論　　文

ばね質量の慣性効果を考慮したばね—質量系の有限要素解析

沢登　　健
中村正信
秋山雪治

（昭和57年8月31日受理）

A Finite Element Approach of Spring-Mass System Considering Inertial Effects of Spring Mass

by Takeshi SAWANOBORI, Masanobu NAKAMURA and Yukiharu AKIYAMA

Abstract

Recently, it is required to consider synthetically the dynamic characteristics of the spring-mass system from the standpoint of both vibration isolation and noise isolation. In the present paper, application of the finite element method is proposed in order to answer this request. Mass and stiffness matrices are derived by the use of exact solution of the coil spring in equilibrium. Calculated values using finite element approach agree well with experimental values, and dynamical characteristics of spring-mass system become clear for wide range of frequency.

1. 緒　　言

圧縮円筒コイルばねを構成要素として用いている機構の動的解析は，ばね質量の慣性効果を省略し，その弾性効果のみを考慮する離散系としての解析とばね質量の慣性効果とばねの弾性効果を考慮する分布系としての解析に大別される。例えば，動弁機構の弁のおどりや防振緩衝装置の力の伝達率の解析では，ばね質量の慣性効果を省略した解析で十分なことが多いが，動弁機構のサージング現象を調べたり，防振緩衝機構でノイズ絶縁を考慮した対策を考える場合には，ばね質量の慣性効果を考慮した解析が必要である[1,2]。

しかし，上述のようにコイルばねを用いた機構の動的解析を問題とする現象ごとに分けて取り扱うのは，解析を容易にするためであって，一方の現象を重要視し，他方の現象を軽んじてよいということではない。むしろ，最近はばねの使用範囲の広がりと苛酷な使用条件の増大にともない，ばねを用いた機構の動特性を広い周波数域にわたって総合的に検討する必要が増してきている。

コイルばねを用いた機構の動特性を総合的に検討するためには，ばねの変形特性や応力特性などの諸特性を正確に把握する必要があるが，従来用いられている解析法にはいくつかの問題があることが指摘されている[3]。このため最近，有限要素法を用いてばねの諸特性を統一的に解析しようという試みが行われ，応力特性の解析において有益な結果が得られている[3,4]。筆者らも，ばねの諸特性に重要な影響を及ぼすピッチ角を考慮したばね要素の質量マトリックスと剛性マトリックスをコイルばねの静的平衡解をもとに求め，有限要素法によってコイルばねの動特性および応力特性の解析を行い，良好な結果を得た[5,6]。

本報告は，既報の方法[5]を踏えて，コイルばねを用いた機構の動特性を統一的に検討する基礎を確立することを目的としている。そのために，ばねと剛体よりなる系を有限要素法で解析するための質量および剛性

マトリックスを導き，それを簡単なばねを用いた機構の固有振動解析に用い，実験と比較してその有効性を示す。さらに解析の結果得られた知見について述べる。

2. 記　号

本報告で用いる主な記号は以下のようである（**Fig.** 1参照)。

$x,\ y,\ z$：素線軸上任意点における接線，主法線，従法線方向の座標
$u,\ v,\ w$：素線軸変位の $x,\ y,\ z$ 成分
$\beta,\ \delta,\ \psi$：素線断面の回転角の $x,\ y,\ z$ 成分
$X,\ Y,\ Z$：断面力の $x,\ y,\ z$ 成分
$T,\ H,\ M$：断面モーメントの $x,\ y,\ z$ 成分
$\kappa,\ \tau$：素線軸の曲率と捩率
θ：ばね中心軸まわりの角座標
s：素線軸に沿う曲線座標
ϕ：ばね要素の全巻角
r：平均コイル半径
d：素線の径
A：素線断面積$=\pi d^2/4$
I：素線直径まわりの断面二次モーメント$=\pi d^4/64$
α：ピッチ角
n：有効巻数
E：縦弾性係数
G：横弾性係数
ρ：密度
ω：固有円振動数
ν：無次元固有振動数$=(\omega r^2/\cos\alpha)\sqrt{\rho A/EI}$

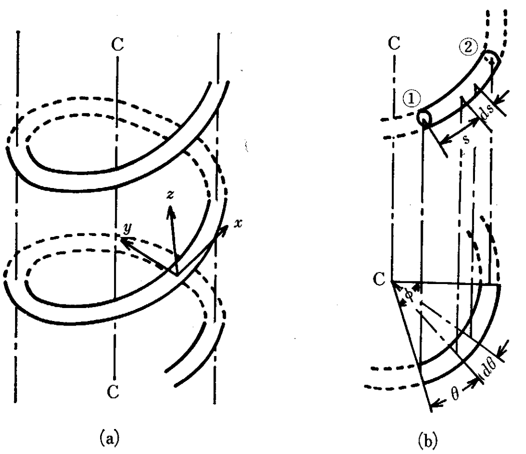


Fig. 1 Co-ordinate (a) and spring element (b)

m_s：ばねの全質量$=2\pi\rho rAn/\cos\alpha$
J_s：ばね全体のばね中心軸まわり慣性モーメント$=2\pi\rho r^3An/\cos\alpha$
m_a：円筒形付加剛体の質量
I_a：円筒形付加剛体の重心を通る直径軸まわりの慣性モーメント
J_a：円筒形付加剛体の円筒軸まわりの慣性モーメント
μ：質量比$=m_a/m_s$
η：慣性モーメント比$=I_a/J_s$
ζ：慣性モーメント比$=J_a/J_s$

3. 理　論

3.1 ばね要素の要素マトリックス

コイルばねを用いた機構を有限要素法によって解析するためには，コイルばね要素（Fig. 1(b)）内任意位置の変位を表わす適当な表示式を求める必要がある。しかし，コイルばね要素のような曲率と捩率を有する空間曲線形構造要素に対して解の収束性のよい適当な変位表示式を多項式近似などの簡単な方法で得ることは困難である。そこで本報告では，静的平衡状態にあるばねについては，ばねの釣合方程式が厳密に解けることに着目して，この厳密解の変位を要素変位式として用いて質量マトリックスと剛性マトリックスを求める。以下に誘導過程を述べる。

静的平衡状態にあるコイルばねの釣合方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dX}{ds}-\kappa Y=0\\&\frac{dY}{ds}+\kappa X-\tau Z=0\\&\frac{dZ}{ds}+\tau Y=0\\&\frac{dT}{ds}-\kappa H=0\\&\frac{dH}{ds}+\kappa T-\tau M-Z=0\\&\frac{dM}{ds}+\tau H+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

である[5]。断面力および断面モーメントと変位および角変位の間には，

$$\left.\begin{aligned}&X=EA\left(\frac{du}{ds}-\kappa v\right)\\&T=2GI\left(\frac{d\beta}{ds}-\kappa\delta\right)\\&H=EI\left(\frac{d\delta}{ds}+\kappa\beta-\tau\psi\right)\\&M=EI\left(\frac{d\psi}{ds}+\tau\delta\right)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

の力—変位関係が成り立つ。この場合，断面力YとZによる剪断変形を無視しているので，適合条件として

$$\left.\begin{aligned}\delta&=-\left(\frac{dw}{ds}+\tau v\right)\\ \psi&=\frac{dv}{ds}+\kappa u-\tau w\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

が成り立つ。ここに

$$\kappa=\frac{\cos^2\alpha}{r},\quad \tau=\frac{\sin 2\alpha}{r},\quad \frac{ds}{d\theta}=\frac{r}{\cos\alpha}\tag{4}$$

である。

式(1)～(3)は断面力X，Y，Z，断面モーメントT，H，M，変位u，v，w，角変位β，δ，ψに関する連立微分方程式であるが，以下のように，各変量X，Y，……，δ，ψのみの式に還元することができる。すなわち，式(1)のはじめの3式に式(4)を考慮して，簡単な微分と四則演算を行えば，各断面力のみの式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)X=0\\ &\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)Y=0\\ &\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)Z=0\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

を容易に導くことができ，さらに式(5)を求めると同様の方法で式(1)の残りの3式から各断面モーメントのみの式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^2T=0\\ &\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^2H=0\\ &\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^2M=0\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

を得る。式(2)，(3)に式(5)，(6)の関係を考慮すれば，各断面力および断面モーメントに関する式(5)，(6)を求めたのと同様の計算によって，変位u，v，wおよび角変位β，δ，ψに関して，各変数のみの式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^4u=0\\ &\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^4v=0\\ &\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^4w=0\\ &\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^3\beta=0\\ &\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^3\delta=0\\ &\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+1\right)^3\psi=0\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

を導くことができる。式(5)～(7)により，断面力，断面モーメント，変位，および角変位を表わす一般式は1，θ，$\theta^i\cos\theta$，$\theta^i\sin\theta$（$i=1$，2，3）の線形結合で表わされることがわかる。この断面力，断面モーメント，変位，および角変位を表わす一般式を再び式(1)～(3)に代入して，各一般式の線形結合定数を調整すれば，変位や断面力などは12個の定数パラメータa_1，a_2，……，a_{12}を用いて

$$\mathbf{u}=\mathbf{Aa}\tag{8}$$

$$\mathbf{X}=\mathbf{Ba}\tag{9}$$

と書くことができる。ここに$\mathbf{u}$，$\mathbf{X}$，$\mathbf{a}$は，

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}u\\v\\w\\\beta\\\delta\\\psi\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\T\\H\\M\end{pmatrix},\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\\vdots\\a_{12}\end{pmatrix}\tag{10}$$

であり，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$はその要素がばね諸元をパラメータとして含む，1，θ，$\theta^i\cos\theta$，$\theta^i\sin\theta$（$i=1$，2，3）の線形結合式で表わされる 6×12 のマトリックスである。以下では$\mathbf{u}$を変位ベクトル，$\mathbf{X}$を断面力ベクトル，$\mathbf{a}$をパラメータベクトルという。

ばね要素の節点①（$\theta=0$）と節点②（$\theta=\phi$）における$\mathbf{u}$，$\mathbf{X}$，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$にそれぞれ添字1と2をつけて表わすことにすれば式(8)と(9)から

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{A}_1\mathbf{a},\quad \mathbf{u}_2=\mathbf{A}_2\mathbf{a}\tag{11}$$

$$\mathbf{X}_1=\mathbf{B}_1\mathbf{a},\quad \mathbf{X}_2=\mathbf{B}_2\mathbf{a}\tag{12}$$

である。要素節点変位ベクトル$\mathbf{U}_e$を

$$\mathbf{U}_e=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\\mathbf{u}_2\end{pmatrix}\tag{13}$$

と定義すれば，式(11)から要素節点変位ベクトル$\mathbf{U}_e$（節点変位）とパラメータベクトル$\mathbf{a}$（定数パラメータ）を関係づける式

$$\mathbf{U}_e=\mathbf{Pa}\tag{14}$$

を得る。

ここに$\mathbf{P}$は

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_1\\\mathbf{A}_2\end{pmatrix}\tag{15}$$

なる 12×12 の係数マトリックスである。

ばね要素の節点①と②における外力ベクトルをそれぞれ$\mathbf{F}_1$，$\mathbf{F}_2$とすれば，

$$\mathbf{F}_1=-\mathbf{X}_1,\quad \mathbf{F}_2=\mathbf{X}_2\tag{16}$$

である。要素節点力ベクトルを

$$\mathbf{F}_e=\begin{pmatrix}\mathbf{F}_1\\\mathbf{F}_2\end{pmatrix}\tag{17}$$

とすれば，式(16)と(12)から

$$\mathbf{F}_e=\begin{pmatrix}-\mathbf{X}_1\\\mathbf{X}_2\end{pmatrix}=\mathbf{Qa}\tag{18}$$

を得る。ここに$\mathbf{Q}$は，

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} -\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{pmatrix} \tag{19}$$

なる 12×12 の係数マトリックスである。

式(19)に要素節点変位ベクトルと定数パラメータベクトルを関係づける式(14)を用いれば

$$\mathbf{F}_e=\mathbf{Qa}=\mathbf{QP}^{-1}\mathbf{U}_e \tag{20}$$

を得る。式(20)は節点変位と節点力を関係づける式であるから

$$\mathbf{K}_s=\mathbf{QP}^{-1} \tag{21}$$

が，ばね要素の剛性マトリックスである。

ばね要素の質量マトリックスはばね要素の運動エネルギーから求める。ばね要素の運動エネルギーT_sは，その対角成分 m_i（$i=1\sim6$）が $m_1=m_2=m_3=\rho Ar/\cos\alpha$，$m_4=2\rho Ir/\cos\alpha$，$m_5=m_6=\rho Ir/\cos\alpha$ である対角マトリックス $\mathbf{M}_d$ を用いて

$$T_s=\frac{1}{2}\int_0^{\phi}\dot{\mathbf{u}}^t\mathbf{M}_d\dot{\mathbf{u}}d\theta \tag{22}$$

と表わされる。ここに・は時間微分を，t はマトリックスまたはベクトルの転置を表わす記号である。

式(22)に式(8)と(14)を用いれば，

$$\begin{aligned} T_s&=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{a}}^t\left[\int_0^{\phi}\mathbf{A}^t\mathbf{M}_d\mathbf{A}d\theta\right]\dot{\mathbf{a}} \\ &=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_e{}^t\mathbf{P}^{-t}\left[\int_0^{\phi}\mathbf{A}^t\mathbf{M}_d\mathbf{A}d\theta\right]\mathbf{P}^{-1}\dot{\mathbf{U}}_e \end{aligned} \tag{23}$$

となるから，ばね要素の質量マトリックス $\mathbf{M}_s$ は，

$$\mathbf{M}_s=\mathbf{P}^{-t}\left[\int_0^{\phi}\mathbf{A}^t\mathbf{M}_d\mathbf{A}d\theta\right]\mathbf{P}^{-1} \tag{24}$$

である。ただし$\mathbf{P}^{-t}$は $\mathbf{P}^{-t}=(\mathbf{P}^{-1})^t$ の意味である。

3.2 剛体―ばね要素の要素マトリックス

ばねを用いた機構の有限要素法による解析では，ばね要素の節点①に剛体が付加された**Fig.** 2のような剛体―ばね要素に対して要素マトリックスを求めておくと便利である。剛体ばね要素の要素マトリックスを求めるにあたっては，ばね要素部分については上述の解析は何らの変更も必要としないから，剛性マトリックスはばね要素の剛性マトリックスと同一で式(21)であり，質量マトリックスは付加剛体の運動エネルギーから得られる質量マトリックスをすでに求めたばね要素の質量マトリックスに加えて補正すればよい。それで，ここでは剛体要素部分の質量マトリックスの誘導について述べる。

剛体要素の運動エネルギーT_rは，剛体要素の質量と慣性主軸まわりの慣性モーメントをその対角要素とする 6×6 の対角マトリックス$\mathbf{M}_a$と質量中心の並進変位と角変位をその要素とする 6×1 の変位ベクトル

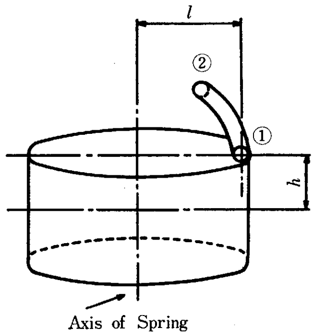


Fig. 2　Rigid body-spring element

$\mathbf{u}_a$を用いて

$$T_r=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}_a{}^t\mathbf{M}_a\dot{\mathbf{u}}_a \tag{25}$$

と表わすことができる。一方，$\mathbf{u}_a$と節点変位ベクトル$\mathbf{U}_e$の間には

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u}_a=\mathbf{CU}_e \\ &\mathbf{C}=(\mathbf{D},\ \mathbf{0}) \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

の関係が存在する。ここに$\mathbf{D}$はその要素が**Fig.** 2のlとhに依存する 6×6 のマトリックスで，$\mathbf{0}$は 6×6 の零マトリックスである。式(26)を式(25)に用いれば，

$$T_r=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{U}}_e{}^t[\mathbf{C}^t\mathbf{M}_a\mathbf{C}]\dot{\mathbf{U}}_e \tag{27}$$

となるので，付加剛体の質量マトリックスは

$$\mathbf{M}_r=\mathbf{C}^t\mathbf{M}_a\mathbf{C} \tag{28}$$

である。剛体―ばね要素の質量マトリックス$\mathbf{M}_e$は式(24)と式(28)を加え合わせた

$$\mathbf{M}_e=\mathbf{M}_s+\mathbf{M}_r \tag{29}$$

である。

3.3 支配方程式と固有振動解析

質量マトリックスの式(29)と剛性マトリックスの式(21)を用いれば，剛体―ばね要素の運動の支配方程式は，

$$\mathbf{M}_e\ddot{\mathbf{U}}_e+\mathbf{K}_e\mathbf{U}_e=\mathbf{F}_e \tag{30}$$

となる。なお，式(29)において $\mathbf{M}_r=\mathbf{0}$ の場合は式(30)はばね要素の運動の支配方程式となる。コイルばねと剛体よりなる系の減衰のない自由振動の方程式は，各要素に対して得られる式(30)を各要素節点における力の釣合いと変位の連続性を考慮して，整理統合すれば，

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}+\mathbf{KU}=\mathbf{0} \tag{31}$$

となる。ここで$\mathbf{M}$と$\mathbf{K}$はそれぞれ，系全体の質量マトリックスと剛性マトリックスであり，$\mathbf{U}$は系全体の節点変位ベクトルである。式(31)の解として，時間に関して正弦的に変化する解を仮定して，固有円振動数ωと固有振動モード$\mathbf{U}_0$を求めるための式

$$\mathbf{KU}_0=\omega^2\mathbf{MU}_0 \tag{32}$$

を得る。式(32)に固有値解析を行い，ω と $\mathbf{U}_0$ を求める。

4. 結果と検討

4.1 計算例

振動機械をばねで支持した防振機構や弁と弁ばねからなる動弁機構の簡単なモデルである **Fig.** 3の系を計算例として用いる。

結果を示すにあたって，固有振動数については無次元固有振動数 $\nu=(\omega r^2/\cos\alpha)\sqrt{\rho A/EI}$ で示す。固有振動モードについては，ばね中心軸に関する振動の方向でモードを表示すると，系の振動状況を把握し易いので，**Fig.** 4 に示すように，ばね中心軸方向の振動を主とする振動モードを伸縮モードと呼び記号Tで，ばね中心軸まわりの振動を主とする振動モードを捩り振動モードと呼び記号Rで，ばね中心軸横方向の振動を主とする振動を曲げモードと呼び記号Bで表わす。また同じ呼称のモードでも，剛体の運動を主とした従来のばね—質量系の解析結果に対応する振動モードの場合は記号T，R，Bの後に記号Mを，ばねの振動が主である振動モードの場合は記号T，R，Bの後に記号Sをつけて区別する。各モードの次数はこれらの記号の後に数字で示す。たとえば，TS-1 はばねの振動を主とする一次の伸縮振動モードである。

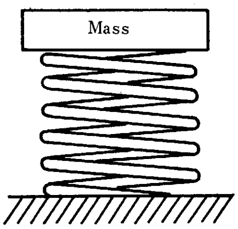


Fig. 3 A example of spring-mass system

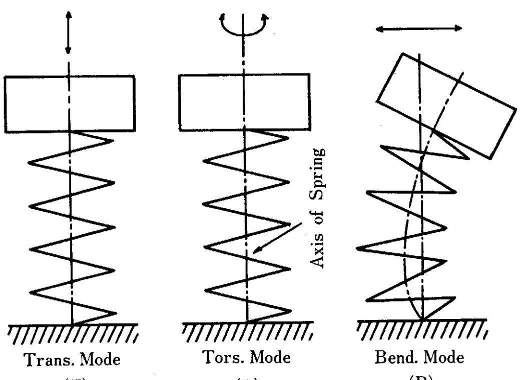


Fig. 4 Classification of vibration modes

Fig. 5 と **Fig.** 6 は剛体質量の変化に対する固有振動数の変化の様子を示したものである。**Fig.** 5 の伸縮モード TM-1 に対する固有振動数は，剛体質量 m_a とばね全質量 m_s との比である質量比 μ が小さい場合は，ばね質量の固有振動数に及ぼす影響が大きくなり，$\mu\to0$ ($m_a\to0$) の極限では一端固定他端自由のばねの一次の伸縮振動の固有振動数（表1のパラメータを有するばねでは $\nu=33.5\times10^{-3}$）に近づく。一方剛体質量 m_a がばね全質量 m_s に比べて大きい場合は，剛体質量の固有振動数に及ぼす影響が大きくなり，ばね質量を省略して $\mu\to\infty$ ($m_s\to0$) として求めた1自由度のばね-質量系の伸縮振動の固有振動数に近い値が得られる。質量比 μ が大きいときは，ばね全質量の 1/3 と剛体質量を加えた等価質量を用いて伸縮の固有振動数を求めればよい[7]が，この場合，ばね質量を無視した場合の固有振動数 ω_0 に比べて約 $\omega_0/6\mu$ だけ低い固有振動数が得られる。したがって，ばねの質量を考慮

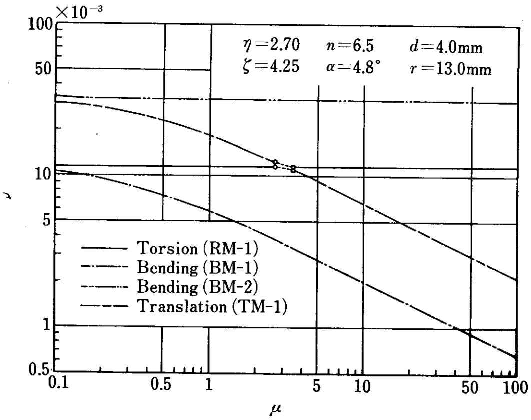


Fig. 5 Dimensionless natural frequency vs. mass ratio-(1)

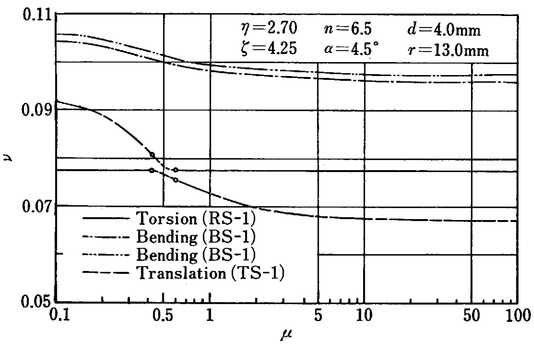


Fig. 6 Dimensionless natural frequency vs. mass ratio-(2)

Table 1 Dimensions of coil spring

材　　質	SWPV
素 線 径	4 mm
コイル中心径	26 mm
自 由 長	50 mm
総 巻 数	8.5
有効巻数	6.5
ピッチ角	4.8°

した場合と省略した場合の固有振動数の相違が5％以下になるμを求めると$\mu \geq 3.5$である。$\mu=3.5$では，Fig. 5から，表1のばねの場合，TM-1に対する固有振動数は，ばね質量を省略した場合$\nu=11.4\times10^{-3}$であり，本報の計算結果では$\nu=10.8\times10^{-3}$であるから，確かに5％の相違がみられ，本報の計算の正しいことが示される。μが小さい場合についても，ばね-質量系の伸縮の固有振動数を算定するための等価質量を求めることができる[7]が，そのためには棒の縦振動の固有振動解析を行う必要があり面倒である。本報の計算によれば，剛体質量とばね質量の比μに関係なく計算が可能なので便利と思われる。

Fig. 5の捩りモードRM-1に対する固有振動数は，質量比μに関係なく一定値をとる。これは，ピッチ角αが4.8°と小さいため，剛体の伸縮振動との連成がFig. 5の点線部分に対応するμの値を除いては弱いためと，剛体のばね中心軸まわりの慣性モーメントJ_aとばねのばね中心軸まわりの慣性モーメントJ_sの比である慣性モーメント比ζが$\zeta=4.25$と比較的大きいためである。Fig. 5のRM-1に対する固有振動数は，本報の計算によれば$\nu=11.4\times10^{-3}$であり，ばねの慣性効果を省略した簡単な1自由度ねじり振動系として求めた固有振動数は$\nu=11.8\times10^{-3}$であって，両者は良く一致している。このように慣性モーメント比ζが大きいときは1自由度ねじり振動系として求めた固有振動数がRM-1に対する固有振動数となるが，慣性モーメント比ζが小さくなると，ばねの慣性モーメントの固有振動数に及ぼす影響が大きくなり，$\zeta\to0$の極限では一端固定他端自由のばねの一次の捩り振動の固有振動数（表1のばねでは$\nu=38.3\times10^{-3}$）となる。

曲げモードに対する固有振動数は，Fig. 5ではBM-1とBM-2の二つのモードに分けて描いてある。BM-1モードとBM-2モードは，μが大きい場合はそれぞれ剛体質量の横運動を主とする振動モードと剛体のばね中心軸に直角な軸まわりの運動を主とする振動モードであり，μが小さい場合は，それぞればね先端に慣性モーメントのみ有する系の曲げ振動の1次と2次のモードである。計算によれば，BM-1モードに対する固有振動数は，μの変化によって変わるのに対し，BM-2モードに対する固有振動数はほとんど変化しない。

μが大きい場合曲げモードBM-1に対する固有振動数をばね先端に質量を有する1自由度曲げ振動系の固有振動数として求めれば，$\mu=2$で11.6％，$\mu=10$で7.0％，$\mu=50$で4％程度本報の計算結果と相違する。一方曲げモードBM-2に対する固有振動数を，ばね先端に慣性モーメントを有する1自由度曲げ振動系の固有振動数として求めた場合は，本報の結果の半分程度の低い値しか得られない。曲げモードでは，剛体のばね中心軸横方向の運動とばね中心軸直角軸まわりの回転運動の連成が考えられるので，ばね先端に質量と慣性モーメントを有する2自由度曲げ振動系としての解析を行えば，BM-1モードに対する固有振動数は，本報の結果と比較した場合$\mu=2$で5％，$\mu\geq10$では1％以下の相違となり良く一致するが，BM-2モードの固有振動数は，本報の結果より$\mu=2$で20％，$\mu=10$で15％，$\mu=50$で14％程度高い。μの大きい場合，BM-1モードに対する固有振動数は2自由度曲げ振動系の固有振動数と良く一致するが，BM-2モードに対する固有振動数は，2自由度曲げ振動系の固有振動数に対して若干の相違がある。

μが小さい場合BM-1モードに対する固有振動数は，ばね先端に慣性モーメントを有する1自由度曲げ振動系の固有振動数より15％低い値（図5では$\nu=12.0\times10^{-3}$）である。一方BM-2モードに対する固有振動数は対応する簡単な振動モデルを作ることはできない。これはμが小さい場合は，BM-2に対する固有振動数はばね質量の慣性効果を考えて求める必要があるためである。

Fig. 6の固有振動数は，ばねの振動を主とするモードに対する固有振動数である。Fig. 6のTS-1モードに対する固有振動数は質量比μを小さくすると一端固定他端自由のばねの伸縮のモードに対する固有振動数（Fig. 6の場合$\nu=9.87\times10^{-2}$）に，μを大きくすると両端固定ばねの1次の伸縮モードに対する固有振動数（Fig. 6の場合$\nu=6.69\times10^{-2}$）に近づくが，μが比較的小さな値でも両端固定ばねの伸縮1次モードに対する固有振動数に比べて相違は小さく，$\mu=2$で4.7％の相違がある程度である。このようにTS-1モードに対する固有振動数が，μが比較的小さくても両端固定ばねの一次の伸縮モードに対する固有振動数に近くなる

理由は，TM-1 に対する固有振動数に比べて，TS-1 モードに対する固有振動数が高く，剛体質量の伸縮振動が小さくなるためである。μ が大きくなれば，この傾向はさらに顕著になり，剛体質量の運動がほとんど静止状態となり系は両端固定ばねの状態に近づく。

Fig. 6 の振りモード RS-1 に対する固有振動数も，RM-1 モードに対する固有振動数の場合と同様に，質量比 μ にかかわりなく一定（Fig. 6 では $\nu=7.77\times10^{-2}$）で，両端固定ばねの一次の振りのモードの固有振動数に対して 4 %程度高い値である。このように RS-1 モードに対する固有振動数が，両端固定ばねの一次の振りモードの固有振動数に近いのは，TS-1 モードに対する固有振動数の場合と同様，RM-1 モードに対する固有振動数に比べて RS-1 モードに対する固有振動数が高く，剛体のばね中心軸まわりの回転運動が小さくなるためある。

曲げのモード BS-1 については，Fig. 6 に示すように同一モードに対して二つの固有振動数が得られる。これは，ばねのピッチ角と巻角に依存して，ばねの曲げ剛性にわずかな異方性が存在するために生ずるものである。BM-1 と BM-2 モードに対する固有振動数の場合にも，各モードに対して二つの固有振動数が存在するが，質量比 μ あるいは慣性モーメント比 η の影響のために，Fig. 5 上で明瞭に区別できるほど離れてはいない。BS-1 モードに対する固有振動数は μ が小さくなるとやや高くなる傾向を有しているが，μ が大きくなるとほぼ一定となる。慣性モーメント比 η が大きくなると，両端固定ばねの曲げ 1 次モードの固有振動数に近づくことが予想されるが，Fig. 6 の η では両端固定のばねの曲げ一次の固有振動数より 13.5% 高い値 $\nu=8.55\times10^{-2}$ となっている。

なお Fig. 5 と Fig. 6 で点線で示した範囲は，TM-1 または TS-1 モードに対する固有振動数が μ の増加によって減少し，振りモードと伸縮モードの振幅の大きさが同程度とみなせる部分である。領域の限界の ∘ 印は，次に述べる振りモードと伸縮モードの最大振幅比が 2 対 1 または 1 対 2 となるところである。

Fig. 7，Fig. 8，Fig. 9 は質量比 μ を変えた場合の振動モードの推移を調べたものである。振動モードを考察するにあたっては，前述のように，静止時のばね中心軸に対する振動の方向で，モードを調べるのが都合がよいので，計算で得られた結果からばね中心軸に対するコイル各巻の回転量とコイル各巻の中心の移動量を求めて図示した。Fig. 7，Fig. 8，Fig. 9 の u_n はこのようにして求めたばね中心軸まわりのコイル各巻の回転量にコイル半径 r をかけたもの，v_n はばね中心軸横方向のコイル各巻の中心移動量，w_n はばね中心軸

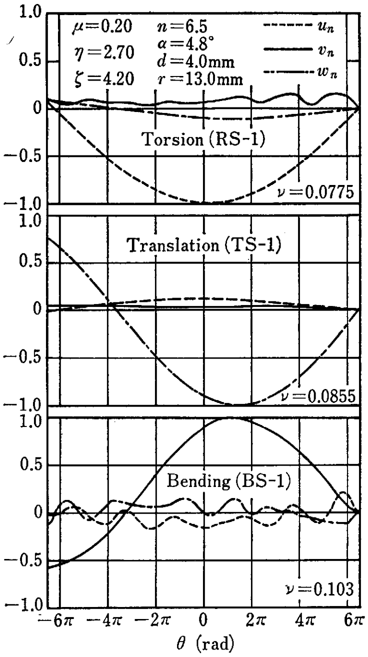


Fig. 7 The change of vibration modes with mass ratio-(1)

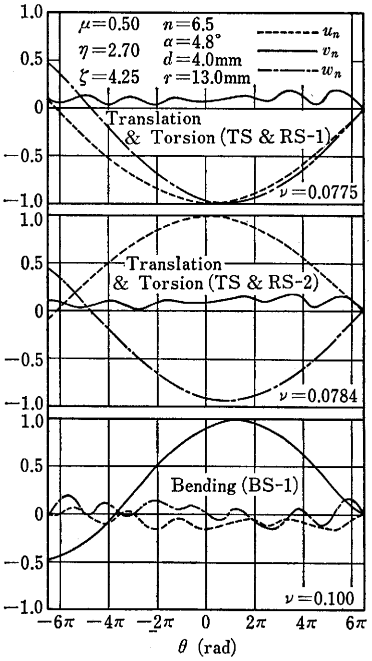


Fig. 8 The change of vibration modes with mass ratio-(2)

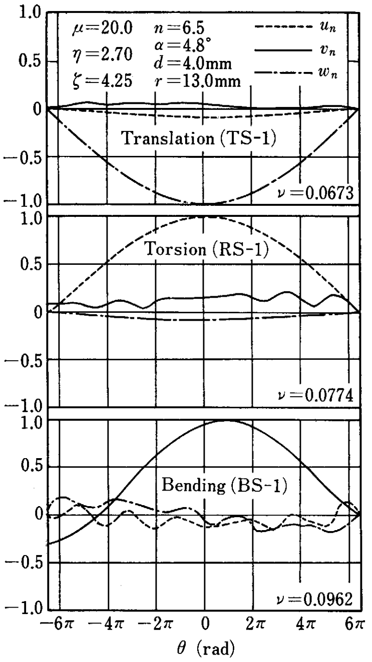


Fig. 9 The change of vibration modes with mass ratio-(3)

に沿うコイル各巻の中心の移動量である。

質量比μが比較的小さく $\mu=0.2$ の場合のモードをFig. 7に示す。捩りモード，伸縮モード，曲げモードの順に固有振動数が大きくなっており，各モードはきわめて明確に区別できる。$\mu=0.5$ の Fig. 6 の点線部分に相当する質量比の場合は，Fig. 8 のようにはじめの二つの固有振動数が接近し，捩りと伸縮モードの連成した捩り伸縮形のモードが得られる。一方，3番目の固有振動数については，曲げモードが明確に認められる。質量比μを大きくした $\mu=20.0$ では，再び，捩り，伸縮，曲げの各モードの区別が明確にできるようになるが，$\mu=0.2$ の時とは逆に伸縮モードに対する固有振動数の方が捩り振動モードに対する固有振動数より大きくなっている。

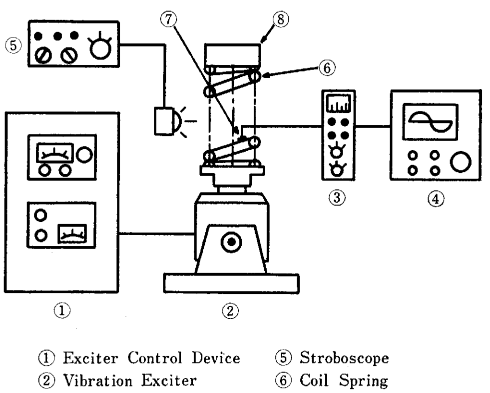
以上，本報の方法で Fig. 3 の機構について表1の弁ばねを用いた場合の固有振動解析について述べたが，これらから動弁機構の振動と関連のある事柄について考察する。まず動弁機構の弁のおどりの解析で重要である TM-1 モードの固有振動解析においては，実際の弁機構では質量比μが1～3程度であるので，ばねの慣性効果を考慮しないと，固有振動数に約5～10%程度の誤差が生ずることが分かる。またサージング現象である TS-1 モードの固有振動数の解析においても，従来のようにばね両端固定の仮定を行った場合は，固有振動数に4～8%程度の相違がある。さらに動弁機構には弁ばねの弁軸まわりの回転現象[7]がみられるが，これについては本報の解析結果からは，動弁機構の質量比μの存在する範囲で，伸縮と捩りのモードに対する固有振動数が非常に接近し，伸縮，捩りの連成が強くなるためと結論することができる。

本報の計算においては，ばね1巻あたりの分割数は4分割，質量マトリックスの計算に用いたガウス積分の分点数は10とし，固有値解析には QR 法を用いている。要素の分割が比較的粗いようにみえるが，解の収束状況は極めてよく，本報の質量マトリックスと剛性マトリックスはばねを用いた機構の動的解析を有限要素法を用いて統一的に扱うために極めて有効と思われる。

4.2 実験による検討

本報告の解析方法の有効性を調べるために，定常加振法による振動実験を行った。実験は **Fig. 10** にその概要を示すように，一端に剛体を付加したコイルばねの他端を加振台上に固定し，ばね軸方向に加振して振動の様子を動歪計とストロボスコープを用いて観察した。ばねがピッチ角を有するためにばねの中心軸方向の加振のみでも，捩りモード，曲げモードの振動が観察され，ばね中心軸まわりやばね中心軸横方向への加振の必要は認められなかった。実験に用いたばねは計算に用いたのと同じ表1の諸元を有し，ばねに対する剛体の質量比と慣性モーメント比は，それぞれ $\mu=2.30$, $\eta=2.70$, $\zeta=4.25$ である。

実験結果は表2のようである。曲げモードの固有振



① Exciter Control Device　⑤ Stroboscope
② Vibration Exciter　⑥ Coil Spring
③ Strain Meter　⑦ Strain Gauge
④ Synchroscope　⑧ Mass

Fig. 10 Diagram of measuring system for experiment

Table 2 Comparison of the experimental results with calculated results

$\mu=2.30$

$\eta=2.70$　$n=6.5$　$d=4$ mm

$\zeta=4.25$　$\alpha=4.8°$　$r=13$ mm

実験値 (Hz)	解析値 (Hz)	振動モード
19.2	19.6	BM-1
	19.7	
61.5	55.0	RM-1
	63.6	TM-1
157	152	BM-2
	153	
338	336	TS-1
368	374	RS-1
472	468	BS-1
	474	
644	639	TS-2
707	693	RS-2
762	759	BS-2
	771	
909	899	TS-3
1018	992	RS-3

動数は，ピッチ角の影響などにより，ばね横剛性にわずかな異方性があるため，解析値としては非常に接近した2個の固有振動数が得られる。しかし，この二つの固有振動数に対する振動モードは振動の向きが90°異なる以外は全く同形であるため，実験で区別することはできず，表2のように対応する実験値は一つである。また RM-1 と TM-1 の振りと伸縮のモードは，これらのモードに対する固有振動数が接近しているために解析結果のように区別して観察することは難しく，振り伸縮モードとして観察されるので，対応する実験値は一つである。

上に述べた以外の振りモードと伸縮モードに対しては，解析値と対応する実験結果が得られている。

実験結果と解析結果は良く一致しており，本報の有効性が示される。

5. 結　言

本報告では，コイルばねを用いた機構の動特性を有限要素法で解析することを提案し，次の結論を得た。

(1)コイルばねの静的平衡状態の解析解を用いることにより，コイルばねを用いた機構の動的解析に有効な収束性のよい解を与える要素マトリックスを導くことができる。

(2)コイルばねを用いた機構を有限要素法により解析すると，機構の動特性を総合的に把握でき，防振面においても防音面においても極めて有益な示唆が得られる。

本研究の遂行にあたって，日本発条㈱の板倉部長，斉藤，西山の両主査には，ばね製作をはじめ種々援助を頂いた。また図面の作成については大滝勝保技官の助力を得た。記して謝意を表します。なお計算は，山梨大学計算機センターを介して，東京大学大型計算機センターの HITAC M200-H によって行った。

文　献

1) ばね技術研究会編：ばね 改訂2版（昭45），9，丸善
2) Harison, M., Sykes, A.O and Martin, M : Wave Effect in Isolation Mounts, J. of the Acoustical Society of America, **24**-1, (1952), 62-71
3) 下関他3名：マトリックス解法による圧縮コイルばねの解析，機論**45**-36（昭54-8），901-910
4) 下関，早坂：円筒コイルばねの応力解析，機構論 No. 810-10（昭56-10），52-57
5) 沢登・福島：有限要素法によるコイルばねの動特性の解析（自由振動），機構論，No. 810-14（昭56-10）110-117
6) 沢登他3名：有限要素法による円筒コイルばねの応力解析，機構論，No. 820-16（昭57-10），271-273
7) 田島：振動の工学（昭45），346-348，産業図書
8) 漆崎：弁ばねの回転運動，機論，**35**-720（昭44-2），411-416