

総括酸素移動容量係数の算出方法に関する考察

平 山 公 明
今 岡 正 美
片 山 けい子

(昭和54年 8 月31日受理)

Studies on Computation of Over-all Oxygen Transfer Coefficients

by Kimiaki HIRAYAMA, Masaharu IMAOKA and Keiko KATAYAMA

Abstract

The "moment method" is one of reliable methods for calculating over-all oxygen transfer coefficients (KLa). However, this method requires such the condition that dissolved oxygen concentration should be zero at the start of measurement. From a practical point of view, this condition cannot always be satisfied. A "modified moment method" is then presented in this paper, which utilizes a quadratic moment in order to make it applicable even if initial dissolved oxygen concentration is not zero.

The "table C_s method", the "measurment C_s mehtod", the "log-difference method" and the "modified moment method" are compared. It is found that the calculated values according to the "modified moment method" and the "log-difference method" agreed exactly with measured values of dissolved oxygen concentration and that these two methods were more reliable than the other two methods.

1. はじめに

総括酸素移動容量係数 (KLa) は水中への酸素の溶解速度を示す指標であり、この値を算出することが、下水処理場のばっ気槽や、河川、湖沼での酸素供給能力を知る上で常に必要となる。 KLa を算出する方法として、Table C_s 法をはじめとするいくつかの方法が知られており、橋本、藤田の報告¹⁾²⁾によれば、その中でもモーメント法が良い再現性をもち信頼度の高いものとされている。ところで、モーメント法は本来、BOD の酸素消費曲線の反応速度定数を算出するために Moore³⁾ らが考案したものである。BOD 反応の場合、初期 BOD が必ずゼロとなるために、この方法を応用して KLa を求めるモーメント法は、岩本⁴⁾の報告、あるいは前回の報告⁵⁾で指摘されるように、測定開始時の溶存酸素濃度を 0mg/l にすることが必要である。ところが、通常、 KLa を測定する

際には酸素濃度の初期値をゼロにすることはあまりなく、 $0.1\sim 2\text{mg/l}$ の酸素が水中に残っている状態で測定を開始することが多い。酸素濃度の初期値がゼロでない場合でも、対数差法によれば KLa の算出が可能であることを前回の報告⁵⁾で示したが、2次までのモーメントをとれば、計算が多少繁雑になるけれども、モーメント法によっても KLa の値を計算することができる。すでに、Moore らの報告³⁾には BOD 反応に誘導期が存在する場合のデータの取り扱い方法として、2次のモーメント法が簡単に紹介されているが、本報告ではその方法を KLa の算出方法に応用して他のいくつかの算出方法と比較し、その有効性を確かめた。

2. KLa の各種算出方法

前回の報告では、実験開始時の溶存酸素濃度がゼロであるという条件のもとで5種類の算出方法を比較し

た。今回は酸素濃度の初期値がゼロでないという条件のもとで KL_a を算出するが、このような条件でも KL_a の算出が可能な方法は Table C_s 法、実測 C_s 法、対数差法およびモーメント法の4方法である。これらの方法は、前回に述べた方法⁹⁾と比べると、未知数がひとつ増えるため計算手順がやや複雑になる。以下にその計算方法の概略を述べる。

(1) Table C_s 法および実測 C_s 法

酸素が水中へ溶け込む時の酸素濃度の時間変化は次式で示される。

$$\frac{dC_L}{dt} = KL_a (C_s - C_L) \quad (1)$$

C_L : 水中の溶存酸素濃度 [mg/l]

C_s : 水中の飽和溶存酸素濃度 [mg/l]

KL_a : 総括酸素移動容量係数 [1/hr]

t : 時間 [hr]

(1)式を積分すると

$$\ln(C_s - C_L) = -KL_a t + C \quad (2)$$

C : 積分定数

となる。よって

$$C_L = C_s - A \exp(-KL_a t) \quad (3)$$

A : 定数

となる。(2)式より、もし C_s の値が前もってわかっていたら、 $\ln(C_s - C_L)$ と t とは直線関係にあり、その傾きから KL_a を求めることができる。Table C_s 法では何らかの計算式あるいは数表によって C_s を求め、実測 C_s 法では十分ばっ気を行った水の溶存酸素濃度を理化学的な方法で測定して C_s を求める。 C_s の決め方を除いたそれ以外の点については、Table C_s 法も実測 C_s 法も全く同じ方法で計算が行われる。本報告では、純水中の飽和溶存酸素濃度として衛生工学ハンドブック¹⁰⁾に記載されている値を、Table C_s 法の C_s 値として用いた。また、実測 C_s 法の C_s 値は、散気管で十分ばっ気した検水の溶存酸素濃度を、ウィンクラー法のナトリウムアザイド変法で測定することにより求めた。以上のようにして求めた C_s を用い、 t_i に対して $\ln(C_s - C_L(t_i))$ をグラフ上にプロットし、その傾きを最小自乗法によって計算し KL_a の値を求めた。さらに(3)式中の A の値を求めるためには

$$R = \sum_i [C_L(t_i) - \{C_s - A \exp(-KL_a t_i)\}]^2 \quad (4)$$

で R を定義し、この R の値が最小になるように A の値を決めるのがよい。ゆえに R を A で偏微分して $\partial R / \partial A = 0$ とおくと

$$\sum_i C_L(t_i) \exp(-KL_a t_i) - C_s \sum_i \exp(-KL_a t_i) + A \sum_i \exp(-2KL_a t_i) = 0 \quad (5)$$

したがって

$$A = \{C_s \sum_i \exp(-KL_a t_i) - \sum_i C_L(t_i) \exp(-KL_a t_i)\} / \sum_i \exp(-2KL_a t_i) \quad (6)$$

となる。

(2) 対数差法

Δt 間の濃度差を d で表すと

$$d(t) = C_L(t) - C_L(t - \Delta t) = A \exp(-KL_a t) \{ \exp(KL_a \Delta t) - 1 \} \quad (7)$$

両辺の対数をとると

$$\ln d(t) = -KL_a t + \ln A \{ \exp(KL_a \Delta t) - 1 \} \quad (8)$$

となる。右辺の第2項は Δt を一定にしておくくと定数になるので、 $\ln d(t)$ と t とは傾きが $-KL_a$ の直線関係になる。そこで、 C_L の測定を等時間間隔に $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ ($t_i - t_{i-1} = \Delta t$ (一定)) と行い、 $d(t_i) = C_L(t_i) - C_L(t_{i-1})$ とすれば、 t_i と $\ln d(t_i)$ の組み合わせから最小自乗法を用いて KL_a を求めることができる。 C_s と A を求めるには(4)式で定義した R を最小にすることを考える。未知数は A と C_s なので、 R を A と C_s で偏微分したものをゼロとおいて連立方程式を解く。 $\partial R / \partial A = 0$ より

$$\sum_i C_L(t_i) \exp(-KL_a t_i) - C_s \sum_i \exp(-KL_a t_i) + A \sum_i \exp(-2KL_a t_i) = 0 \quad (9)$$

また $\partial R / \partial C_s = 0$ より

$$\sum_i C_L(t_i) - n C_s + A \sum_i \exp(-KL_a t_i) = 0 \quad (10)$$

が得られる。この連立方程式を解くと

$$A = \frac{\sum_i C_L(t_i) \cdot \sum_i \exp(-KL_a t_i)}{n \sum_i \exp(-2KL_a t_i)} - \frac{n \sum_i C_L(t_i) \exp(-KL_a t_i)}{\{\sum_i \exp(-KL_a t_i)\}^2} \quad (11)$$

$$C_s = \frac{\sum_i C_L(t_i) + A \sum_i \exp(-KL_a t_i)}{n} \quad (12)$$

となる。

(3) モーメント法

(3)式において酸素の初期濃度がゼロ、すなわち $t = 0$ の時 $C_L = 0$ とすると $A = C_s$ となり(3)式は

$$C_L = C_s \{1 - \exp(-KL_a t)\} \quad (13)$$

となる。離散的にとられた $C_L - t$ の値から(13)式に

従って $KL a$ を算出する場合、未知数は C_s と $KL a$ の2つである。だから0次と1次のモーメント、つまり $\sum C_L$ と $\sum t C_L$ の値を計算すれば C_s と $KL a$ を求めることができる。この方法が従来行われているモーメント法である。

$t=0$ の時 $C_L \neq 0$ であれば(3)式中の A は $A \neq C_s$ となり、 $KL a$ を算出する際の未知数は C_s , $KL a$, A の3つとなる。したがってモーメント法を用いて計算するには、2次までのモーメントすなわち、 $\sum C_L$, $\sum t C_L$, $\sum t^2 C_L$ が必要となる。

2次までのモーメントを用い、(3)式より $KL a$ を算出することを考える。 C_L の値は Δt 間隔に $t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ ($t_i - t_{i-1} = \Delta t$ (一定)) と n 個とらわれているものとする。そうすると0次、1次、2次のモーメント M_0, M_1, M_2 はそれぞれ

$$M_0 = \sum C_L(t_i) = nC_s - A \sum \exp(-KL a t_i) \quad (14)$$

$$M_1 = \sum t_i C_L(t_i) = C_s \sum t_i - A \sum t_i \exp(-KL a t_i) \quad (15)$$

$$M_2 = \sum t_i^2 C_L(t_i) = C_s \sum t_i^2 - A \sum t_i^2 \exp(-KL a t_i) \quad (16)$$

となる。便宜上

$$\sum \exp(-KL a t_i) = E_0$$

$$\sum t_i \exp(-KL a t_i) = E_1$$

$$\sum t_i^2 \exp(-KL a t_i) = E_2$$

とおくと(14)式より

$$C_s = \frac{M_0 + A E_0}{n} \quad (17)$$

これを(15)(16)式に代入して整理すると

$$n M_1 - M_0 \sum t_i = A (E_0 \sum t_i - n E_1) \quad (18)$$

$$n M_2 - M_0 \sum t_i^2 = A (E_0 \sum t_i^2 - n E_2) \quad (19)$$

よって

$$\frac{n M_1 - M_0 \sum t_i}{n M_2 - M_0 \sum t_i^2} = \frac{E_0 \sum t_i - n E_1}{E_0 \sum t_i^2 - n E_2} \quad (20)$$

が得られる。(20)式の左辺は測定されたデータから計算される。一方、右辺は t_i さえ定めておけば $KL a$ のみに依存する関数である。そこで、たとえば $t_i = 0, 1, 2, \dots, 9$ hr $n=10$ と定めておき、右辺をいろいろな $KL a$ の値に対して計算を行い、 $KL a$ と $(E_0 \sum t_i - n E_1) / (E_0 \sum t_i^2 - n E_2)$ の関係をグラフにしておけば、測定結果より $KL a$ が求まる。また(18)式より

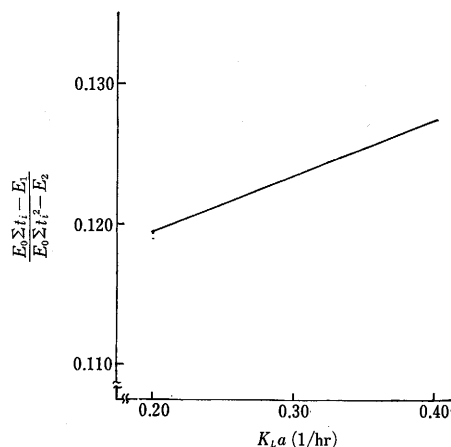


図-1 $KL a$ と $\frac{E_0 \sum t_i - n E_1}{E_0 \sum t_i^2 - n E_2}$ の関係

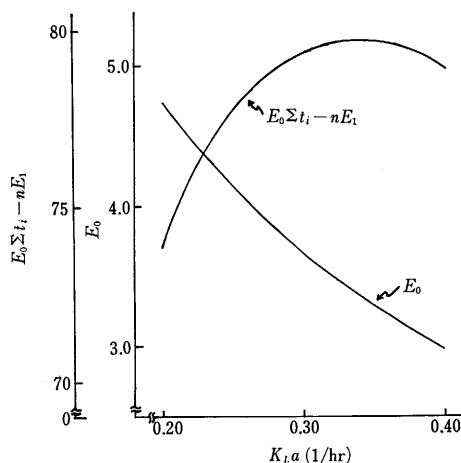


図-2 $KL a$ と $E_0 \sum t_i - n E_1$, E_0 の関係

$$\frac{n M_1 - M_0 \sum t_i}{A} = E_0 \sum t_i - n E_1 \quad (21)$$

であるから、 $KL a$ と $(E_0 \sum t_i - n E_1)$ の関係をグラフにしておけば、(20)式で求めた $KL a$ の値から $(n M_1 - M_0 \sum t_i) / A$ の値が求まり A の値を求めることができる。さらに(17)式より

$$\frac{n C_s - M_0}{A} = E_0 \quad (22)$$

であるから、 $KL a$ と E_0 の関係をグラフにしておけば、求めた $KL a$ の値から $(n C_s - M_0) / A$ の値が求まり C_s の値を求めることができる。

図-1に $t_i = 0, 1, 2, \dots, 9$ hr $n=10$ とした時の $KL a$

表-1 測定値の例

t_i (hr)	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
$C_L(t_i)$ (mg/l)	1.34	2.89	4.00	4.79	5.40	5.84	6.21	6.47	6.65	6.80

表-2 2次のモーメント法での計算例

$t_i(\text{hr})$	$C_i(\text{mg/l})$	$C_i \cdot t_i$	$C_i \cdot t_i^2$
0	1.34	0	0
1	2.89	2.89	2.89
2	4.00	8.00	16.00
3	4.79	14.37	43.11
4	5.40	21.60	86.40
5	5.84	29.20	146.00
6	6.21	37.21	223.56
7	6.47	45.29	317.03
8	6.65	53.20	425.60
9	6.80	61.20	550.80
Σ	50.39	272.96	1,811.39
$\Sigma t_i = 45 \quad \Sigma t_i^2 = 285$			

と $(E_0 \Sigma t_i - nE_1) / (E_0 \Sigma t_i^2 - nE_2)$ との関係を示す。また図-2には KLa と $E_0 \Sigma t_i - nE_1$, および KLa と E_0 の関係を示す。これらの曲線は測定時刻が 0, 1, 2, ..., 9hr の場合に対して作製したものであるが、一般に等時間間隔に10点測定を行った場合にも用いることができる。たとえば 0, 0.2, 0.4, ..., 1.8hr で測定値を得た時、まずそれらが 0, 1, 2, ..., 9hr で測定されたとして KLa を計算し、得られた KLa の値を5倍すればよい。 C_s と A の値は得られた値をそのまま用いることができる。

つぎに、図-1, 2を用いた KLa の算出方法の実例を示そう。今、表-1のような測定値が得られたものとする。このデータは等間隔に10個とられているので図-1, 2を利用できる。まず t_i を 0, 1, 2, ..., 9hr と

みなして表-2のような計算を行う。

$$\frac{E_0 \Sigma t_i - nE_1}{E_0 \Sigma t_i^2 - nE_2} = \frac{50.39 \times 45 - 10 \times 272.96}{50.39 \times 285 - 10 \times 1811.39} = 0.12312$$

であるからグラフより KLa は 0.291/hr を得る。したがって実際の KLa は $KLa = 0.291 \times 5 = 1.455/\text{hr}$ となる。さらに KLa が 0.291/hr の時の $E_0 \Sigma t_i - nE_1$ と E_0 の値はそれぞれ 79.22, 3.74 であるから

$$A = \frac{10 \times 272.96 - 50.39 \times 45}{79.22} = 5.83$$

$$C_s = \frac{5.83 \times 3.74 + 50.39}{10} = 7.22$$

が得られる。これらの値を用いて $C_L - t$ 曲線を $C_L = 7.22 - 5.83 \exp(-1.455t)$ という式で再現することができる。

3. 各種算出方法の検討

2. で述べた算出方法を比較検討するために酸素の溶解実験を行った。実験には水道水を用い、実験装置は前回の報告⁵⁾で用いたものを使用した。水温は $26^\circ\text{C} \pm 0.2^\circ\text{C}$ で一定とし、羽根の回転速度は 115rpm (攪拌レイノルズ数 $Re = 8.06 \times 10^4$)、溶存酸素の除去には窒素ガスを使用し、同一条件下で5回測定をくり返した。測定間隔は12分として10個のデータを取り、これを KLa ならびに C_s, A の算出にあてた。これらの値の計算結果を表-3に示す。 KLa, C_s, A が求まれば(3)式に代入して酸素濃度の時間変化を再現することができる。そこで、再現された $C_L - t$ 曲線がもとのデータとどのくらい一致しているかを表す指

 表-3 各種算出法による KLa, A および C_s 値

実験番号		Table C_s 法	実測 C_s 法	対数差法	2次のモーメント法
1	KLa (1/hr)	0.881	1.112	1.323	1.370
	A (mg/l)	5.82	5.55	5.44	5.41
	C_s (mg/l)	7.97	7.49	7.21	7.14
2	KLa (1/hr)	0.882	1.101	1.528	1.575
	A (mg/l)	5.72	5.46	5.37	5.35
	C_s (mg/l)	8.00	7.52	7.06	7.03
3	KLa (1/hr)	0.950	1.191	1.461	1.455
	A (mg/l)	6.15	5.90	5.84	5.83
	C_s (mg/l)	8.01	7.53	7.22	7.22
4	KLa (1/hr)	0.875	1.071	1.308	1.340
	A (mg/l)	5.87	5.53	5.40	5.38
	C_s (mg/l)	7.99	7.51	7.18	7.14
5	KLa (1/hr)	0.898	1.141	1.291	1.295
	A (mg/l)	5.56	5.28	5.21	5.22
	C_s (mg/l)	7.97	7.49	7.30	7.29

表-4 各種算出法による S の値

実験番号	Table C_s 法	実測 C_s 法	対数差法	2次のモーメント法
1	0.4125	0.1186	0.0117	0.0062
2	0.7804	0.3832	0.0072	0.0064
3	0.5430	0.1683	0.0053	0.0045
4	0.3015	0.1141	0.0013	0.0005
5	0.2416	0.0627	0.0008	0.0011

標を得るために、次に示すような、実測値と再現値の差の自乗和 S をそれぞれの算出方法ごとに計算した。

$$S = \sum_i \{C_L(\text{実測値}) - C_L(\text{再現値})\}^2 \quad (23)$$

S の計算結果を表-4に示す。この表から、モーメント法が最も高い再現性をもち、2次までのモーメント法を用いるモーメント法も非常に有効な KLa の算出方法であると言える。また、対数差法もモーメント法と同程度の高い再現性をもっており、 KLa を算出するのに有効な方法であると言える。これに対して Table C_s 法、実測 C_s 法はともに再現性が低く、特に Table C_s 法の場合、実測値からのずれが大きく、その水温に対する純水中の飽和溶存酸素濃度を C_s とみなして KLa を算出するということは、最も手軽な方法にはちがいないのだが、かなり問題があるように思われる。Table C_s 法や実測 C_s 法に比べて対数差法とモーメント法の再現性が高いのは、この2法がいずれも実測された溶存酸素濃度の値から C_s を求めていることに原因があると考えられる。対数差法あるいはモーメント法から求めた C_s の値は、実測値から求めた値であるので、一応実験条件を反映した値と考えられる。ところが、Table C_s 値は1気圧での水蒸気飽和と大気下の純水での飽和溶存酸素濃度の値であり、また、実測 C_s は散気管による気泡ばっ気での値であり、いずれも実験条件とは多少異なる条件下での値である。したがって、Table C_s 値および実測 C_s 値が実験条件下での C_s 値からずれるということが、この2つの方法では再現性が悪くなるひとつの原因だと考えられる。さらに表-4に示されるように、 KLa はモーメント法、対数差法、実測 C_s 法、Table C_s 法の順に大きな値をとっているが、 KLa の値は C_s の値に依存しており、 C_s が小さい値をとる程 KLa は大きな値をとることが言える。このように、 KLa の値は C_s の値のとり方に大きく左右されるという性質をもつので、実験条件下での C_s を便宜的に求めることが困難であるような場合には、本報告で用いた Table C_s 法や実測 C_s 法のような方法であらかじめ C_s の値を定めるよりも、対数差法やモーメント法のよう

に、 C_s を未知量として扱い、実測データから C_s の値も定める方がより適切であろう。

4. おわりに

KLa 算出方法の中ではモーメント法が最も信頼の高いものとされているが、今までのモーメント法を用いるには水中の溶存酸素の初期濃度がゼロであるという条件が必要であった。ところが、 KLa を測定する時にこの条件を完全に満たすことは実際上かなり難しく、モーメント法が適用できる場合というのは限られていた。そこでこの難点を解消するために、2次のモーメント法を導入することを試みた。その結果、多少計算が繁雑になるが、溶存酸素の初期濃度がゼロでない場合にも、2次のモーメント法で KLa の値が計算でき、しかもデータの再現性が非常に高いことが判明した。さらに対数差法もモーメント法に匹敵する再現性をもっており、一般に KLa の算出にはこのいずれかの方法を用いるのが適切であると考えられる。また、Table C_s 法と実測 C_s 法は再現性が悪く、このようにあらかじめ C_s を定めて KLa を算出する方法は、実験条件を十分考慮した上で用いるべきであると思われる。

参考文献

- 1) 橋本奨, 藤田正憲: 下水処理における総括酸素移動容量係数算出法の理論的研究, 水処理技術, 11, 6, pp 25—38(1970)
- 2) 橋本奨, 藤田正憲: 下水処理における総括酸素移動容量係数算出法の実験的研究(第1報), 水処理技術, 12, 4, pp 23—29(1971)
- 3) E.W. Moore, H.A. Thomas, Jr and W.B. Snow: Simplified Method for Analysis of B.O.D. Data, Sewage and Industrial Wastes, 22, 10, pp 1343—1355 (October 1950)
- 4) 岩本幸男: KLa 算出法の問題点とその解決法, 第16回下水道研究発表会発表講演集, pp 523—525 (1979)
- 5) 平山公明, 今岡正美, 片山けい子, 中村寛治: 表面ばっ気における総括酸素移動容量係数の算出方法に関する一考察, 山梨大学工学部研究報告, 29, pp 106—111 (1978)
- 6) 大橋文雄, 久保起他編: 衛生工学ハンドブック, p 444, 朝倉書店 (1971)