料の粒子の密度分布を考慮するなど解析モデルを改良することが必要であるものと考えます。

最後に本研究について御助言を頂いた東京都立大学村田二郎教授、日本大学生産工学部堺敦学部長、同越川茂雄講師ならびに実験、計算などの協力をして下さった山梨大学伊藤強教務職員、金丸督司(東工大大学院生)、鶴田仁(山梨県河川課)、渡辺利夫(早野組)の各位に甚大なる謝意を表します。

参考文献

- 1) 荻原、伊藤：多孔材料中の毛管浸透流モデルに対する一提案，土木学会第37回年次学術講演概要集，(昭57)
- 2) 荻原、伊藤，他：毛管浸透流における物性値の研究，土木学会第38回年次学術講演概要集，(昭58)
- 3) 近藤連一編：多孔材料，技報堂出版，(昭48)