

高校生における文字式の理解に関する研究

－式をひとまとまりとみることに焦点を当てて－

A Study on Understanding of Literal Expressions of Students in High School Mathematics:
Focusing on Consideration of Compound Expressions as Single Objects

清 水 宏 幸
SHIMIZU Hiroyuki

高校生における文字式の理解に関する研究

一式をひとまとまりとみることに焦点を当てて－

A Study on Understanding of Literal Expressions of Students in High School Mathematics: Focusing on Consideration of Compound Expressions as Single Objects

清水 宏 幸
SHIMIZU Hiroyuki

要旨：本研究の目的は、高校数学において、式をひとまとまりとしてみることにについての理解の実態を明らかにすることである。この目的を達成するために、中学生調査と同じ分析の枠組みを用いて、質問紙調査の問題を作成し、調査を実施した。問題に対する記述を、解答の類型ごとに分類し、高校生が式をひとまとまりとみることにについての理解を分析した。その結果、高校生は、 $a+3b+5c=25$ を満たす a,b,c の値の組を見つけることはできてはいるが、文字式に含まれている文字の値に着目することに止まり、式をプロダクト化できず、ひとまとまりとみることができている生徒が一定数存在することが明らかとなった。また、一旦、プロダクトの見方によって式をひとまとまりと見ることができても、それをプロセス化することができない実態も浮かび上がった。

このことから、数学の学習を重ねていても、式をひとまとまりとみるができない生徒が一定数存在することが明確になり、この困難性を意識して指導する必要があることが明らかとなった。

1. 研究の背景

数学の学習において、問題を解決するために様々な事象を数学的に考察する際には、文字式を利用することが欠かせない。文字式を使いこなすことには多くの困難が伴うことが明らかとなっている(藤井, 1992, 1998; 久米ら, 1990; Clement, 1982など)。これまで筆者は、中学校数学において、文字式とその式における文字の理解に困難が伴うことについて研究を進めてきた(清水, 2019a, 2019b)。これらの研究では、文字式をひとまとまりと見ることの困難性をインタビュー調査によって明らかにした。

清水(2019b)の調査では、文字式の学習を一通り終えている中学校3年生を対象にし、文字式をひとまとまりと見ることの理解の様相を顕在化し、式をひとまとまりとみることができるようになる要件を明らかにした。主要な調査問題は、図1の通りである。

これは、複数の項を含む式 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみて1つの数値25に置き換え、答えを導く問題であり、その際の文字式やこの式における文字についての理解を探ることを意図している。

この問題に対して、複数の項を含む文字式をそれらの項がばらばらであると捉えている様相が明らかとなっている。また、これらの生徒は、等式の左辺を計算し、その結果が右辺の値になると捉えており、式を計算の過程であると捉えている様相が顕在化した。

さらに、式 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみるための要件は次の3点であることを明らかにした。

- (1) 文字 a,b,c それぞれに入る値は不問であることを理解すること。
- (2) $a+3b+5c=25$ の両辺が等しいことを理解すること。
- (3) $a+3b+5c=25$ と $a+3b+5c-10$ の2つの式に、 $a+3b+5c$ が共通していることを見いだすこと。

問題 さちこさんは文字と式の勉強をしているとき、次のような問題に出会いました。

$$a+3b+5c=25 \text{ のとき } a+3b+5c-10 \text{ の値を求めなさい。}$$

この問題を見てさちこさんはこう考えました。

<さちこさんの考え>

「 a と b と c に入る数がそれぞれいくつになるかわかっていないので、 $a+3b+5c-10$ がいくつになるかわからない。だから答えは、わからない。」

○このさちこさんの考えにあなたはどのように思いますか。これについてあなたの考えを書いて下さい。

○あなただったらこの問題をどう解きますか。解いて下さい。

図1 中学生調査1での主要な問題(清水, 2019b, p. 4)

以上より、筆者は、中学生の文字式の理解の研究をさらに進め、高校へ進学して数学の学習を進めていくうちに、これらの困難性は解消していくのか、また、解消されないまま残り、そのことが他の場面に影響するのかという新たなリサーチクエスションを設定した。

2. 研究の目的・方法

これまでの文字式の理解研究では、文字を本格的に学習し始める中学生に焦点を当てて、その理解を探る研究は多く存在するが、高校生を対象にした文字式の理解の研究は見当たらない。高校数学は、学習する内容が難しく、多くの生徒にとってその内容を理解することに困難が伴うことは知られているが、内容の理解以前に、どの分野を学習するにも常に必要となる文字式を上手く使いこなせないことから、数学を苦手とし、数学嫌いに陥っている可能性が少なからずあると考えられる。特に、中学生と同様に、式をひとつのまとまりとして操作したり、読み取ったりすることに困難性があるのではないかと考えており、その際、どのようなところに生徒が抵抗を感じているのかや、どこに誤概念が生じているのかは解明されていない部分が多い。本研究は、その一端を明らかにしようとしていることが、これまでの研究とは異なっている。

式をひとまとまりとみることにに関して、例えば、数Iの教科用図書(以後、教科書)では、次のような箇所で大切となってくる。数と式の単元において、「 $(a+b)^2(a-b)^2$ を工夫して展開してみよう。この式をどのようにみるとよいだろうか。」という問いかけに対して、「 $(a+b)$ 、 $(a-b)$ をそれぞれひとまとまりとみて計算してみよう。」とし、「 $a+b=A$ 、 $a-b=B$ とおくと、…」と計算の仕方が記述されている(俣野他, 2022:15)。教科書に式をひとまとまりとみることにについて明記されていることは、生徒がこのことを意識する上で重要なことであるが、教科書に書かれているからといって、この見方を問題なく全員の生徒ができるかということには疑問がある。例えば、計算は正しくできるが、 $a+b$ を1つの値を表すとみられず、 a に b をたすという操作として固定的にみている生徒がいるのではないかということである。勿論、式を計算の過程とみることは必要であるが、式を計算の過程とみたり、1つの値、結果とみたりするといった見方を柔軟に変えられるようにならないと式をうまく使いこなせるようにはならないと考える。

そこで、本研究の目的を、高校数学において、式をひとまとまりとみることにについての理解の実態を明らかにすることとした。

これらを明らかにするための方法として、中学生調査と同様に文字式とその式における文字の理解を捉える枠組みを明確にする。その上で、上述の中学生調査で行った問題を基に、いくつかの問題のセットを作成し、質問紙調査を実施する。そして、生徒の解答を分析し、式をひとまとまりとみることにについての高校生の実態を明らかにする。以上をまとめると次の通りである。

- (1) 文字式の理解とその式における文字の理解を捉える枠組みを設定する。
- (2) 調査問題を作成し、質問紙調査を実施する。
- (3) 生徒の解答状況から式をひとまとまりとみることについての実態を明らかにする。

3. 文字式の理解とその式における文字の理解の枠組み

式をひとまとまりとみることについての文字式、文字の理解については、清水（2019b）の分析と同一の枠組みを用いることとする。中学生のときに困難であった式の見方が、高校生になって解消できているのかどうかを探るため、同じ枠組みでの視点を用いて理解を捉えようと考えたからである。調査を実施したいずれの学校も公立の中学校であり、学習（家庭）環境、学習歴、理解度等様々な層の生徒が学級の中にいる。しかし、高等学校は、入学試験を実施しているため、ある一定の層の生徒で学級が構成されている。よって、正答率等を単純に比較できないことは念頭に置きながら、生徒の記述の中身等を分析することとする。

(1) 文字式の理解に枠組み

文字式を理解することについては、数学の概念の二面性が関連していると考えられる。

Sfard (1991), Sfard & Linchevski (1994) は、「抽象的な数学の概念が、(対象としての) 構造的なものと(過程としての) 操作的なものという2つの根本的に違う方法で考えられる」と述べている。また、Kieran (1992) は、数学の概念の二面性について、Sfardと同様に述べており、(対象としての) 構造的なものと(過程としての) 操作的なものを構造的・手続きのとよんでいる。そして、この二面性について、文字式の理解にも適用できると述べている。さらに、Gray & Tall (1993) は、「 $3a+4b$ 」のような代数的式表示は、『 a の3倍と b の4倍を加える』というプロセスと、1つの対象として心的に操作され得る代数式(プロダクト)を表している」と述べ、この両者を二重に表しているものをプロセプトとよび、この二重の理解ができるようになることが大切であると主張している。

以上のことより、文字式をひとまとまりとみることは、式を計算の操作を表すものと同時に、式自体が1つの値、結果を表すものといった、二重の見方ができることであると考えられる。

本稿では、文字式を操作的で手続きのな過程であるとみることを「プロセス」、構造的で文字式そのものを、結果を表す対象とみることを「プロダクト」とよび、この双方の見方ができることを「プロセプト」とよぶこととする。これらの見方を文字式の理解を捉える枠組みとする。

(2) 文字の理解の枠組み

文字の理解については、イギリスのCSMSのプロジェクトによる中学生理解調査の代数分野におけるKüchemann (1979a, 1979b, 1981) の分析から得た枠組みを用いることとする。Küchemannは、被験者である子どもたちが捉えている文字の意味の解釈が以下の6つのカテゴリーに分けられたと述べている。

- 数値化された文字
- 使われない文字
- 物(対象)として使われる文字
- 特定の未知数として使われる文字
- 一般化された数として使われる文字
- 変数として使われる文字

この6つのカテゴリーは、今から40年ほど前の研究から得られたものであり、この後の様々な文字の理解研究の基になっている(例えばClement, 1982; Stacey & MacGregor, 1997; 藤井, 1998; Radford, 2003; 小岩, 2016)。よって、古い研究で明らかとなった文字の意味の解釈ではあるが、現在の生徒の文字の理解に当てはめて分析できると考え、この6つの文字の意味の解釈を枠組みとする。

4. 実態調査

(1) 対象

2つの県・道の公立、私立高等学校合わせて5校（いずれも標準の進学校普通科）の3年生126名。

(2) 実施時期

2021年7月下旬、数Ⅰ・Aと数Ⅱ・Bを学習済。

(3) 調査対象について

本調査では、私立理系、国立文系の大学を目指す高校3年生を対象とする。数Ⅰ・Aの学習を一通り終え、数Ⅱ・Bまでの学習を終えている生徒を対象とした。多くの高校生が、これらの学習までを履修すると考えられ、文字に数を代入して計算の対象としたり、文字式をひとまとまりとみて式を変形したりすることが必要となるのが数列までの学習であると考えたため、これらの高校生を対象とした。

(4) 方法

調査問題は、大問7問からなる問題セット（付録参照）を用意し、問題用紙2枚からなる質問紙を用いた筆記形式の調査を、通常の授業時間の25分間を使って実施する。調査実施者は、当該学校の数学の授業担当の教師である。

(5) 調査問題について

問題セットのうち、本稿で分析対象とする問題は、問題5と問題7とする。問題7は中学生調査で実施した図1の問題を一部変えて出題している。この問題は式をひとまとまりとみてそれに数を代入することで正しい答えを導くことができる。この問題での反応をもとにして、問題5の「 $x-1=t$ としたとき、 $x\sqrt{x-1}$ を t の式で表すことを求めなさい」という問題の解答を分析する。この問題は1つの文字に複数の項をもつ文字式を代入することと、複数の項を1つの文字に代入することを同時に行うことを求めるものであり、生徒がこれらのことをうまく操作できるかを分析することとした。以下で詳しく述べる。

①調査問題7について

問題7については、式 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみて、答えを導く過程における文字式の理解を顕在化することをねらった問題である。 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみて、それを25と等しいと捉えることは、文字式の理解の枠組みでいうと、プロダクトの見方となる。一方、もう一つの式にある $a+3b+5c$ に25を代入し式の値を求めることは、プロセスとしてみて操作することが要求される。つまり、この問題を解く際には、プロダクトとプロセスの見方を柔軟に切り替えることが必要となる。このように2つの見方を柔軟に切り替えられる見方をプロセプトという。この見方ができない生徒を抽出するために、第3者のさちこさんを登場させ、その考えとして、「 a と b と c に入る数がそれぞれわかっていないので、 $a+3b+5c-10$ がいくつになるかわからない。だから、答えは、わからない。」を提示し、式をプロセスとしてみている考えに対して賛成か反対かどちらでもないかを判断した上で、その理由を記述することを求める。 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみるときには、 a,b,c に入る値は不問とすることが必要である。しかし、この見方ができない生徒は、 a,b,c それぞれに目が向き、それらに入る値を求めようとする。この理解の様相が中学生調査で明らかとなったため、他者の考えとしてこれを提示することによって、同じ考えの生徒の共感を促し、その理解を顕在化させることができると考えた。

②調査問題5について

問題5については、 $x-1$ を t に置き換えること、そして、 $x=t+1$ と変形した上で、 x を $t+1$ に置き換えることが求められる。1つの式に x が2つ含まれている問題で、 t の式で表すことができるかどうかをみることとする。 $x\sqrt{x-1}$ の根号の中に $x-1$ あるので、この式をひとまとまりとして t に置き換え

る．ここでは，プロダクトの見方が必要となる．さらに，根号の前についている x は，問題で与えられている $x-1=t$ を $x=t+1$ と変形し， $t+1$ に置き換えることが要求される．ここでは， x を t の式で表わし直すという操作が必要となり，プロセス，プロダクト両方の見方が必要である． $x-1$ をひとまとまりと固定的にみていると， $x=t+1$ の変形ができず， x の残った式のままの解答が予想される．ここから式をひとまとまりとみることの困難性を明らかにしたい．

問題7において，さちこさんの考えに賛成，または，どちらでもないと答えた生徒が，問題5をどのように解いているかをみることにより，どのように影響し合っているかに注目する．その際，各問題に解答類型を設定し，それに基づいて生徒の記述を振り分け，類型ごとの理解の様相を探ることとする．

(7) 調査結果

① 各問題における解答類型の反応率

問題7における反応率は，表1の通りである．

この問題における，正答の番号は，5と6である．正答率は59.5%である．ここでは，特に，さちこさんの考えに賛成と答えている解答（番号1,3,4）とさちこさんに反対と答えているが正しい式の値を求められなかった解答に注目する．番号1,3,4合計の反応率は15.9%である．（番号2の解答は1人もいなかった．）これらの解答は， a, b, c それぞれの値がわからないとこの式の値を求めることができないと答えているものである．番号7の反応率は12.7%である．この解答をした生徒の記述にも注目する．

表1 問題7の解答類型と反応率

番号	賛成・反対等	解答類型	反応率(%)
1	賛成	文字式により15を導く	1.6
2		$a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c を求めてそれを代入して15を導く	0.0
3		誤答（答えが求まってないものも含む）	10.3
4		無解答	4.0
5	反対	文字式により15を導く	57.9
6		$a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c を求めてそれを代入して15を導く	1.6
7		誤答（答えが求まってないものも含む）	12.7
8		無解答	0.8
9	どちらでもない	文字式により15を導く	0.8
10		$a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c を求めてそれを代入して15を導く	1.6
11		誤答（答えが求まってないものも含む）	3.2
12		無解答	0.8
99	上記以外の解答		1.6
0	無解答		3.2

問題5の $x-1=t$ としたとき， $x\sqrt{x-1}$ を t の式で表すことを求める問題の反応率は表2の通りである．正答は番号1であり，正答率は27.8%である．しかし，番号2は， $t-1$ にかっこを付けていない解答であり，計算結果の表現に誤りがあるが，代入に関しての処理は正しく行っている解答であると考えられる．ここでは，番号4に注目する．この解答は， x が残っている式を記述している．特に多かった解答が， $x\sqrt{t}$ である． $x-1$ を t に置き換えられているが， x を t を用いた式に置き換えることができなかった解答である．この解答に注目する．

表2 問題5の解答類型と反応率

番号	解答類型	反応率(%)
1	$(t-1)\sqrt{t}$ (同値の式もふくむ)	27.8
2	$t-1\sqrt{t}$	24.6
3	上記番号1, 2以外の t の式	9.5
4	x が残っている式	19.8
99	上記以外の解答	11.9
0	無解答	6.4

② 生徒の具体的な解答

a. 問題7の解答

問題7において、さちこさんの考えに賛成と解答している生徒がどのようなことを記述しているのかを具体的にみていくこととする。

a-1 問題7の番号3の典型的な解答

図2 生徒A17の問題7の解答

図3 生徒A49の問題7の解答

図2, 図3の生徒は, 連立方程式の加減法を用いて a, b, c の値を求めようとしている様子が見られる. その際, $a+3b+5c-10$ を $a+3b+5c-10=0$ のように「 $=0$ 」を無理矢理つけ, 等式にして解こうとしている. これらの解答は, どうにかして a, b, c の値を求めようとしている様子が見られる. 図3の生徒は, 「 $0=15$ 」という式が出てきてしまい, 求められないと記述している. この生徒は, 「 a, b, c の項がどちらも同じ数字だから～」と文字の項をバラバラにみて, 係数を比べていると考えられる.

$a+3b+5c-10=0$ $a+3b+5c=10$ に変形して
 左辺が等しくなるから
 ○ あなただったらこの問題をどう解きますか。解いてください。
 $\begin{cases} a+3b+5c=25 \dots \textcircled{A} \\ a+3b+5c-10=0 \dots \textcircled{B} \end{cases}$
 $a+3b+5c=25$
 $a+3b+5c=10$ (-)

図4 生徒A51の問題7の解答

図4は左辺 ($a+3b+5c$ のことと思われる) が等しくなるからという記述から、このことに気づいているが、それはあくまで加減法を用いて文字を消去しようとしていると考えられる。途中で記述を止めている。式を計算の対象としてみて、文字を消去し計算ができるようにするため、勝手に等式と解釈している様子も見られる。

a-2 問題7の番号7の生徒の解答

次に、問題7のさちこさんの考えに反対し、 $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組を求めてそれを代入して15を導くことができなかった解答をみることにする。下の図5、図6は、番号7の解答である。

a, b, c に入る数が決まっていなくて、
 それぞれに数字を代入して考える
 $a=4, b=2, c=3$ とすると
 $4+3 \times 2+5 \times 3=25$ と出る
 答えが1つになるとは限らないが、
 代入して答えを出せることが2つある
 ○ あなただったらこの問題をどう解きますか。解いてください。
 $a=4, b=2, c=3$
 $a+3b+5c$ より
 $4+3 \times 2+5 \times 3=25$
 $a+3b+5c-10$ より
 $4+3 \times 2+5 \times 3-10=15$

図5 生徒A36の問題7の解答

$a+3b+5c=25$ の式より、 a, b, c の数を見つけてみる。
 見つけた数を利用して、 $a+3b+5c-10$ に代入して
 答えを導き出す。答えは15と出る。
 ○ あなただったらこの問題をどう解きますか。解いてください。
 $a+3b+5c=25$ より
 $a=0, b=5, c=2$
 $a+3b+5c-10$ より
 $0+3 \times 5+5 \times 2-10=15$

図6 生徒A56の問題7の解答

中学生調査(清水, 2019b)のインタビューの中で、この等式を満たす a, b, c の値の組を1つないし複数求めることにより、 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみることができたことが明らかとなった。このような解き方をした高校段階の生徒がどのように文字式を捉えているのかを探る必要があると考えた。

図5は $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組を1つ求めることはでき、 $a+3b+5c-10$ の a, b, c にその値を代入したが、25と誤って解答している。この生徒は、 $a+3b+5c-10$ の答えが1つになるとは限らないと記述している。このことから、 $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組は1つしか求めているが、他にもあることを理解していると考えられる。しかし、求めた値の組によって式の値が変わることを考えていることもわかる。図6は、 $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組を1つ求めた後、2つ目を求めようとしている。ただし、 b の値を5とするところを3としているので誤っているが、 $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組が複数あることは理解していることがわかる。

これらの解答をみると、式をプロセス、つまり計算の操作を表していると捉えている様子が見られる。それは $a+3b+5c=25$ を満たす a,b,c の値の組を正しく求めながら、 $a+3b+5c-10$ に代入して答えを出すなどの表現で計算の対象としている記述が見られるが、値を求めることができていないことから、 $a+3b+5c-10$ を1つの値であると認識できていないことと考えられるからである。また、文字に数を代入して、 $a+3b+5c=25$ を満たす a,b,c の値の組を1組だけでなく、他にもあることを認識していることから、文字を一般化された数として捉えている様相がみられる。

b. 問題5の解答

ここでは、番号4の解答の中で、 $x\sqrt{t}$ という記述に注目する。この解答をした多くの生徒が、図7のように $x\sqrt{t}$ とだけ記述している。式 $x\sqrt{x-1}$ をみたときに、根号の中が $x-1$ となっている

図7 生徒A12の問題5の解答

ので、これだけを t に置き換えており、 x が根号の前に残っている。図7 生徒A12の問題5の解答
まい、 t を用いた式で表すことができていない解答である。確かに、 $x-1$ を1つの文字 t に置き換えることができていますので、 $x-1$ をひとまとまりとみることができていると考えられる。しかし、根号の前についている x を t の式で置き換えるためには、 $x-1=t$ を $x=t+1$ と目的をもった変形をし、1つの文字 x を $t+1$ に置き換えなければならない。文字式の代入を柔軟に使いこなせるようにするには、複数の項をもつ文字式を1つの文字に置き換えたり、1つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えたりすることが必要となる。そこでは、目的に応じてプロセスとみたりプロダクトとみたり、さらにはその両方の見方でみたりすることが大切となる。ここに生徒のつまづきがみられた。また、 t は $x-1$ と等しい、 x は $t+1$ と等しいと式変形をすることと同時に、1つの文字と複数の項をもつ文字式が等しいという文字の意味をどの程度捉えて答えを求めているのかは、さらに探る必要がある。

c. 問題5と問題7のクロス集計

表3 問題5と問題7のクロス集計（反応率％）

問題7 \ 問題5	1	2	3	4	99	0	総計
1	0.0	0.8	0.0	0.8	0.0	0.0	1.6
3	0.8	4.0	0.8	2.4	1.6	0.8	10.3
4	0.0	0.0	0.0	3.2	0.0	0.8	4.0
5	24.6	12.7	4.8	10.3	3.2	2.4	57.9
6	0.0	0.8	0.0	0.0	0.8	0.0	1.6
7	0.0	4.0	2.4	0.0	6.4	0.0	12.7
8	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.8
9	0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.8
10	0.0	0.8	0.8	0.0	0.0	0.0	1.6
11	0.0	0.8	0.8	1.6	0.0	0.0	3.2
12	0.0	0.0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.8
99	1.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.6
0	0.0	0.8	0.0	0.0	0.0	2.4	3.2
総計	27.8	24.6	9.5	19.8	12.0	6.4	100.0

問題7は、 $a+3b+5c-10$ の値を求めるために、 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみて、これが25と等しいことから、 $a+3b+5c$ を25に置き換え、 $25-10=15$ と答えを導く。ここでは、複数の項をもつ文字式を1つの数に置き換え、文字式に代入することが求められている。このような代入の仕方を求めている問題7と、複数の項をもつ文字式を1つの文字に置き換えたり、1つの文字を複数の項

をもつ文字式に置き換えたりすることが必要となる問題 5 との誤答の関係を調べるため、クロス集計を行った。問題 5 と問題 7 の 2 つの問題の解答類型をクロス集計すると、表 3 の通りである。表 3 の網かけの部分に注目する。これらのセルは問題 5 での番号 4 (x が残った式で表している記述) の解答のうち、問題 7 で、さちこさんに賛成と答えた生徒と、さちこさんに反対と答えて、式の値を正しく記述した生徒の割合である。問題 5 における番号 4 の反応率 19.8% のうち、16.7% がこれらの番号の解答に集中している。問題 5 の番号 4 の生徒のうち、番号 3 では 3 名中 2 名、番号 4 では 4 名全員、番号 5 では 13 名中 10 名が $x\sqrt{t}$ と解答している。特に、番号 5 に多くの割合が集中している。問題 7 は正答しているにも関わらず、問題 5 で x が残った式を解答している生徒が存在していることが注目される。この解答の生徒は、文字式で用いられている文字の具体的な値は不問にして、複数の項をもつ文字式をひとまとまりとみて 1 つの文字に置き換えることはできているが、同じ式の中で 1 つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えることができていないと考えられる。このように柔軟な文字式の扱いができない生徒が一定数存在していることが明らかとなった。

5. 考察

中学生調査 (清水, 2019b) では、式をひとまとまりと見るための要件として、I. で示した (1) ~ (3) が明らかとなっている。そして、「 $a+3b+5c=25$ について、この等式を満たす a, b, c の値の組をいくつも見つけるという操作 (プロセス) 的な活動が、式 $a+3b+5c$ の値を意識することを促し、 $a+3b+5c$ を構造化することに繋がった。このときの文字は、特定の未知数から一般化された数としての理解に移行していると考えられる。そして、 $a+3b+5c$ を構造 (プロダクト) 的にみることができれば、(2) の $a+3b+5c$ と 25 が等しいことを捉えることに繋がり、(3) の 2 つの式にある $a+3b+5c$ が共通していることも見いだせるようになる。文字式における文字については、当てはまる具体的な数の存在を確認しながら、最終的には 1 つ 1 つの文字には着目せず、特定の値を決めなくても処理できるようになる。このような様相が、この問題におけるプロセプトの見方であり、式をひとまとまりとして見ることでであると結論付けている。

一方、本稿で取り上げた高校生の記述を見ると、中学生と同様にこの問題を解く際に、 a, b, c の値に着目している生徒が一定数いることが明らかとなった。正答は 1.6% と少ないが、誤答の中にいることが分かった。このような解答をした生徒には a, b, c の値を求めたいがために、フレーズ型の式 $a+3b+5c-10$ を等式とみて、無理矢理連立方程式を解こうとする様子が確認された。また、 a, b, c の値に着目したときに、 $a+3b+5c$ をひとまとまりとみることにつながる、 $a+3b+5c=25$ を満たす a, b, c の値の組を見つけることはできている生徒がいることも確認された。さらにその値の組がいくつもあることを理解している生徒の存在も確認された。しかし、式 $a+3b+5c$ をひとまとまりと捉えて操作しようとしている記述が見当たらなかった。つまり、 $a+3b+5c$ の値を考える際に、 a, b, c の値は不問であることの理解には至っていないということである。このときの文字は、一般化された数として理解されていると考えられる。中学生調査におけるインタビューの中では、質問者の促しに応じて、生徒が実際に a, b, c の値の組を見つけ、その活動を通して、文字は、特定の未知数から一般化された数としての理解に移行していた様子を捉えることができた。つまり、式のプロセスの見方からプロダクト化が進み、答えを求めることができた。本調査では、式の操作等多くの経験を積んでいる高校生が、自ら a, b, c の値の組を見つけることができていながらもかわらず、式をプロダクトとしてみる事ができていない様相がみられた。よって、プロセスの見方をプロダクト化するという見方の進展は、年齢が上がるにつれて自然とできるようになるものではなく、一定数の生徒にはこの見方を促す何らかの指導が必要であることが明らかとなった。

さらに $x-1=t$ について、式 $x-1$ をひとまとまりとみて t に置き換えると、それが固定化され、こ

の式を $x=t+1$ のように変形できないことから、それらの生徒はいったん式をプロダクトとみたら、それが固定化され、式を変形したり、他の文字式をひとまとまりとみたりすることができないという様相も明らかとなった。これは、プロダクトの見方のプロセス化が困難であるという証左である。高校生になると、数列等の学習において具体的な数列から一般項を見いだすことや数学的帰納法により、数の性質を証明することなどが行われ、中学校数学より数値と文字の行き来が頻繁に行われる。このような活動により、多くの生徒が文字式を具体的な数値を用いて考察することはできていると考えられる。つまり、式をプロセスとみたり、プロダクトとみたりすることを頻繁に行っていると考えられる。このような活動では、文字を不特定な数とみて、文字式を計算することも多く行っているはずであるが、プロセスの見方のみに止まっており、プロダクト化されない実態や、逆にプロダクトの見方ができたら、それをプロセス化できない実態が浮かび上がった。

また、これらの困難性が、目的に応じて、複数の項をもつ文字式を1つの文字に置き換えたり、1つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えたりするといったプロセスとプロダクトの見方を柔軟に切り替えて処理するといった場面で顕著に表れることが明らかとなった。

本調査により、高校生の段階でも式をひとまとまりとみること（プロダクトの見方）と計算の過程とみること（プロセスの見方）を目的に応じて柔軟に切り替えることが困難である生徒が一定数存在していることが明らかとなった。

6. 結論

本研究の目的は、高等学校の数学において、式をひとまとまりとみることについての理解の実態を明らかにすることであった。この目的を達成するために、中学生調査と同様な視点で、問題を開発し、質問紙調査を実施した。そして、中学生にとって困難である、式をひとまとまりとみることが高校生になって解消できるのかどうかを生徒の解答を類型に分けて分析した。

その結果、高校生は、 $a+3b+5c=25$ を満たす a,b,c の値の組を見つけることはできてはいるが、文字式に含まれている文字の値に着目することに止まり、式をプロダクト化できず、ひとまとまりとみることができていない生徒が一定数存在することが明らかとなった。また、一旦、プロダクトの見方によって式をひとまとまりとみることができても、それをプロセス化することができない実態も浮かび上がった。

これまで高校生の文字式の理解についての実態はほとんど明らかとなっていない。本調査では、指導している側では当然できているだろうとみていた、式をひとまとまりとみることに困難があることがわかり、一定数の生徒は、学習を進めていってもこのことが解消されないままであることが明らかとなった。そして、これらの困難性が、目的に応じて、複数の項をもつ文字式を1つの文字に置き換えたり、1つの文字を複数の項をもつ文字式に置き換えたりするといったプロセスとプロダクトの見方を柔軟に切り替えて処理するといった場面で顕著に表れることが明らかとなった。

以上より、式をひとまとまりとみることは、教師側がこの困難性を意識して指導する必要があることが明らかとなった。

7. 今後の課題

本研究では、文字式の理解の困難点の1つが明らかとなったにすぎない。それは、質問紙調査での記述のみでの分析であるからである。引き続き、高校生の文字式とその式における文字の理解についてインタビュー調査などを実施してより深く探っていきたい。また、本稿で明らかとなった、式をひとまとまりとみることができない実態に対して、どのような学習指導が必要であるかを、中学校と高等学校の接続を視点として探っていきたい。

謝辞・付記

本研究の調査にご協力いただいた高等学校の生徒の皆さんと先生方に感謝申し上げます。

本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費基金基盤研究(c) (課題番号21K02573) の助成を受けて行われたものである。

引用・参考文献

- Clement, J.: Algebra word problem solutions: Thought processes underlying a common misconception. *Journal for Research in Mathematics Education*, 13, 1, 16-30. 1982.
- 榎本哲士: 中学校数学科における二元一次方程式の関数的見方に関する理論的分析-数学的概念の二面性を視点として-. 日本教材学会誌教材学研究, 26, 49-56. 2015.
- 藤井斉亮: 児童・生徒の文字の理解とミスコンセプションに関するインタビュー調査. 数学教育学論究, 74, 58, 3-27. 1992.
- Gray, E., Tall, D.: Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic, *Journal for Research in Mathematics Education*, 25-2, 116-140. 1994.
- Kieran, C.: The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.): *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.390-419). A Project of the National Council of Teachers of Mathematics, NewYork, Macmillan. 1992.
- 小岩大: 文字式の理解を捉えるための調査問題の開発-process-productに焦点を当てて-. 日本数学教育学会第37回数学教育論文発表会論文集, 256-264. 2004.
- 小岩大: 学校数学における変数の理解に関する研究-文字式の大小比較問題の解決に焦点を当てて-. 東京学芸大学博士論文, 2016.
- Küchemann, D.: 8 Algebra. In K. M. Hart. (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16*, (pp. 102-119), London, John Murray. 1981.
- 俣野博他: 数学 I Standard, 令和3年検定教科用図書, 東京書籍. 2021.
- Radford, L.: Gestures, speech, and the sprouting of sings:A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5, 1, 37-70. 2003.
- Sfard, A. & Linchevski, L.: The gains and the pitfall of reification - The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228. 1994.
- 清水宏幸: 中学校数学における文字式の理解に関する研究-文字式をひとまとまりと見ることの困難性に焦点をあてて-. 日本数学教育学会第30回数学教育論文発表会論文集, 247-252. 1997.
- 清水宏幸: 中学生の方程式の立式過程に見られる文字式の理解に関する研究-文字式を分離して捉える見方に焦点を当てて-. 日本数学教育学会誌, 101, 7, 2-12. 2019a
- 清水宏幸: 文字式とその式における文字の理解に関する研究-式をひとまとまりとみることに焦点を当てて-. 日本数学教育学会誌, 101, 11, 2-13. 2019b.
- 清水宏幸: 学校数学における文字式の理解に関する研究-式をひとまとまりと見ることに焦点を当てて-. 東京学芸大学博士論文. 2020.
- Stacey, K., MacGregor, M.: Multiple referents and shifting meanings of unknowns in students' use of algebra. *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol.4, 190-197), Lahti, PME. 1997.

付録

＜調査問題＞

これは成績には関係ありませんのでリラックスしてやってください。消しゴムを使わず、どのように計算したのかを詳しく書いてください。

問題1 第 n 項が $n+1$ である数列の第 $2n+1$ 項を式で表してください。

問題2 n を整数とすると、 $(n-3)+(n-2)+(n-1)$ は何を表していますか。言葉で説明してください。

問題3 a は2桁^{けた}の自然数、 b は1桁の自然数です。 $10a+b$ は何を表していますか。言葉で説明してください。

問題4 確率 p で成功するような試行を独立に n 回反復して行ったとき、 n 回のうち k 回成功する確率は、

$${}_nC_k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1} p^k (1-p)^{n-k}$$

と表せます。

$p=\frac{1}{3}$, $n=5$ のとき、2回成功する確率を求めてください。途中の計算式も書いてください。

問題5 $x-1=t$ とします。このとき、 $x\sqrt{x-1}$ を t の式で表してください。

問題6 m, n は自然数とします。このとき、 $5m+2$ はどのような数を表していますか。

また、 $5(m+n)+3$ はどのような数を表していますか。それぞれ、言葉で説明してください。下に書いてください。

$$5m+2$$

$$5(m+n)+3$$

問題7 次の問題に自分の考えをくわしく書いてください。

1. さちこさんは文字と式の勉強をしているとき、次のような問題に出会いました。

$a+3b+5c=25$ のとき $a+3b+5c-10$ の値を求めなさい。

この問題をみて、さちこさんは次のように考えました。

「 a と b と c に入る数がそれぞれわかっていないので、 $a+3b+5c-10$ がいくつになるかわからない。だから、答えは、わからない。」

このさちこさんの考えにあなたは賛成ですか、反対ですか。どれかに○をつけてください。

賛成・反対・どちらでもない

どうしてそう考えたのか、あなたの考えを書いてください。