

# 高校生に向けた結び目理論の教育実践

## －結び目の理解と $p$ 彩色可能性－

A practice on mathematics education of knot theory for high school students:  
Understanding knots and  $p$ -colorability

中 村 拓 司<sup>1</sup>  
NAKAMURA Takuji

**要約：**結び目理論は空間内の結ばれた閉曲線を分類する数学である。「結び目」自体は日常にも現れる言葉であるが、数学的な研究対象となっている。本稿では、空間図形としての結び目を理解することによる空間認識能力の向上、相等ではない「同値」ということを理解し、結び目の分類に対する不変量の数学的考え方を掴むことを目的とした中等数学教育における授業実践として、山梨大学が毎夏開催している「山梨県下の高校生への公開授業」で行ったものについて報告する。

**キーワード：**空間図形、結び目、射影図、不変量、 $p$  彩色可能性

## I はじめに

本稿は現代数学の一分野である「結び目理論」を初等・中等数学教育における教材に用いることを目標とした授業を、山梨大学が毎夏開催している「山梨県下の高校生への公開授業」において実践した報告である。空間図形としての結び目を理解することにより空間認識能力の向上を目指し、また、相等ではない「同値」という概念を理解し、結び目の分類に対する不変量という数学的な考え方を掴むことが本授業の目標である。

平成30年告示の高等学校学習指導要領解説数学編 理数編[14]では、第1章第3節で数学科の目標として「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を育成する」ことを掲げている。同節①で「数学的な見方・考え方」は、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること」とまとめられ、同節②では数学の問題発見・解決の過程は主として「日常生活や社会の事象を数理的に捉え、数学的に表現・処理し、問題を解決し、解決過程を振り返り得られた結果の意味を考察する過程」と「数学の事象から問題を見だし、数学的な推論などによって問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的、体系的に考察する過程」があるとされている。日常での事象を数学的に考えることが上記の目標を達成する一つの過程となっている。高等学校で学ぶ図形分野は数学I「図形と計量」、数学II「図形と方程式」、数学A「図形の性質」、数学C「ベクトル」「平面上の曲線と複素数平面」などが主で、指導要領における学習内容として図形分野においても「日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、」というキーワードが入っている。

結び目は靴紐やネクタイ、キャンプでのロープワークなど、日常に現れるもので、一本の紐の両端を持ち、結わえてつくるものである。数学ではこの結わえた紐の両端をくっつけて閉じた輪として考える。数学的でも平易な言葉でいうと、3次元空間内の自分自身とぶつからない(滑らかな・

<sup>1</sup> 科学教育講座

区分線形な) 閉曲線のことである. この日常にある結び目を数理的に捉え, 論理的, 体系的に考えることは, 初等・中等数学教育においても, 図形分野の学習として新たな視点を与えるものと考えられる. 数学における結び目は, 厳密には集合・位相空間論, 多様体論など大学の専門的な数学を経て定義されるものであるが, そこに目をつぶると

- 日常にある紐としてイメージできる
- 変形など直観的に理解しやすい
- 線でできた図形として見やすい

など図形分野の学習対象として親しみやすいと考えられる. 空間認識能力の向上が図れたり, 不変量の考え方や, 他分野の数学の内容などさまざまな数学的思考が現れたりすることもあり, 近年, 初等・中等数学教育の学習教材として導入する研究が盛んである. 例えば, 大阪市立大学(現在は大阪公立大学)の河内と大阪教育大学の岡森・柳本を中心としたプロジェクトは2004年に大学・高等学校・中学校・小学校の教員メンバーによって結成され, 現在まで活発な教育実践研究が行われている. 今回の授業で取り扱った, 結び目の観察と平面への描画や $p$ 彩色可能性という不変量も扱っている([3, 4, 5, 6, 7, 8]).

## II 結び目理論

ここでは, 本授業にかかわる結び目についての用語等を紹介する. より詳しくは参考文献 [2, 12] を参照されたい.

### 1 結び目の定義

**結び目**とは3次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^3$  に滑らか, または区分線形的に埋め込まれた円周  $S^1$  のことをいう(図1左参照, ただし, 線が切れて見える部分は, 実際に切れているのではなく, 切れていない方の線より奥側にあることを示す). 直観的には我々がいる3次元空間内の閉じた一本の輪である. 日常の言葉を使うと, 図1右のように一本の紐を用意して, それを結び, その両端をくっつけて閉じたものを結び目という. 結ばれていない単なる輪を**自明な結び目**という. これは  $\mathbb{R}^3$  内に埋め込まれた円板の境界となっている閉曲線である.

### 2 結び目の同値性

2つの結び目  $K$  と  $K'$  が**同値**であるとは,  $\mathbb{R}^3$  から  $\mathbb{R}^3$  への向きを保つ同相写像  $h$  で  $h(K) = K'$  となるものがあるときをいう. 直観的にいうと, 結び目を切ったり, 自分自身を横断したりすることなしに, 連続的な変形で, 同じ形にできるときをいう. 図2では一番左の結び目の右下方の一部分を持って, 手前に引きながら上の方に動かすと, 左から二番目の結び目となる. それを切らずに整

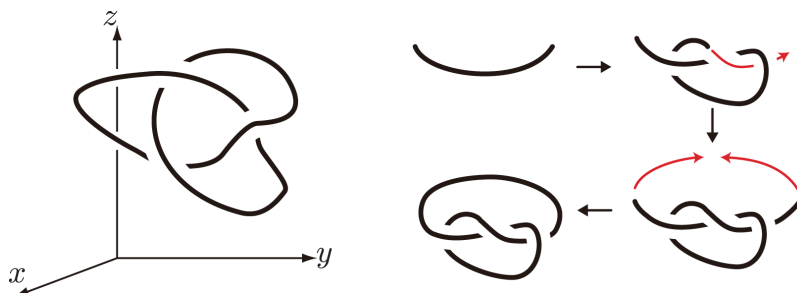


図1 結び目

形すると一番右の結び目になることが分かる。ワイヤーやチューブで結び目を実際に作ったときに、それをぐにゃぐにゃと変形することに対応する。これが「直観的に結び目を理解しやすい」ことに当たると考えられる。図2の一番左の結び目を三葉結び目という。一番右の結び目は図1右のように紐を一回結んで得られるので、一重結びと呼ぶことにすると、「三葉結び目と一重結びは同値である」ということになる。結び目理論では同値な結び目同士は同じものとして扱う。

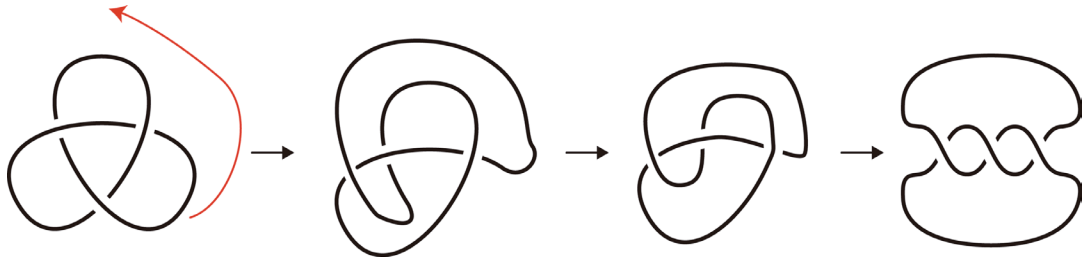


図2 結び目の同値性

### 3 結び目の射影図

結び目  $K \subset \mathbb{R}^3$  について、 $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  に対し、 $p(x, y, z) = (x, y, 0)$  とする写像  $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  で、 $K$  の  $p$  による像  $p(K)$  の多重点が横断的な2重点のみであるようなものを射影という。射影  $p$  における  $K$  の像  $p(K)$  の各横断的2重点に第3成分の大小の情報を付加した図を結び目  $K$  の射影図という。一般的には第3成分が大きい方の線をつなぎ、第3成分が小さい方の線を切って描くことで表す(図3参照)。これを射影図の交点といい、つながっている方を上交差、切れている方を下交差という。下交差から下交差までのつながっている線を弧という。交点を一つも持たない射影図ではそれ自体が一つの弧である。

射影図があれば、それが表す結び目が復元される。結び目理論では結び目  $K$  と同値な結び目を同じものとして扱うため、 $K$  と同値な結び目の射影図も「 $K$  の射影図」、または「 $K$  を表す射影図」や「 $K$  が持つ射影図」という。自明な結び目とは交点を一つも持たない射影図で表される結び目である。

結び目の射影図の一部分を変形することを考える。図4の3種類の変形をライデマイスター変形という。一つ目は射影図の弧の一部をひねったり、ひねりを外したりする変形 (R1)、二つ目は射影図の近い二つの弧を重ねたり、重なりをとったりする変形 (R2)、三つ目は空間内で上中下の関係にある三つの紐において、うち一つの紐を滑らす変形 (R3) である。

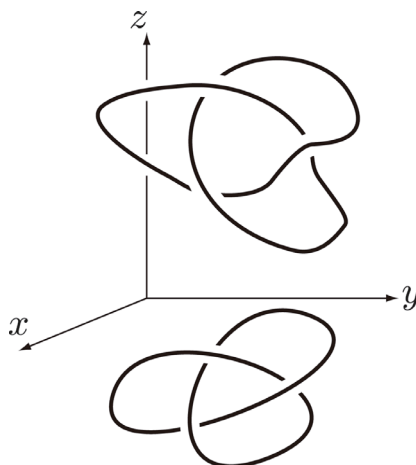


図3 結び目の射影図

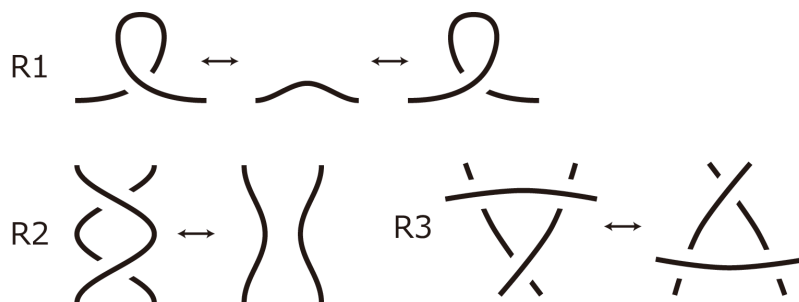


図4 ライデマイスター変形

3種類のライデマイスター変形を行った前と後で、それぞれの射影図が表す結び目が同値であることは明らかである。実はその逆が成り立つことが知られており、結び目理論を（特に組み合わせ的に）展開する上での土台となっている。

**定理 II.1 (Reidemeister, 1929).** 結び目  $K, K'$  の射影図をそれぞれ  $D, D'$  とする。  $K$  と  $K'$  が同値であることの必要十分条件は  $D$  と  $D'$  が平面上の同位変形とライデマイスター変形の有限回の列で移りあうことである。ここで、平面上の同位変形とは、射影図が描かれている平面自体を連続的に変形することである。

結び目を空間内で連続的に変形した過程が、射影図ではたった3種類のライデマイスター変形の組み合わせで記述できるという意味である。

#### 4 結び目の不変量： $p$ 彩色可能性

与えられた二つの結び目の同値性を判定することが結び目理論の中心課題である。同値であることは実際に結び目やその射影図を変形することで、同じ形になることを確認することで得られる。しかし、同値でないことの判定は難しい。「何回変形しても、同じ形にならないから同値ではない」という結論は数学的ではない。そこで、不変量という考え方が必要である。

結び目の**不変量**とは、結び目に対して定義された量  $f$  で、二つの結び目  $K$  と  $K'$  が同値ならば  $f(K) = f(K')$  となるもののことである。定理 II.1 から結び目  $K$  を表すすべての射影図はライデマイスター変形で移りあうので、結び目の射影図から得られる量で、ライデマイスター変形で変わらないものがあれば、それは結び目の不変量となる。不変量  $f$  があると、結び目が同値でないことが判定できる。対偶の考え方により、不変量  $f$  に対し、結び目  $K$  と  $K'$  について  $f(K) \neq f(K')$  ならば  $K$  と  $K'$  は同値でないことが分かる。注意することは不変量の値が等しくても  $K$  と  $K'$  が同値であるとは限らないということである。例えば、平面図形において、二つの三角形は合同であるときに同値であると考えると、面積は不変量である。二つの三角形が合同ならば面積は必ず等しくなる。一方、面積が等しい三角形が合同とは限らないのは明らかである。

ここでは、 $p$  彩色可能性という結び目理論において初等的な不変量を紹介する ([2, 12] 参照)。奇素数  $p$  を一つ固定する。結び目の射影図  $D$  の弧に、 $0, 1, 2, \dots, p-1$  の  $p$  個の整数のうち一つを割り当てる。  $D$  のすべての弧に  $0, 1, 2, \dots, p-1$  のどれかが割り当てられている。さらに、各交点で**交点条件**：「交点に集まる3本の弧について、図5のように下交差の弧に  $x$  と  $z$ 、上交差の弧に  $y$  が割り当てられているとき、 $x + z - 2y \equiv 0 \pmod{p}$  が成立」をみたしているとき、  $D$  への  $0, 1, 2, \dots, p-1$  の割り当てを  $D$  の  $p$  彩色という。

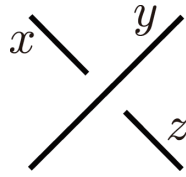


図5 交点条件

ここで、 $x + z - 2y \equiv 0 \pmod{p}$  は整数  $x + z - 2y$  が  $p$  で割り切れることを表す。一般に、整数  $a, b$  に対し、 $a \equiv b \pmod{p}$  は  $a$  を  $p$  で割った余りと、 $b$  を  $p$  で割った余りが等しいことを表している。ただし、 $p$  で割った余り  $r$  は  $0 \leq r < p$  とする。

すべての弧に同じ整数  $a$  を割り当てると、各交点では

$$a + a - 2a = 0 \equiv 0 \pmod{p}$$

が成り立つので、これも  $p$  彩色である。これを自明な  $p$  彩色という。そうではない彩色、つまり、全体で2種類以上の整数が割り当てられているものを非自明な  $p$  彩色という。射影図  $D$  が  $p$  彩色可能であるとは、 $D$  に非自明な  $p$  彩色ができるときをいう。

例II.2.  $p = 5$  のときの5彩色を考える。図6は8の字結び目と呼ばれる結び目の射影図である。図6左の射影図は、1, 2, 3, 4の四つの整数が各弧に割り当てられている。交点  $c_1$  では上交差の弧が1, 下交差の弧が2と4である。このとき、

$$c_1 : 2 + 4 - 2 \times 1 = 4 \not\equiv 0 \pmod{5}$$

であるので、交点条件が成立していないため5彩色ではない。

図6右は結び目の射影図としては同じだが、整数の割り当てが異なり、0, 1, 3, 4の四つの整数が各弧に割り当てられている。交点  $c_1$  では上交差の弧が1, 下交差の弧が3と4である。このとき、

$$c_1 : 3 + 4 - 2 \times 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

であるので、交点条件は成立している。他の交点でも

$$c_2 : 1 + 0 - 2 \times 3 = -5 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$c_3 : 3 + 0 - 2 \times 4 = -5 \equiv 0 \pmod{5}$$

$$c_4 : 1 + 4 - 2 \times 0 = 5 \equiv 0 \pmod{5}$$

となり、交点条件が成立している。よって、この割り当ては非自明な5彩色である。つまり、この射影図は5彩色可能である。

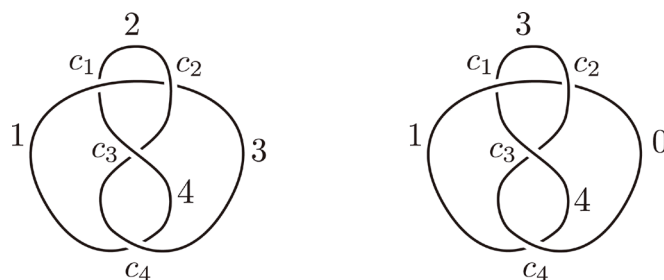


図6 8の字結び目の射影図の5彩色

奇素数  $p$  を一つ固定したとき，射影図の  $p$  彩色について，次が知られている．

**定理 II.3.** 結び目  $K$  のある射影図が  $p$  彩色可能ならば， $K$  を表すどんな射影図も  $p$  彩色可能である．

つまり， $p$  彩色可能性は結び目の不変量である．よって， $p$  彩色可能な射影図を持つ結び目と  $p$  彩色可能でない射影図を持つ結び目は同値でないことが分かる．ここから，結び目  $K$  が  $p$  彩色可能な射影図を持つとき，「 $K$  は  $p$  彩色可能である」ということができる．

**例 II.4.** 自明な結び目は図 7 左のような交点のない射影図を持つので，任意の奇素数  $p$  に対して非自明な  $p$  彩色ができないため， $p$  彩色不可能である．三葉結び目は図 7 右のように  $p = 3$  で非自明な 3 彩色が可能である．よって，定理 II.3 より，三葉結び目と自明な結び目は同値でないことが分かる．つまり，三葉結び目（一重結び）がほどけないことが証明されたことになる．同じく例 II.2 から，8 の字結び目は 5 彩色可能であるので，8 の字結び目も自明な結び目と同値でない．

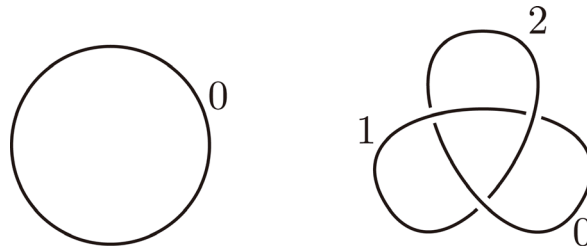


図 7 自明な結び目と三葉結び目

定理 II.3 の証明は射影図が  $p$  彩色可能であるという性質がライデマイスター変形で保たれることを確かめることで得られる．ライデマイスター変形をする局所的な射影図に図 8 のように整数が割り当てられていると交点条件をみたし，ライデマイスター変形をする前と後で，端点の整数が変化しない．よって，ライデマイスター変形をする前の射影図が非自明な  $p$  彩色されていたら変形後も端点の整数が保たれるように非自明な  $p$  彩色が可能である．

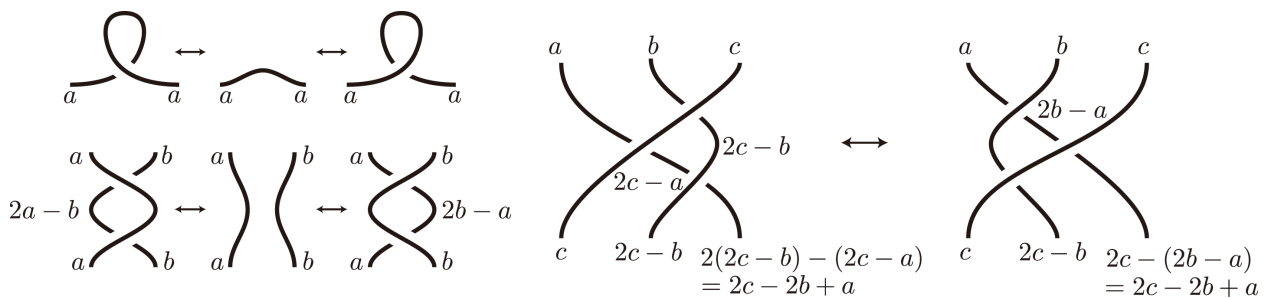


図 8 ライデマイスター変形と  $p$  彩色

### III 授業実践

本授業は「2023 年度山梨県下の高校生への公開授業」において，8 月 3 日（木）に実践した高校 1 ～ 3 年生（参加者 61 名）を対象とした 90 分の授業である．これを高等学校での 50 分授業 2 回（本授業では前半と後半）として想定した．授業で使用したワークシートを第 V 章に添付する．

## 1 授業のねらい

空間図形として結び目及びその変形を頭の中でイメージすること・実際にワイヤーで作り観察することで、結び目がなす3次元的な奥行きやその見え方を理解する。また、結び目を平面に描くことで、空間内の結び目の理解を平面上で対応させる。このように結び目を理解することで、空間認識能力とそれを平面で表現する能力の向上が得られると考える。

結び目の分類を通して「一見すると異なるが同値」という観点を得ること、同値でないこと示すために不変量の考え方が必要なことを理解する。また、

- 世の中は結び目であふれている。身近である。
- 空間図形の学習として、より簡単で、より複雑な具体例を考えられる。
- 3次元空間と1次元の結び目という次元の差が2なので意味がある。
- DNA科学などへの応用、数理物理との関連。

などを挙げ、結び目の数学の意義を認識してもらうことも意識した。

## 2 前半：結び目の空間認識・平面への描画・変形のイメージ

前半は空間図形として結び目を考える観点を意識した授業展開を目指した。

本授業では図9にある直径2mmのワイヤーを実演及び受講生の作業用に使用した。これは日本化線株式会社の「自遊自在」というワイヤーで、太さに比して十分な柔らかさを持っている。太いので観察しやすく、変形に力が必要ないため、結び目の学習教具として有用である。

### (1) 導入：空間図形

まず、導入として、ユークリッド幾何学と位相幾何学の違いを簡単に説明し、これまで学んだ空間図形である立方体や角柱などについて、小中高の教科書に良くある「頂点の数・辺の数・面の数」を数えるということを復習した。高等学校の数学Aでは、頂点の数－辺の数＋面の数が凸多面体では常に2になることが書かれている。これが位相幾何学の定理（球面と同相な多面体では常に2になる）であることを説明した（ワークシート【1】参照）。

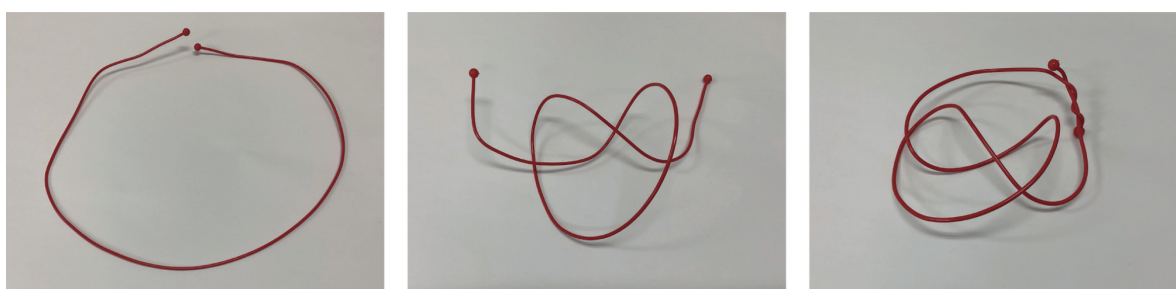


図9 授業で使用したワイヤー

### (2) 結び目の認識

まず、スライドで一重結びを図として説明し、その後、手元のワイヤーを書画カメラでスクリーンに映し、実際の一重結びを提示した。次にワイヤーを配布し、「一重結びを作り、両端をねじって止めて輪にする」ことを指示し、一重結びを作ってもらった。図9のような形である。何も意識せずに一重結びを作ると、図10のように右手系と左手系と呼ばれる2種類が得られる。隣席同士で見比べ、裏返して見るなどできたものを様々な角度から観察した。

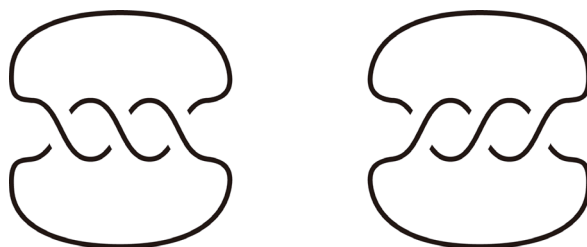


図 10 右手系と左手系の一重結び

### (3) 結び目の変形

三葉結び目から一重結び目への変形をワイヤーを用いて書画カメラで映して見せた後、受講生も実際に手元のワイヤーで変形を行った。それを踏まえて、受講生はスライドの図（図11左）の変形をワークシート【2】に描いた。ここでの留意点は実際に空間における変形と平面に描かれた図形の変化が対応していることを意識することである。

この描画を踏まえ、図11右にある問を考えた。まずは、空間内の結び目の変形をイメージすることを強調し、判定させた。(1)(2)が自明な結び目に同値であり、実際の変形過程をスライドで見せ、ワークシート【3】に描いた。ここでも空間における変形を意識させた。また、(3)を考えることで、三葉結び目（一重結び）がほどけないことには証明が必要なことを説明した。

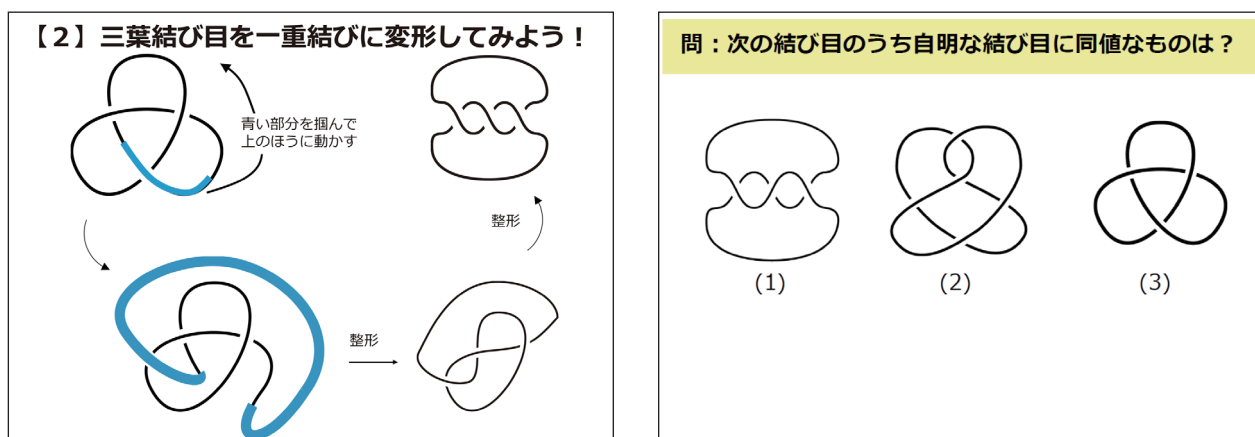


図 11 実際のスライド

### (4) 不変量の考え方

結び目理論の中心課題は「与えられた2つの結び目が同値かどうかの判定」であることを説明し、特に結び目が同値でないことを判定するのに不変量の考え方が必要なことを説明した。

### (5) 結び目の平面への描画

結び目の射影図を定義し、自分で作った一重結びの射影図を描いた。さらに、その一重結びを変形し、別の射影図を描いた（ワークシート【4】参照）。その後、ライデマイスター変形とライデマイスターの定理を説明し、最初に考えた空間内での結び目のダイナミックな変形をライデマイスター変形での射影図の変形として確認した。

## 3 後半：結び目の不変量・ $p$ 彩色可能性

後半は実際に結び目を区別することを目標とし、初等的な不変量である  $p$  彩色可能性を導入した。



$p$  彩色は余りの概念を用いて、結び目の射影図の各弧にルール通りに整数を割り当てるもので、整数の性質の学習要素もあり、参考文献にある先行的な実践においても  $p=3$  に限定したり、より深い“階数”という概念だったり登場している ([3, 4, 5, 6, 7, 8], [9, 10, 11]).

(1) 導入：合同式

合同式は高等学校で扱っていない場合もあるため、

$$6 + 3 \equiv 0, 2 + 5 \equiv 1, 4 + 4 \equiv 2, 9 - 5 \equiv 1, 7 + 2 \equiv 0, 7 - 8 \equiv 2 \text{ のとき } 5 + 8 \equiv ?$$

というクイズとして導入した。次にワークシート【5】に従い、合同式を用いた計算を行った。

- $4 + x \equiv 2 \pmod{3}$  をみたす  $x$  は  $0, 1, 2$  のうちどれ？
- $x = 2, y = 4$  のとき  $2y - x \equiv ? \pmod{5}$
- $x = 3, y = 1$  のとき  $2y - x \equiv ? \pmod{5}$

ここで行った「 $x, y$  に対して、 $2y - x$  を求める」計算は後の  $p$  彩色で現れるものである。

(2)  $p$  彩色可能性

結び目の射影図の各弧に整数を交点条件に合うように割り当てる  $p$  彩色を導入した (図12左及びワークシート【6】参照)。次に自明な  $p$  彩色を説明し、図12右のスライドを用いて、 $p=3$  について自明な3彩色しかできない射影図があることを確認した (ワークシート【7】参照)。この射影図は図11右の問で出てきた自明な結び目を表す射影図である。

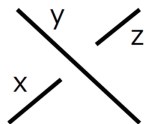
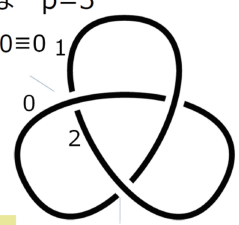
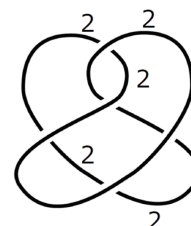
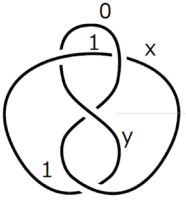
<p><b>【6】結び目の射影図の <math>p</math> 彩色 (<math>p</math>: 奇素数)</b></p> <p>射影図の各弧に <math>0, 1, 2, \dots, p-1</math> のうちの1つを割り当てる</p> <p><b>ルール: 各交点で <math>x+z-2y \equiv 0 \pmod{p}</math> が成立</b></p> <div style="display: flex; align-items: center; margin-top: 10px;">  <p>例えば <math>p=3</math>  <math>1+2-2 \times 0 \equiv 0 \pmod{3}</math></p> </div> <div style="margin-top: 10px;">  <p><math>x+z-2y \equiv 0 \pmod{p}</math> は <math>x+z-2y</math> が <math>p</math> で割り切れるということ</p> <p><b>このとき, <math>z \equiv 2y-x \pmod{p}</math></b> <span style="margin-left: 20px;"><math>0+1-2 \times 2 \equiv 0 \pmod{3}</math></span></p> </div>	<p><b>【7】次の射影図に <math>p=3</math> で <math>p</math> 彩色してみよう!</b></p> <div style="text-align: center; margin-top: 10px;">  </div> <p>すべての弧に同じ整数となり、自明な3彩色しかできない!</p>
---	---

図12 実際のスライド

図13左のスライドを用いて、 $p=5$  での具体例について、受講生とともに実際に計算しながら確認した (ワークシート【8】参照)。その後、図13右のスライドでワークシート【9】を問題として解いた。ここでワークシート【5】の合同式の計算が応用される。この射影図は8の字結び目の射影図で、 $p=3$  では自明な3彩色しかできないことも説明した。

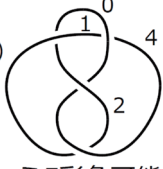
**【8】 8の字結び目の射影図を  $p=5$  で彩色**



$x = 2 \times 0 - 1 = -1 \equiv 4 \pmod{5}$   
より  $x=4$

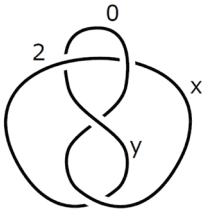
$x + 0 - 2y \equiv 0 \pmod{5}$   
が成立している.

$y = 2x - 1 = 8 - 1 = 7 \equiv 2 \pmod{5}$   
より  $y=2$



という5彩色可能

**【9】 8の字結び目の射影図の別の5彩色**




$x=?$   
 $y=?$

図 13 実際のスライド

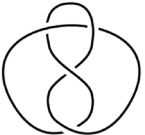
射影図の  $p$  彩色可能性が結び目の不変量であるという定理II.3を紹介し、各  $p$  について、 $p$  彩色可能かどうかで結び目が同値でないことが判定できることを説明した。定理II.3を提示する前にワークシート【10】で三葉結び目を表す異なる3つの射影図はどれも非自明な3彩色ができることを確認する予定であったが、時間の都合上できなかった。

最後に  $p$  を取り換えることによって、いろいろな結び目が同値でないことが判定できることを紹介した（図14左参照。ワークシート【11】もできなかった）。例えば、三葉結び目は3彩色可能で、8の字結び目は5彩色可能であるので、ともに自明な結び目と同値ではないが、さらに8の字結び目は3彩色不可能なので、三葉結び目と8の字結び目が同値でないことも分かる。また、図14右のスライドにある射影図はどんな  $p$  でも自明な彩色しかできないことを紹介し、これは自明な結び目と  $p$  彩色可能性では区別できないことを説明した。図14右の射影図が表す結び目は樹下-寺阪結び目と呼ばれ、結び目理論の歴史において重要な自明でない結び目である。

奇素数  $p$  を取り替えればいろんな結び目が区別できる。




3彩色○ 5彩色× 7彩色×

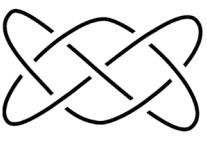


3彩色× 5彩色○ 7彩色×

【1 1】

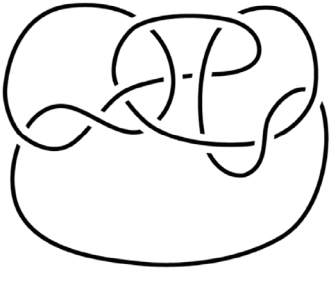


3彩色× 5彩色× 7彩色○



3彩色○ 5彩色○ 7彩色×

樹下-寺阪の結び目



この結び目は任意の  $p$  で非自明な  $p$  彩色不可能である。なので、ほどけている結び目と区別できない。

図 14 実際のスライド

## IV 考察と課題

本授業についてアンケートの結果を踏まえて考察する。受講生が実際に記入したワークシート等は机間巡視で観察したのみで、記録できなかった。

### 1 アンケート

授業後に8つの質問からなるアンケートを取った。受講生61名のうち、アンケートや感想を本研究に協力・本稿に掲載することに同意したのは58名である。内訳は1年生13名、2年生15名、3年生29名、学年未記入1名である。全体と学年ごとのアンケート結果を割合で提示する。全体は学年未記入1名を加えた数値である。この公開授業は高校生からの申し込み制であるため、数学にもともと興味がある生徒が集まっていることに留意する。

(1) 空間図形としての結び目をイメージすることができましたか？

1. できた 2. 一応できた 3. どちらともいえない 4. あまりできなかった 5. できなかった

(2) これまで学んできた空間図形と比べて結び目はイメージしやすいですか？

1. しやすい 2. ちょっとはしやすい 3. どちらともいえない 4. あまりしやすくない 5. しやすくない

(1)	1	2	3	4	5	(2)	1	2	3	4	5
全体	58.6%	37.9%	0.0%	3.4%	0.0%	全体	29.3%	41.4%	19.0%	6.9%	3.4%
1年生	38.5%	53.8%	0.0%	7.7%	0.0%	1年生	23.1%	30.8%	38.5%	7.7%	0.0%
2年生	53.3%	46.7%	0.0%	0.0%	0.0%	2年生	40.0%	40.0%	6.7%	6.7%	6.7%
3年生	72.4%	24.1%	0.0%	3.4%	0.0%	3年生	27.6%	48.3%	13.8%	6.9%	3.4%

(3) 空間内での結び目の変形をイメージすることができましたか？

1. できた 2. 一応できた 3. どちらともいえない 4. あまりできなかった 5. できなかった

(4) 空間内の結び目と平面に射影した図の対応をイメージすることができましたか？

1. できた 2. 一応できた 3. どちらともいえない 4. あまりできなかった 5. できなかった

(3)	1	2	3	4	5	(4)	1	2	3	4	5
全体	51.7%	41.4%	5.2%	1.7%	0.0%	全体	54.4%	29.8%	8.8%	7.0%	0.0%
1年生	61.5%	23.1%	7.7%	7.7%	0.0%	1年生	46.2%	23.1%	7.7%	23.1%	0.0%
2年生	20%	73.3%	6.7%	0.0%	0.0%	2年生	26.7%	53.3%	20.0%	0.0%	0.0%
3年生	65.5%	31.0%	3.4%	0.0%	0.0%	3年生	71.4%	21.4%	3.6%	3.6%	0.0%

(5) 結び目の $p$ 彩色の定義が理解できましたか？

1. できた 2. 一応できた 3. どちらともいえない 4. あまりできなかった 5. できなかった

(6)  $p$ 彩色可能性で結び目が区別できることが分かりましたか？

1. 分かった 2. だいたい分かった 3. どちらともいえない 4. あまり分からなかった 5. 分からなかった

(5)	1	2	3	4	5	(6)	1	2	3	4	5
全体	32.8%	36.2%	10.3%	19.0%	1.7%	全体	37.9%	36.2%	10.3%	12.1%	3.4%
1年生	15.4%	30.8%	7.7%	46.2%	0.0%	1年生	15.4%	30.8%	7.7%	38.5%	7.7%
2年生	20.0%	46.7%	20.0%	13.3%	0.0%	2年生	20.0%	60.0%	20.0%	0.0%	0.0%
3年生	48.3%	31.0%	6.9%	10.3%	3.4%	3年生	55.2%	27.6%	6.9%	6.9%	3.4%

(7) 結び目理論に興味が持てましたか？

1. 持てた 2. ちょっとは持てた 3. どちらともいえない 4. あまり持てなかった 5. 持てなかった

(8) 今回の授業の難易度は？

1. 難しかった 2. やや難しかった 3. どちらともいえない 4. やや簡単だった 5. 簡単だった

(7)	1	2	3	4	5	(8)	1	2	3	4	5
全体	45.6%	47.3%	3.5%	1.8%	1.8%	全体	17.2%	65.5%	12.1%	5.2%	0.0%
1年生	30.8%	53.8%	7.7%	7.7%	0.0%	1年生	46.2%	53.8%	0.0%	0.0%	0.0%
2年生	28.6%	71.4%	0.0%	0.0%	0.0%	2年生	13.3%	60.0%	13.3%	13.3%	0.0%
3年生	62.1%	31.0%	3.4%	0.0%	3.4%	3年生	6.9%	75.9%	13.8%	3.4%	0.0%

## 2 授業について

前半はワイヤーを用いて結び目の空間認識・平面への描画・変形のイメージを掴むことを主とし、後半は不変量を実際に定義し、計算して、結び目を分類することを主とした。内容的には後半の方が分量が少ないが、不変量の考え方や合同式の扱いに慣れていないため、ちょうど半々の時間に分けることを想定していた。しかし、前半の「III-2-(2) 結び目の認識」、「III-2-(3) 結び目の変形」、「III-2-(5) 結び目の平面への描画」に時間をかけたため、時間配分のバランスが大きく崩れた。そのため、結び目の射影図の  $p$  彩色の定義から mod 計算に慣れる具体例、演習に時間を取ることができなかった。これはアンケート (5) 「 $p$  彩色の定義の理解」の結果にも表れている。全体で2割、1年生では5割近くが「あまり理解できなかった・理解できなかった」と答えている。感想欄にも「 $p$  彩色から分からなくなった」との記述が見受けられる。一方で、前半に時間をかけた結果、アンケート (1) 「空間図形としての結び目のイメージ」、(3) 「空間内での結び目の変形イメージ」に対しては「イメージできた・一応できた」がそれぞれ、9割を超えており、授業のねらいの一つである「空間図形として結び目を理解する」は達成できたと考える。頭の中でイメージする・ワイヤーで実際に変形するという授業展開の影響・効果と考えられる。

また、アンケート (6) 「 $p$  彩色可能性による結び目の区別」については、(特に2年生・3年生において) 「分かった・だいたい分かった」が (5) 「 $p$  彩色の定義の理解」の「理解できた・一応理解できた」の結果と比較すると若干上がっている。これは  $p$  彩色の定義は不明であったが不変量の考え方は伝わっていると考えられる。これも授業のねらいの一つであった。

アンケート (2) 「これまでの空間図形と結び目との比較」については、「イメージしやすい・ちょっとはしやすい」が全体の7割あり、結び目の空間図形としての有用性を表しているに見える。しかし、実際にワイヤーを配布し、それを変形して観察したことのみの影響とも考えられる。

アンケート (4) 「空間内の結び目と平面での射影図の対応」については、「イメージできた・一応できた」が全体の8割を超えている。算数から始まる見取り図・展開図・投影図などの学習効果と考えられるが、線でできている結び目自体の構造も反映していると考えられる。「III-2-(5) 結び目の平面への描画」でのワークシート【4】において、ワイヤーで作った結び目を変形し、その射影図を見方をいろいろ変えて真剣に描画している受講生が散見された。

アンケート (7) 「結び目理論への興味」については、「興味を持てた・ちょっとは持てた」が全体の9割を超えている。今回の公開授業は数学にもともと興味がある生徒が集まっているためと考えられる。「普段の数学とは違う」という感想欄の記述が多数あり、題材として新鮮に感じたことの影響があると考えられるが、本授業における数学的な本質 (何を同じと考え、区別するにはどうするか) は、高校数学までに現れている場合もあり、数学としては同じである。

アンケート (8) 「授業の難易度」については、「難しかった・やや難しかった」が全体の8割を

超えており、特に1年生では全員がそう答えている。結び目という題材として慣れていないものを扱う難しさ、 $p$ 彩色というさらに慣れていない概念を短時間で導入した結果が影響していると考えられる。

### 3 課題

今回の授業で実施した、結び目を変形するイメージとワイヤーでの実際の変形、平面への描画については、一定の教育効果あり、直観的なイメージのしやすさ、変形の自由度の高さを踏まえると空間図形として結び目を取り上げ、結び目理論を初等・中等数学教育の授業教材として扱うことが可能であると考えられる。今回の授業におけるこの前半部は、朝比奈[1]が筆者との卒業研究ゼミで書いた卒業論文を参考にしている。[1]では中学校指導要領（平成29年告示）解説数学編[13]にある「空間における直線や平面の位置関係を知ったり、直線や平面図形の運動によって空間図形を構成したり、空間図形を平面上に表したり、平面上の表現から空間図形の性質を読み取ったりすることを学習する。」という点に着目し、中学校1年生向けの結び目理論を用いた空間図形の認識に関する授業を提案している。

実際の初等・中等数学教育における教材化については、この前半部を時間をかけて実施する必要があると考えられる。対象とする結び目、変形、射影図を精選するなどさらなる工夫が考えられる。また、今回は受講生の学習成果を机間巡視でしか見られなかったが、それらを受講生同士で共有し、グループで考えをまとめるような授業の実施方法も考えられる。そのためにも少なくとも2時間以上の授業時間が必要と考える。

不変量の考え方は高等学校までの数学ではあまり表立って出てこないため難しい概念である。大阪市立大学・大阪教育大学の研究プロジェクトによる実践（[3, 4, 5, 6, 7, 8]）や岐阜大学の田中を中心とした実践（[9, 10, 11]）においては、 $p$ 彩色可能性、特に3彩色可能性、 $p$ 彩色から得られる結び目の“階数”，輪が複数ある絡み目に対する“絡み数”，より複雑な“ジョーンズ多項式”などの不変量を取り扱っている。難しい考え方ではあるが「同値ならば同じ値を取る量」であることから「不変量の値が異なれば同値でない」ことが導かれる点是对偶の話であり、論理的思考力を高めるための題材として意義があると考えられる。例えば、底辺の長さが高さが分かっている二つの三角形が合同でないことは3種類の合同条件を考えなくても面積で分かる場合がある。中学校で三角形の合同を学ぶ際に分類という話はないが、不変量の考え方に触れることも可能である。参考文献[5]の「第5章高等学校における実践 5-2 結び目の不変量と研究発表」で触れているように、高等学校においても結び目の不変量に関する教育実践の時期は十分考慮する必要がある。

本授業では特に $p$ 彩色の定義の理解に課題が残った。合同式に不慣れな点もあるが、 $p$ 彩色自体が唐突な登場になってしまい、今回のアンケートの感想で「 $x+z-2y \equiv 0 \pmod{p}$ がなぜ出てきたか」に引っ掛かっているものがあった。想定ではワークシート【10】で定理II.3が正しそうなことを実感し、時間があれば証明をする予定であったが、どちらもできなかった。 $p$ 彩色可能性が結び目の不変量である証明をすると、「交点条件を $x+z-2y \equiv 0 \pmod{p}$ とすると不変量になるから」という理屈が掴めたのではないかと考える。しかし、このような「こう定義するとうまくいくから」という定義は受け入れられないことも多い。結び目の不変量は初等的な概念でも初学者にとってはあまり“自然”でないものが多く、その導入には（厳密には高度な話になるが）不変量の背景を説明するなどの工夫が考えられる。やはり、不変量の話でも2時間以上の授業時間をかける必要がある。

最後に初等・中等数学教育に結び目を用いる有用性をより探求していくことが必要であると考えている。アンケートの感想にあった「普段していない数学」という認識ゆえの効果を無くし、数学の本質的理解のための教材にするためである。

#### 4 感想

アンケートの自由記述の感想を抜粋して記載する。

- 3年生の内容だったためあまり理解することができなかった。しかし、理解できたところもあったので良かった。実際にワイヤーで自分でやることでイメージがしやすかったと思う。また、3年になったときにしっかりと理解できるようにしたいです。
- はじめは、結び目が移動するのを想像できたが、彩色の話から理解が追い付かなかった。しかし理解できれば面白い分野なのだと思ったし、計算は分からなくても結び目を何回も試して区別するんじゃなくて数学を使って区別することができるということは分かった。
- 結び目という普段授業で習うものとは違う幾何学ながら、立方体など普段使う図形より自由度が高く面白いと思った。結び目の分類に mod 演算が出てくるのが、数学のそれぞれの分野のつながりを感じて数学により興味をもった。
- 最初の方は理解できたが、 $p$  彩色辺りから分からなくなってしまった。何をどのようにすれば彩色でき、区別できるのかが分からなかった。けど、午後に頭を使うことが苦手な私でも集中して授業を受けることができた。個人的にも学習してみたいと思った。
- 結び目の  $p$  彩色の定義が良く分からなかったが、とても面白かった。
- 最初は少し難しい話で分からないところもあったが、最終的にはそれまでの内容と結論がつながって理解できた。分かりやすい話し方、構成だったと思う。
- $x + z - 2y \equiv 0 \pmod{p}$  と出てきたが、どうしてこのような公式になるのか疑問に思い、その後の内容が少し頭に入らなかった。一次元でもこのように多くのことを考えることができるのか、と驚いた。
- 複雑な大学数学を高校範囲でも分かる説明でおもしろかったです。はじめはワイヤーと図の対応を理解するのに時間がかかったのが、だんだん頭の中でイメージできるようになっていきました。幾何は苦手ですが、しっかり理解できました。ありがとうございました。
- すぐにはイメージできなくて少し難しかった。ワイヤー使うと不思議で面白かった。
- 普通の数学とは違っていておもしろかった。このような数学もあるんだなと感じ、もっといろんな数学について調べてみたいと思った。
- ワイヤを使って自分で動かしながら考えることでより理解し、できたと思います。 $p$  彩色のところが難しかったです。mod の導入や前半は理解できました。結び目の理論が何に应用されているか気になりました。
- 想像力が必要な内容で難しい部分もあったけれど、複雑な形でも最終的に同じ形になったりと、感動した部分も結構あった。 $p$  彩色の定義も、なれば楽しくなりそうだった。
- 学校の授業で学ぶことのない結び目論について学ぶことができ、とても面白かった。合同式を使って考えるのも面白かった。数学らしい考え方を、という考え方を忘れないようにしたい。
- 以前同じような授業を受けた事があったが、その時はただ聞くだけだったので、理解が追いつかないところが多かったが、実際に自分で作って観察したり、図にする事でより深い理解ができたし興味も持てた。ありがとうございました。

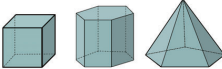
総じて、授業全体に対してはポジティブな感想が多かった。公開授業に参加してくれた高校生に感謝する。

## V 添付資料

本授業で使用したワークシートを添付する。


山梨県下の高校生への公開授業「結び目の数学」 2023年8月3日

【1】各多面体について、頂点の数・辺の数・面の数を数えてみよう。




頂点の数			
辺の数			
面の数			

【2】三葉結び目の変形過程をスライドを見ながら描いてみよう。




【3】自明な結び目の変形過程をスライドを見ながら描いてみよう。

(1)



(2)



【4】ワイヤーで自分が作った三葉結び目を変形して射影図を描いてみよう。

【5】次の問いを考えてみよう。


(1)  $4+x \equiv 2 \pmod{3}$  をみたく  $x$  は 0, 1, 2 のうちどれでしょう？

(2)  $x=2, y=4$  のとき  $2y-x \equiv ?? \pmod{5}$


(3)  $x=3, y=1$  のとき  $2y-x \equiv ?? \pmod{5}$

【6】結び目の  $p$  彩色の定義を理解しよう。

$p$ : 奇素数とする。射影図の各弧に  $0, 1, 2, \dots, p-1$  のうち 1 つを割り当てる  
 ルール: 各交点で  $x+z-2y \equiv 0 \pmod{p}$  が成立




例えば  $p=3$




$x+z-2y \equiv 0 \pmod{p}$  は  $x+z-2y$  が  $p$  で割り切れるということ  
 このとき、 $z \equiv 2y-x \pmod{p}$  である。


【7】次の射影図に  $p=3$  で  $p$  彩色してみよう。




【8】スライドの例に沿って 8 の字結び目の射影図を  $p=5$  で彩色してみよう。

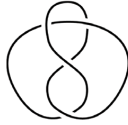



【9】【8】の 5 彩色とは別の 5 彩色をしてみよう。

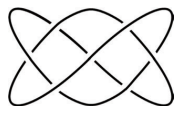





【10】次の 3 つの三葉結び目の射影図を  $p=3$  で非自明な 3 彩色をしてみよう。








【11】次の 2 つに対して O の付いた彩色ができるか確認してみよう。





3彩色× 5彩色× 7彩色○ 3彩色○ 5彩色○ 7彩色×

## 参考文献

- [1] 朝比奈司, 結び目理論を用いた中学校数学科の教材の提案, 山梨大学教育学部卒業論文, 2023.
- [2] C. C. アダムス著, 金信泰造訳, 結び目の数学, 培風館, 1998.
- [3] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」研究プロジェクト著, 「結び目の数学教育」への導入－小学生・中学生・高校生を対象として－, 2005.
- [4] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」研究プロジェクト著, 「結び目の数学教育」への導入(第2号)－小学生・中学生・高校生を対象として－, 2007.
- [5] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」研究プロジェクト著, 「結び目の数学教育」への導入(第3号)－小学生・中学生・高校生を対象として－, 2009.
- [6] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」研究プロジェクト著, 「結び目の数学教育」への導入(第4号)－小学生・中学生・高校生を対象として－, 2014.
- [7] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」研究プロジェクト著, 「結び目の数学教育」への導入(第5号)－小学生・中学生・高校生を対象として－, 2017.
- [8] 河内明夫・柳本朋子編, 「結び目の数学教育」研究プロジェクト著, 「結び目の数学教育」への導入(第6号)－小学生・中学生・高校生を対象として－, 2023.
- [9] 酒井道宏, 田中利史, 中坊滋一, 結び目を用いた中学生向けの数学教材の実践, 岐阜数学教育研究, 2012, Vol. 11, 76–83.
- [10] 田中利史, 岩月望将, 結び目不変量を用いた高校生向けの数学教材の提案とその実践, 岐阜数学教育研究, 2013, Vol. 12, 88–101.
- [11] 水口彰, 田中利史, 結び目不変量に関する高校生向けの授業実践, 岐阜数学教育研究, 2018, Vol. 17, 109–173.
- [12] 村上齊, 結び目のはなし, 遊星社, 1990.
- [13] 文部科学省, 【数学編】中学校学習指導要領(平成29年告示)解説, [https://www.mext.go.jp/component/a\\_menu/education/micro\\_detail/\\_icsFiles/afieldfile/2019/03/18/1387018\\_004.pdf](https://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/_icsFiles/afieldfile/2019/03/18/1387018_004.pdf), 2017.
- [14] 文部科学省, 【数学編 理数編】高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説, [https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt\\_kyoiku02-100002620\\_05.pdf](https://www.mext.go.jp/content/20230217-mxt_kyoiku02-100002620_05.pdf), 2018.