

GeoGebraによる数学的探究活動のためのICT教材開発

Development of ICT teaching materials for mathematical inquiry activities using GeoGebra

中 村 宗 敬¹ 早 川 健¹ 功 刀 聡 将²
NAKAMURA Munetaka HAYAKAWA Ken KUNUGI Toshimasa

要約：高校数学の「データの分析」は難解な式による定義が多く登場する。それらにあてはめ機械的に計算するのではなく、その前提として式の意味を理解させる事は重要である。そこで視覚的に受け入れることができる散布図の相関の正負と共分散の式の正負を比較しながら、共分散の定義式を図形的な意味として感得できる教授法改善案を考察した。そのために、生徒がBYODで直感的に操作でき、試行錯誤のすえ能動的に意味理解に至ることができるようなICT教材をGeoGebraにより作成した。それを活用した授業実践までの過程をとりまとめて報告する。

キーワード：生徒の能動的な気づき, GeoGebra, 散布図, 共分散

I はじめに

1 数学教育におけるICT教材の意義

本論では自作のICT教材を使った授業実践について論じていくが、それにあたって、まずはいくつかの面から、高校数学の授業で取り扱うICT教材使用の現状とその意義を考察する。

① ICTを「生徒の探究の道具」として活用する

GIGAスクール構想によりICT環境は急速に整備され、児童生徒の学習情報の送受信は高速化・省力化され飛躍的に発展している。今後デジタル学習基盤が整備されるとストレスなく児童生徒によるinputやoutputが可能となり、資料収集や資料活用の面で、これまで制限のあった情報収集からデジタル技術を活用したオーセンティックな方法で学ぶことが可能となる。これは教師の指導を補助する点でさらなる向上が期待できる。数学教育で重視する数学的な探究活動においてもフリーソフトが開発され、学校でテクノロジーを活用することが可能となった。微分・積分、極限、グラフ作成、動的な図形などこれまでイメージや念頭操作に頼ってきた数学、難解な思考を要する数学、ビッグデータの処理などを児童生徒が理解しやすいよう提示・実演する指導が可能となった。このように数学では、「わかりやすい」指導を目的に、教師の指導の補助として、デジタル技術を活用することが多い。

一方、本研究で焦点を当てるのは、デジタルテクノロジーを「生徒の探究の道具」として活用することである。「教師の指導の補助」から「生徒の探究の道具」への発想は数学科の学校現場にはまだ浸透していない。「生徒の探究の道具」として用いるとは、数学科授業の中で、定規やコンパスと同様、数学的に試行錯誤する際の道具として、生徒自らが探究活動の際に活用し数学的思考を伸ばし・広げ・深める道具として使うという意味である。

② 高校数学の授業でのICT教材*¹

これまで高校数学においてもICT教材を用いた授業は多くの実践がなされているが、そこでは

¹ 教育実践創成講座 ² 教育実践創成専攻

FunctionView や Grapes などのソフトウェアが使用されてきた。数学教育において、紙面上に描かれた図から動きや変化をイメージする事が難しい題材は多い。それらの図形を頭の中で想像して構築する能力は、人によって差異が大きく、特に動的变化や立体図形などの空間認識となると非常に顕著に現れる。しかし、ICT 教材は図形やグラフを自在に動かすことが出来るため、その動きを観察する事で直感的に性質を読み取ることが出来る。その意味では非常に強力な学習ツールであり、ICT 教材の活用は、頭の中のみでは想像が難しい図形などを実際に目にすることができ、多面的・多角的に思考するための補助として非常に有意義である。

③ BYOD による教材のあり方の変化

2022 年 4 月より山梨県内の高等学校において BYOD (Bring Your Own Device) の使用が開始され、ICT 教材を活用する絶好の機会となった。これまでの ICT 教材との相違点は、生徒一人一人が自分自身の端末で教材を扱えることである。従来の授業では、ICT 教材は教師の指導意図の通りに教材を提示するものであり、一方向的に与えるだけの生徒にとっては受動的なツールであった。しかし、BYOD 型授業では、生徒が意図した動きを ICT 教材で操作でき、操作の過程で自らの気づきに至ることができる能動的なツールに変化することが期待される。自ら操作する BYOD の ICT 教材は、生徒が「能動的な気づき」を得るための機会を作り、題材への深い理解のための補助ツールである。そのためには教師が与えるばかりでなく、生徒の探究活動^{*2}は欠かすことが出来ない。

重要な点は、数学の指導内容を把握している教師が操作するソフトと、題材に初めて出会う生徒が操作するソフトでは、ICT 教材の意味が変わってくる。後者では（教師の指導の工夫により）情報をどこまで見せるのかによって、機能性・視認性・操作感も関わって、それらが生徒の能動的な気づきができるか否かに影響を与える。したがって、これまでのものとは違った設計思想が必要になるはずである。

2 高等学校数学科の ICT 教材における先行研究

中村 (2015) は、「わかる」、「できる」、「見つける」、「つくる」、「使う」の 5 つの観点から高校数学科の目標を捉え直すと、「できる」、「わかる」の観点での目標を実現し、さらに「見つける」、「つくる」、「使う」の観点での目標を達成することが、高校数学科の目標であると述べている。さらに、ICT 活用は数学指導の目標の達成を握るカギであり、それなしには達成できないのではないかと述べている。

同時に、「問題の動的な扱い」、「問題の発展的な扱い」、「性質の発見から証明へ」、「グラフ的表現と幾何的表現の関連付け」、「社会や日常生活との関連付け」などを取り入れた授業づくりを行うことが重要と論じ、ICT を活用した種々の指導の具体事例の提案がされている。これらの事例には上記の達成目標「見つける」、「つくる」、「使う」のいずれかの観点が含まれており、探究活動のための教材事例と理解できる。特に「見つける」は、筆者が先述した「能動的な気づき」と同義であると考えられる。

3 本論の目的・内容と構成

上に紹介した I, 2 の事例は ICT 教材の設計思想などが記されておらず、実際に生徒が操作するときに思考に集中できるどのような工夫がなされているのか読み取ることが難しい。授業者にとっての関心事は、「実際に作れるのか」、「どのような事に配慮が必要なのか」の実行可能性であり、これらを見落とさない重要な関心事である。

そこで、I の考察③を念頭に本研究では、高等学校数学 I 「データの分析 散布図と相関」の学習指導に、生徒の探究の道具として数学的な探究ソフト GeoGebra を用いた教材開発を行う。そして、BYOD 型授業の中で ICT 教材を用いた探究活動を取り入れた授業実践を行い、生徒の思考の様相の分析をとおして、ICT 教材の在り方を考察し、生徒の探究の道具として活用するときの数学的な探究ソ

フトの教育的効果を明らかにする。

以下、本論文の構成は以下の通りである。Ⅱでは、本研究で取り扱った「散布図と相関」における生徒の理解にとって困難点を洗い出し、教材開発の経緯とその設計思想をあわせて詳述する。GeoGebraを用いているが、自らプログラミングして作成した独自ソフトであり、dSPAKと名付けた。この名称由来については後でまた述べる。Ⅲでは、このdSPAKを用いた授業実践を報告する。授業後の生徒の感想も紹介する。Ⅳでは授業で取り上げることができなかった散布図の相関関係（全体的な傾向と形状）と相関係数の関係を、dSPAKを用いてどのように考察できるかを論じる。Ⅴでは本研究の取りまとめと今後の展望を述べる。また、高校数学の範囲外になりⅣで述べることができなかった補足的説明を、最後に附録として追加しておいた。

Ⅱ 探究活動の教材検討 dSPAKの開発経緯と設計思想

1 題材「散布図と相関」について

本研究で取り扱う題材は、高等学校 数学Ⅰ「データの分析」の「散布図と相関」とした。現実事象の膨大なデータを複雑な数式に落とし込むため、生徒は公式（本来は定義式であるが、一般的にこのように呼ぶことも多いので、この用語を使うことにする。和の3乗の公式というときの公式という呼び方とは異なる）で何を計算しているのか理解しづらい（例えば図1の相関係数の公式理解）。

<p>相関係数</p> $r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \}}{\sqrt{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \}} \sqrt{\frac{1}{n} \{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2 \}}}$ <p style="text-align: center;"> 偏差の積の平均 偏差の2乗の平均 </p>
--

図1 複雑な公式の例 相関係数の定義を述べているが、式が長く、それぞれの項が何を意味しているのか初めて目にする生徒にとっては捉えにくい。

分散・標準偏差・共分散・相関係数は、公式から計算される数値と数式自体との関係が難解であり、教科書でも説明なく機械的解法・計算が推奨されているように見えることが多い。特に「データの分析」に関してはこの傾向が強い。そのため理解は曖昧なのに何となく解けているため、それで満足してしまうという弊害が起こる。このような機械的解法・計算を意味もなく覚えてしまう前に、公式の意味理解ができる補助教材が必要であると考えた。

探究活動として、「散布図の点の分布と共分散公式を比較して、計算の意味を探究すること、さらに何を計算しているのか理解すること」つまり「相関の正負が共分散のそれと一致することを見出し、その理由を探究することおよび理解すること」を実践することにする。このことを目的として動的・視覚的観点から理解の助けとなるICT教材にできないか考えてみる。

2 一般的な教授法の問題点



図2 Excel 使用の一場面 散布図を変化させるためには、x, y 列に生徒自身が数値入力しなければならない。

この「散布図と相関」では、一般的に図2のようにExcelなど表計算ソフトが使われる事が多い。実際、筆者が過去に授業用に作成したものである。こうした表計算ソフトでは次のような手順をとって教えられる、あるいは生徒が操作することが多い。

- ① 「標本データ」を入力する。
- ② グラフ作成ツールで「散布図」を描く。
- ③ 表を使って式の値（ここでは相関係数の値）を計算する。

しかし、この手順では②と③が独立した別々の作業になっているため、公式の意味がブラックボックス化されており、「散布図」と「公式」の関係がつかみづらく、機械的な数値計算作業になりがちである。

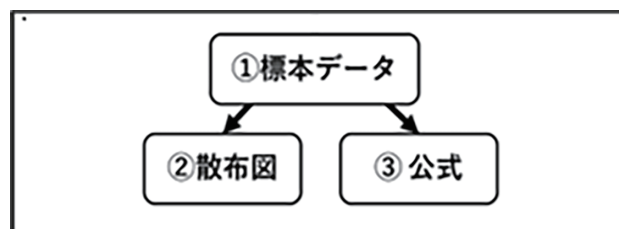


図3 Excel の概念構造のイメージ ②と③が独立した別々の作業になり肝心のこれらの関係がつかみづらい。

この構造イメージが図3である。問題点をあげてみる。

- (1) まず明らかに、「②散布図」と「③公式」の乖離が見られ、「公式」の意味理解を困難にしている。
- (2) また、「①標本データ」入力の機械的な単調作業は時間がかかる。
- (3) さらに、①、②、③の3つの比較が思考を複雑化させている。
- (4) 「公式」理解のためには、「散布図」に多くの書き込みをし、それらを観察。判別する必要があるが、Excelのグラフ機能ではそれは容易には叶わない。
- (5) また、散布図の多様な分布を即時に試すことができない。

以上が、「散布図」と「公式」の関係理解を困難にさせている5つの問題点である。

3 新たな教授法のアイデア

共分散公式の意味理解には、散布図を変化させてその様子を観察するのが不可欠である。平均線・偏差・偏差積を書きこんだものが図4である。偏差はそれぞれの変量の平均値を表わす直線と各標本点との距離で、このとき偏差積は長方形の面積と解釈できる。

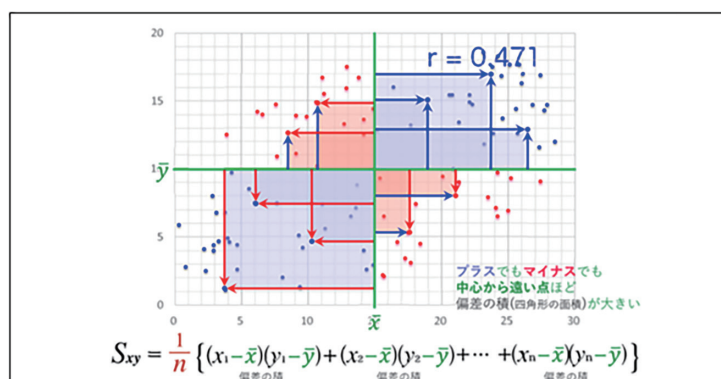


図4 散布図への偏差積の意味解釈 偏差積を青やピンクの符号付き長方形の面積と解釈する。

つまり、2本の平均線により分断された領域の右上から順に半時計回りに、第1、第2、第3、第4象限として（通常の「象限」との混同は起こらないだろう）、標本点が第1・第3象限で偏差積はプラスとなり、第2・第4象限で偏差積はマイナスになる。これで共分散公式の偏差積の和を考えれば、第1・第3象限に標本点が多い正の相関の分布では正の数値、（第2・第4象限に標本点が多い負の相関の分布では負の数値と推量できる。これで「②散布図」と「③公式」の関係が理解できる。では、この手法を実現できるようなICT教材について、Ⅱ、2で取り上げた問題点の改善を検討する。

4 問題点の改善手法の検討

まず、生徒の公式理解を助けたいという見方でExcelの散布図を見たとき、「標本点を自由に動かして分布を自由に変えてみたい」と考えた。多様な分布に変化させることで、公式の動的な数値変化を即時に比較観察できるからだ。また、「①標本データ」は、散布図の標本点の座標として判読可能であるため、乱数で自動生成して非表示にする。これにより②③2つのみの表示にできるため、視認性の向上と思考の簡略化を期待できる。最後に、散布図上に、公式に登場する数値「平均・偏差・偏差積」に該当する図形を表示した。②③両方に共通のものを可視化すれば、比較観察の補助となり、②と③の乖離を解消できる。図6が改善した教授法の構造イメージである。

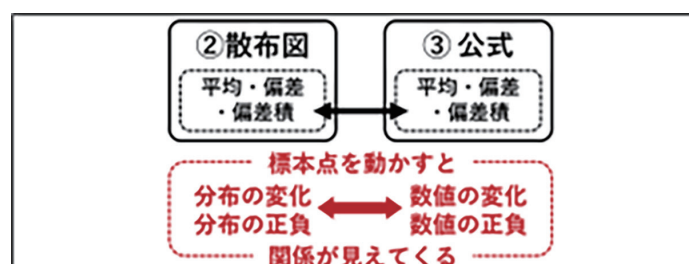


図5 改善後の概念構造イメージ 分布の変化と数値の対応がわかり、②と③を結びつけることができる。

「標本点を指で動かす」と「散布図の即応した画面表示」の2点を実装することが改善のカギであり、GeoGebraならこの2点の教材改善を期待できる。実を言うと、GeoGebraには表計算機能があり、そちらでも散布図を表示できる。しかし、Excel同様、上述の2点の機能を実装させることが不可能であるため、この機能は使用しない。

特に、標本点を指で動かせる散布図を想定しているため、これこそが直感的かつ直観的な探究活動を可能にする一番の改善策といえる。多彩な分布変化で即時に公式との比較観察を可能とし、このことが教材の一番の特徴になる。このような内容のICT教材を作成できれば、相関係数の教授法として、新規性のある手法となり、BYODの実践事例としても意義あるものになると考える。

5 教材作成アプリについて

ここで、GeoGebra の利点を挙げてみる。まず、オブジェクトを動かす方法が多彩である。これは、探究活動を行いやすい環境を実装できる自由度が高い事を示している。すなわち、「画面をタッチして指で動かす」、「変数で動きを制御する」、「他のオブジェクトに連動して動かす」、「スクリプト（プログラミング）で命令して動かす」等が可能である。また、レイアウト面に関しても優れており、操作性・視認性を工夫できる。また、LaTeX を使用できるため、数式表示がきれいである。さらに、ブラウザで動くため、開発環境と利用環境の汎用性が高く URL を配布するだけで済む。ただし、もちろん欠点もあげられる。それは生徒には関係ない開発者側からみたものであるが、現時点で開発者のための日本語書籍がほぼ皆無で、ネットを見ても体系的に学べる Web サイトもないため、ほぼ独学になるであろうことである。

6 設計思想（アーキテクチャ）

BYOD における ICT 教材は、生徒が操作する事を前提とした設計を心がける必要がある。特に探究活動をするためには、思考に集中できる、直感的な操作感が重要だ。「画面タッチによる指での操作感を意識すること」、「シンプルな操作性と視認性に配慮すること」という 2 点に注意して教材作成を試みる。

タッチする指が画面を遮らないよう、ボタン等の操作系は画面の下に配置し少なめにする。配色も控えめにする。自由に指で動かす直感的な操作感のために、変数の直接入力可能な限り使用しない。基本として指だけで操作する仕様に努める。

7 作成した教材の特徴

以上を勘案して dSPAK を開発したのだが、その特徴を書いておく。

- ① 標本点をタップすると、その箇所を x 座標、 y 座標として標本データを表示し、公式の該当部分が強調表示されるようになっている。
- ② 画面下方のボタンをタップすると、該当する正負と強弱で散布図を表示する。また、[another data] をタップすることで、乱数により新たに別の散布図を生成可能である。
- ③ 画面右側のスライダーを動かすことで、該当する特徴のみを開示するように場面転換することができる。共分散の公式もそれに応じて表示形態を変化させて交互に観察できる。

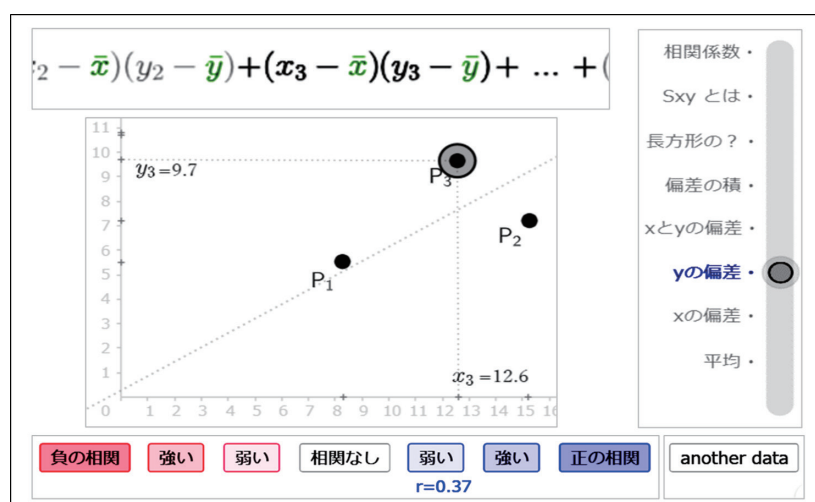


図 6 操作系ボタンなどの画面 ①標本点と対応する式の表示 ②下段に相関の強弱 ③右側スライダーにさまざまなフェーズの画面表示

(③の説明の続き) 生徒の立場になったとき、徐々に場面転換できる仕組みは意味理解への良い「足場かけ」(今井 (2008), Wood D, Bruner JS, Ross G et al. (1976)) となる。大量の情報を一度に見ると、どこから処理すればよいか判断できず、思考停止に陥ることも少なくない。冷静かつ論理的に対処するための環境作りは重要である。反面、答をすぐ示してしまうような設計も、思考停止と等しく探究活動にはなりえない。何をどう観察するかを探索する自由度と、その補助となる足場かけ、この2点が思考を働かせる教材作りには必須である。

- ④ 散布図の標本点を動かすことで、公式の数値が動的に変化し、標本点の分布と公式の数値を交互に観察することが出来る。正の数値では青、負の数値では赤、0は緑を配色した。
- ⑤ 右スライダーの一番上の場面転換(図7)で、画面の下に相関係数スライダーを表示する。シームレスに相関係数の数値を変えて、分布の変化をアニメーションで体感する事ができる。

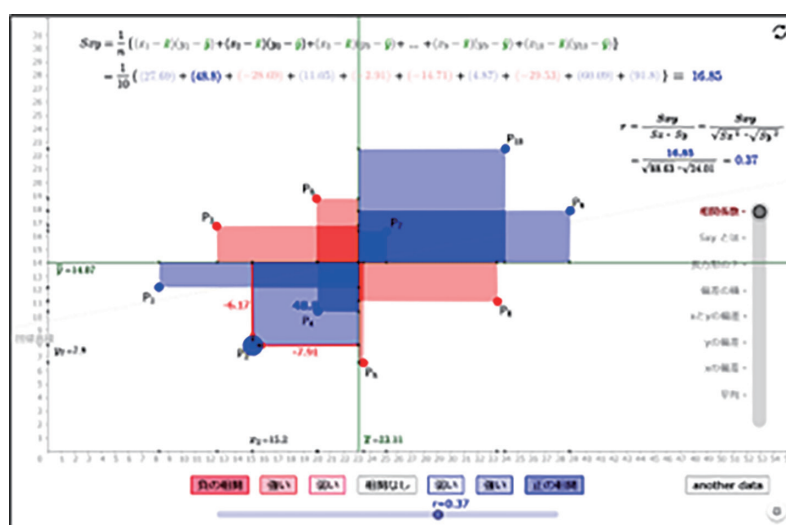


図7 右スライダーの一番上の場面転換 最下段の相関係数スライダーを動かして散布図を変化させることができる。

今後、このICT教材をdSPAKと呼称する。これは、dynamic Scatter Plot Analyzer by Kunugiから名付けたものである。刃刀がGeoGebraで開発した完全オリジナルのICT教材である。

Ⅲ 授業実践

1 授業概要と探究課題

2023年11月に山梨県内県立高校の1年生のクラスで授業実践を行った。クラスの人数は36名である。前述したように、単元は数学I「データの分析」で、「散布図と相関」を扱う。

授業の流れとしては、探究活動を通して【相関の正負と共分散の公式の関係】を感得できるようにする。つまり、共分散公式の計算の意味理解を目標とする。その上で相関係数を求める例題解説と問題演習へと移っていくことにした。すなわち、教師が用意する探究課題は次のようにした。

【探究課題】BYODで「相関変動散布図」を使って、指で標本点を動かし、[散布図]の分布を変化させる。連動して、[共分散式]の数値も変化するため、2つを交互に比較観察して【相関の正負と共分散の公式の関係】を感得する。

問題とせず「探究課題」としたのは、特定の1つの問題解決よりも、そのもとになっているより広い（ここでは共分散の）概念の意味理解を問うことになるからである。

2 授業の展開

(1) 導入：既習事項の確認

まず既習事項の確認を行う。散布図における「相関係数の数値的役割」を復習する。すなわち、

- ・ 散布図で一方が増えると他方も増える傾向にあれば、相関係数が正で「正の相関がある」
- ・ 一方が増えると他方が減る傾向にあれば、相関係数が負で「負の相関がある」
- ・ どちらの傾向も見られなければ、相関係数は0に近く「相関がない」
- ・ 相関係数の値は-1から1の間で、直線に近い分布のときは相関係数の絶対値が1に近い。

ということである。ただし、相関係数の公式はこの時点では未修であり、相関係数という代表値があって散布図との関係は上述の通りであるとのみ教科書でも説明している。次に、図8を使って、大事な用語である「『偏差』の視覚的解釈」について確認する。これらについては、前時に確認しているため黒板上のスクリーンで時間をかけずに端的に進める。

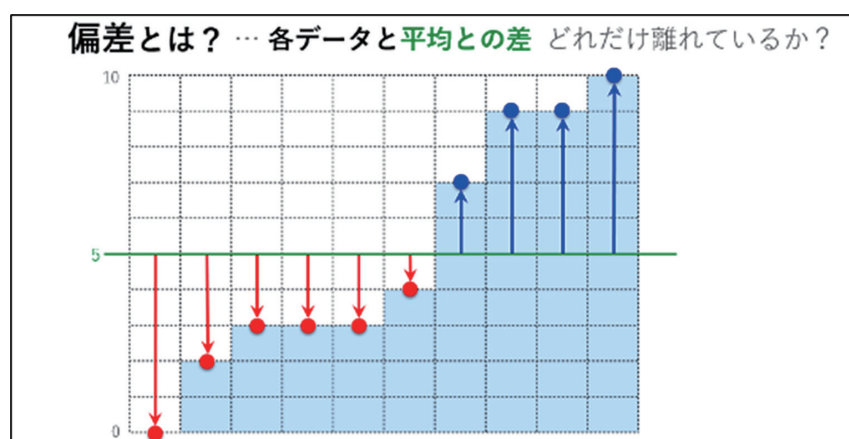


図8 「偏差」の視覚的解釈 標本と平均との符号付き差（距離）が偏差である。正値は青、負値は赤としている。

(2) 公式の提示

ここで初めて、相関係数 r とその分子に当る共分散 S_{xy} の公式を生徒に紹介する。相関係数の分母は、既習である2変量それぞれの標準偏差 S_x と S_y の積であることを確認する。

相関係数

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} = \frac{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \}}{\sqrt{\frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 \}} \sqrt{\frac{1}{n} \{ (y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \dots + (y_n - \bar{y})^2 \}}}$$

相関係数 r の分子は共分散 S_{xy} である。分子の各項 $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ は偏差の積である。

共分散

$$S_{xy} = \frac{1}{n} \{ (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) \}$$

偏差の積

図9 相関係数と共分散の公式 相関係数の分子 S_{xy} が重要で、その意味を問いかける。

分母は必ず正であるため、特に分子の共分散が重要であり、「相関の正負を判断できる式」である事を伝える。まずはその理由を、共分散の公式をよく観察して考えることを指示する。5 分間、隣と相談してよいと伝える。その後、何らかの結論が出た人がいるか挙手してもらうと 2 名の生徒から反応があった。他の人にも自身で感得する機会を与えたい旨を話し、そのまま展開②に移る。

(3) BYOD による探究活動

次の展開では、本実践の主となる探究活動を行ったのであるが、前にもたびたび触れたように

散布図における相関の正負と共分散の公式の関係を説明しよう

を探究課題とした。この提示後、あらかじめ Google Classroom にアップしておいた教材 dSPAK を起動するよう指示する。GeoGebra の教材は、これまでに何度か操作しているため、簡単に操作方法を話すのみとした。

探究活動の目的はもちろん、相関の正負と共分散の公式の関係を理解し、説明する事であり、隣の 2, 3 名で 10 分間意見を出し合うよう指示した。教師は生徒の探究活動観察に徹して、核心になることは何も言わないでおく。この後、必要に応じてさらに相談を促し、適宜それが収束した時点で生徒自身に黒板スクリーン上の dSPAK 画面を用いて説明をさせ、クラス全体で共通理解を図った。なお、相関係数については、共分散 S_{xy} を S_x と S_y で割ることで、数値を -1 から 1 に調整したものを定義していると簡単に説明した。教科書でも言及されていないため、数値範囲の説明および証明は参考資料として渡すのみにとどめた。

3 探究中の生徒の会話

ここでは探究中の生徒の反応・会話を提示する。課題にどのように取り組んでいたかがうかがえるところである。対応する教材画面と会話の説明および考察を後に加えておいた。

会話記録①「2 変量の偏差の確認」

17:31 (授業開始からの経過時間)

A「これが偏差ね。平均から矢が出るとこ」

B「あ～！これ、ひとつひとつが偏差？」(図 10 参照)

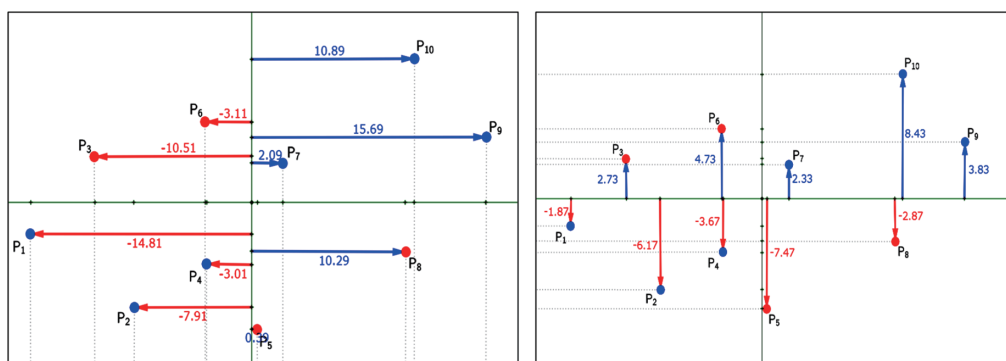


図 10 散布図上の 2 変量の偏差 横方向と縦方向の 2 種類の偏差を考える必要がある。

偏差は既習事項であるが、この章で初めて 2 変量データを扱っており、散布図における偏差の視覚的解釈も初めてである。生徒 A・B の会話は、複数ある矢印一つ一つが偏差であること。また、標本点 1 つにつき、縦方向と横方向の 2 種類ある矢印をどのように解釈するのか確認し合っている場面である。

会話記録②「偏差積の正負のバランス」

18:25

C1「これ 52.5 ってどういうこと？面積、こっちの方がでかいよってこと？」

C2 「あっ！わかった！これだ！赤い点があるじゃん。これが負の方向だよ。

こっち側にいっぱいあれば負になるのね」

C3 「こっちが減るから、（負の部分に）飛び出てるのが ちょっとしかないから、淘汰されちゃう。」

(図12 参照)

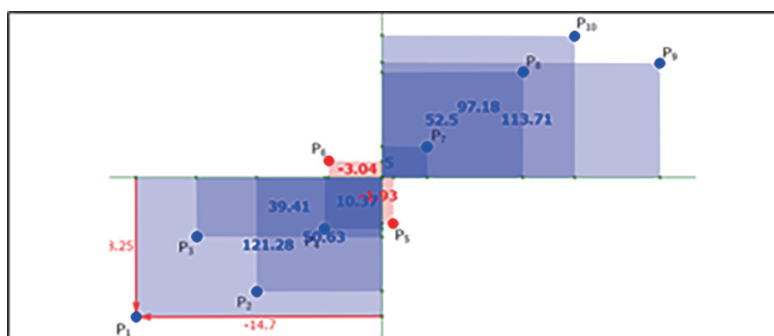


図 11 正の相関が強い状態の散布図 面積の符号付き・色分け表示を生徒たちは読み取っている。

発言C1では、平均線の交点から離れるほど、長方形の偏差積（面積）が拡大する事を示唆する言葉がうかがえる。発言C2では、偏差積がマイナスになる部分がどこかを明確に気づいた発見への喜びが読み取れる。さらに発言C3で、偏差積が正になる点が多ければ、少しくらい負になる点があったとしても、全体的には正の値が優位になると言っている。偏差積の正負のバランスで全体の正負が決まる事の気づきを得ている場面である。

会話記録③「負の面積への疑問」

20:15

D1 「長方形の面積の総和を、長方形の数で割ったようなもんなんだけども。」

D2 「ただちょっと、長方形の面積なのにマイナスになってる。でもそれって何て言うのかな。あくまでも x と y の数なので…」 (図12参照)

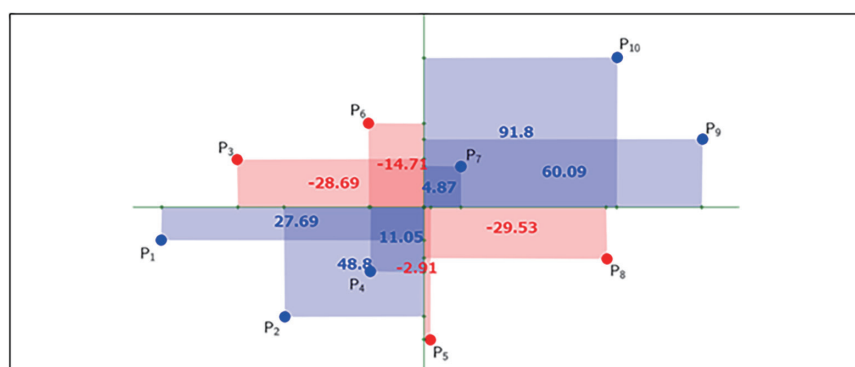


図 12 負の面積（左上と右下の長方形） 面積が負になることに戸惑いがある。

発言D1から、共分散の数式が散布図上の何を意味するのか理解している事がわかる。しかし、発言D2で面積が負になる事に悩んでいる。負の面積への疑問は想定していたが、あえて説明していない。面積とは図形上の解釈であり、公式内における偏差積は、図形としての面積を意味していないからである。生徒D2も「あくまでも x と y の数なので…」と言っているように、解釈である事に気付き始めている場面だ。しかし、後から考えれば教材中で面積と表示しているため、一言説明した方がいだろうと考える。

4 生徒による解説

意欲的な生徒たちの姿を見て、解説は生徒に委ねた。流れは変えずに要約を以下に記す。

生徒Eによる解説（要約）

「第1象限と第3象限ってやったと思うけど、プラスとプラスの積、マイナスとマイナスの積だから面積プラス。逆に、第2象限と第4象限に長方形ができる時に、マイナスとプラスの積だから面積マイナス。

今日分散の和を計算してあげると、第1象限と第3象限のプラスの足し算と、第2象限と第4象限のマイナスの足し算で、第1象限と第3象限の方が多かったってことじゃん。

つまり、こっちの方がでっかい面積だから、右上がりの直線状の正の相関になる。逆に、共分散の和がマイナスだったら、第2象限と第4象限の方にいっぱいさ、長方形ができて負の相関になるよね。」

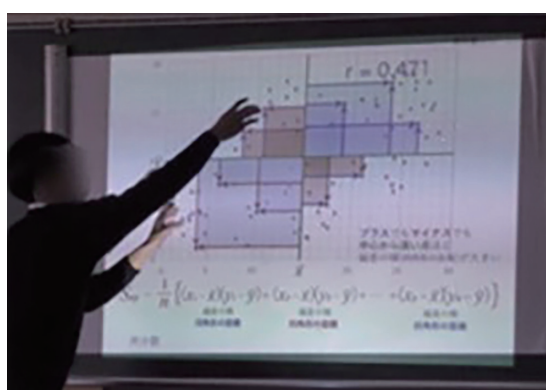


図 13 生徒による解説 スクリーン上の図を指し示しながら的確な解説ができた。

生徒Eの説明は、1分30秒ほどの簡潔なものだった。「象限」という用語は本論中では通常の用法とは異なるとのことわり書きをいれて使っているが、散布図上でそのような表現をするとは授業で指示していない。しかし、データを標準化することで該当する象限に変換されるため、決して間違った表現ではない。「標準化」は未修であり、生徒たちも「象限」という表現を素直に受け入れていたため補足しなかった。生徒Eによる説明を聞く生徒たちを見ていて、教室にとても良い空気感が生まれていた。そのくらい生徒たちが教材操作に夢中だったのだと推察できる。

5 生徒のアンケート記述の抜粋

授業後に生徒たちにアンケートを行い、授業の感想を書いてもらった。また自分自身の理解度についても評価してもらった。

(1) 授業の感想とそれに対する考察

【授業の感想】

- ・自分が気になったところを動かせることで、理解がより深まった。
- ・話を聞いているだけではイメージ出来ないものを、自分で動かしたりできるから、より理解しやすくなった。
- ・教科書だけでは分かりにくいグラフの動き方など、ICTでしか出来ないことがある。
- ・我々生徒が分かりやすいような工夫が施されていて充実していた。
- ・最初に相関係数の式を見ただけでは、どんなことを表しているのか、全くわからなかったが、ICT教材を使ったことでとても理解しやすくなりました。

はじめの 2 名の記述から、自分で動かせる能動的な学びが出来たと感じている事が読み取れる。教材の問題点を改善するアイディアを考える中で、自分自身が散布図上の点を、指で自由に動かしたいと思った。Excel の散布図を見ていて、分布を自在に変化させて散布図と式の関係を観察したい欲求があり、自分が一番拘ったものだ。生徒の記述から、自分の探究心への欲求を形にしたことが功を奏したとを感じる。「点をこっちの象限に動かせば、式の正負が逆転するはずだ」という予想を即座に実行 確認できる。思った結果が得られなければ、新たな疑問を得て試行錯誤したくなり、気になるところを動かす。Excel では出来ない事だ。「こうしたい」思いを即座に指で直感的に実現できる教材だった事が、今回の題材の探究活動に向いていたと実感できた。

後半の 3 名からも、ICT 教材により紙面上では見られない動きを見ることが出来る良さを感じていることが読み取れる。また、「我々生徒が分かりやすい工夫が施されていた。」という記述から、視覚的効果だけでなく、条件に応じてオブジェクト表示の ON/OFF を切り替えたり、動的に変化する配色設定など、それとなく「足場かけ」を仕組んでおく事は大事であろう。操作する生徒の心情を読み、その視点から思考に集中できるアーキテクチャを心がける事が必要であると考えます。

(2) 理解度の変遷

下の図 14 に共分散公式に対する理解度変遷の自己評価アンケートの集計画面を示す。



図 14 理解度の調査集計 式だけでは理解できなかったが教材使用後に理解できたものが多い。

「相関の正負と共分散の公式の関係」の理解度は、教材使用前 4 人（挙手したのは 2 人）となっている。教材使用後は、全員が理解できたと答えている。どの程度理解できているのか一人一人と話さなければ知る事はできないが、今回の実践により一定の成果が得られたのではないかと考える。実際、授業開始から 20 分ほどで教師の説明なしに、「相関の正負と共分散の公式の関係」の理解に迫り着き、それを説明できる生徒が現れている。これこそ ICT 教材の利点であり、生徒自身が能動的に操作し感得することで得られた成果であろうと考察する。

IV 共分散から相関係数へ

1 dSPAKの利用とそれに即した説明

前節の授業実践で散布図形状と共分散の関係を意味づけることができたわけだが、散布図形状と相関係数 r の対応関係が考察されていない。この状態のまま、教科書では、散布図形状を意識することなくデータ表のみで r の数値計算に臨み、 r が 1 に近ければ 2 種のデータは正の相関にある、 r の数値計算に臨み、それが 1 に近ければ 2 種のデータは正の相関にある、 -1 に近ければ負の相関にある、 0 に近ければ相関がない、と説明されている。これは生徒に教え込みを植え付けるようで避けたいところであろう。前述の授業実践では、1 校時 45 分という時間的な制約もありこれを改善するまでには至らなかった。

そこで、この節では共分散と散布図形状の関係を意味づけをもとに、(授業案までは行かずその前段階の教師側の教材研究の段階に留まるものではあるが、) 相関係数との関係を生徒が能動的に探索する試みを述べる。前述の共分散の意味探索の時間とは回を分けた次の段階の授業である。

まず共分散の場合と同じく、散布図形状と r の相互参照により、生徒たちは前述の関係を見いだせるだろう。すなわち、

- ① (散布図形状が) 傾き正の直線に近いとき、 r は 1 に近い。(この逆もいえる。)
- ② 傾き負の直線に近いとき、 r は -1 に近い。(この逆もいえる。)
- ③ 広がった状態であるとき、 r は 0 に近い。(この逆もいえる。)

という発見である。高校 1 年段階では論理は未習なので、それぞれの項目で括弧にくくった逆方向を意識させる必要はないだろう。素朴ながらも散布図と相関係数の数値を対応させた納得できる理解が重要であると考ええる。

問題はこれらの理由説明だが、まず③は共分散の段階の議論をそのまま持ち込めばよいだろう。標本点とその重心を中心にした各象限に分散され長方形面積の符号が相殺される r の分子 S_{xy} が 0 に近くなる。 S_x , S_y によってはそうではない場合もありうるが、高 1 の初学段階でそこまで深掘りをするとかえって理解を妨げるだろう。

残り①、②の説明は難しいが、dSPAK をもとにしてなるべく平易に説明することを試みる。

まず生徒たちは教材を操作して①、②を帰納的に引き出すことができるだろう。ただし、前回の共分散のときとの違いは、単に対角方向の象限にデータ点が多く存在するのみではなく、直線状に並んでいることである。これに気づかせるように生徒を方向づけたい。

①、②いずれの場合も分布に近い直線の傾き、あるいはより dSPAK に即していうと、各長方形のおよその縦横比を m (これは一意的には決まらないが、 r の絶対値が 1 に近いので、正であるか負であるかは決められる。統計的に特異な $m = 0$ の場合は想定していない) とすると、 $y - \bar{y} \doteq m(x - \bar{x})$, $k = 0, 1, \dots, n$ と見積ることができる。以下の式では簡便のために (本来高 1 段階では未習の) Σ 記号を用いることにすると、

$$S_{xy} = \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) \doteq \sum_{k=1}^n m(x_k - \bar{x})^2 = mS_x^2,$$

$$S_y^2 = \sum_{k=1}^n (y - \bar{y})^2 \doteq \sum_{k=1}^n m^2(x_k - \bar{x})^2 = m^2S_x^2$$

が得られる。したがって、さらにこれらより、

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{m S_x^2}{S_x \cdot |m| S_x} = \frac{m}{|m|} = \begin{cases} -1, & m < 0 \\ 1, & m > 0 \end{cases}$$

となり、これで①、②に一応の説明が与えられたことになる。つねに $-1 \leq r \leq 1$ であることは確認済みという立場であり、この証明は参考資料として配布している。

上の r の評価は実質的にはコーシー・シュワルツの不等式の等号成立条件の吟味部分に相当し、これが一番簡明な方法と思われるが、それでもこれを生徒の側から引き出すのは困難であろう。加えて上述したような近似式による概算には、生徒は数学でほとんど触れていないという部分も困難点として指摘できる。したがって教師の側からの誘導にならざるを得ないが、なるべく生徒と双方向的にやり取りをしつつ進めたいところである。

2 回帰直線による説明

2変数の平方完成で通常のものより複雑であるが、下式の左辺を変形して次の等式が証明できる。証明については、例えば 森, 黒田, 足立 (2017) を参照されたい。

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - (ax_k + b))^2 = S_x^2 \left(a - \frac{S_{xy}}{S_x^2}\right)^2 + (\bar{y} - (a\bar{x} + b))^2 + S_y^2(1 - r^2)$$

したがって、左辺を a, b の関数と見なしたとき、その最小値を与える $a = \hat{a}$, $b = \hat{b}$ は $\hat{a} = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$, $\bar{y} = \hat{a}\bar{x} + \hat{b}$ で与えられる。このときの直線 $y = \hat{a}x + \hat{b}$ が回帰直線なのだが、ここで使いたいのはこの回帰直線と標本点列との関係である。

まず、等式で $a = \hat{a}$, $b = \hat{b}$ とすると、

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - (\hat{a}x_k + \hat{b}))^2 = S_y^2(1 - r^2)$$

となるが、 S_y^2 が大きくない限り（これは通常扱う範囲で仮定してよいだろう）標本点列が回帰直線 $y = \hat{a}x + \hat{b}$ に近ければ、 r^2 が 1 に近いことが導かれ、(1), (2) がいえる。この場合は双方ともカッコ内の主張も示される。なお、ここに述べたことも参考資料として配布している。

平方完成自体は高校数学の範囲内であり生徒たちにとっては数学 I でも既習事項であるが、注意すべき点がいくつかある。

まず1点目は、上述の回帰直線は x を説明変数とするものであり、標本点から回帰直線への距離を y 軸方向に沿って測り、その平方和を考えていることである。対称性が失われているのである。

2点目は1点目の注意と関係するが、 y を説明変数とする回帰直線も考えることができ、それ $x = a^*y + b^*$ とすると、前と同様に

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - (a^*y_k + b^*))^2 = S_x^2(1 - r^2)$$

も成り立ち、これも S_x^2 が特に大きくならない限り、こちらからも①、②が出てくることになる。散布図は幅をもって分布しているので、直線状といえどもその直線は一意的に定まらないのである。そもそも距離を測る方向が両方で異なっている。振り返ってみると 前の m に関しても同様であった。

3点目として、一般的な散布図に対して、それを x または y を説明変数として見て回帰直線を介在させることが、果たして適当なのかという点があげられる。もちろん ①、② のような r では

これらはほぼ近くなるが、やはり散布図を見る原理の違いは疑問として残る。そうすると、対称性を考慮して主成分分析でいうところの、第一主成分方向の直線を考えることに行きつくことになる。これは、当然のことながら高校数学範囲外で本論での説明はふさわしくないだろう。そのかわり多次元空間のベクトルを扱い高校範囲外にはなるが、高校数学により関連性のある素朴な方法を附録として記しておく。

V 研究の成果と課題

1 探究型 ICT 教材の在り方

BYOD 授業は、単に内容の理解が深まるというだけでなく、ICT 教材の工夫次第で生徒の探究心を刺激できると確認できた。図 15 に、生徒の思考を可視化してみた。2 つ目を見てほしい。「直感的な操作による自発的疑問（探究心を芽生え）」がある。これがトリガーとなり「主体的に思考を働かせた操作による自らの気づき（充実した学び）」試行錯誤へつながる。さらに「ただ解けた」だけでなく、「学びに充実感や達成感といった付加価値」を生徒に与えて「真に深い学び」という別の段階に至ることができる。

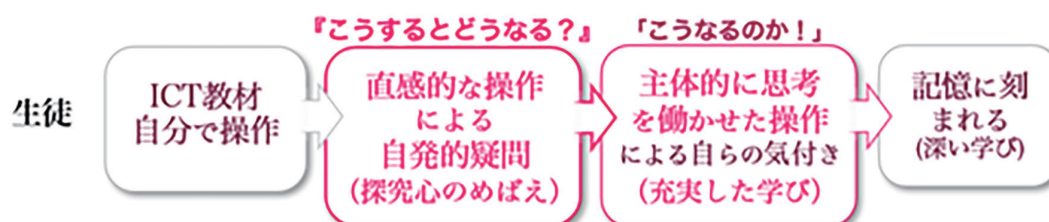


図 15 BYOD 授業における生徒の思考の変遷 主体的な思考、深い学びに至る前段階として、直感的操作を通しての探究心のめばえが生じる。

このような変遷を可能にするためには、ICT 教材を「ただ作る」でなく、生徒に達成感という付加価値を生み出す工夫が教師には必要であろう。探究心というトリガーを引くための「足場かけ」を教材のどこにどの程度仕込むかその匙加減が重要であり、簡単すぎても難しすぎても探究の妨げになってしまうだろう。「生徒のこうしたいという思いを即座に指で直感的に実現できる教材」を目指す事が要である。

また、生徒の思考を羽ばたかせるためには、教師は教材を自由に触らせ核心に迫ることは何も言わずに見守る事が肝要である。これは裏を返せば、生徒が混乱しない矛盾のない教材を作る必要があり、図 15 はそれが前提の話ということになる。

2 見えてきた諸課題

現状、高校数学における BYOD 活用のための ICT 教材の乏しさこそが課題であろう。特に今回のような ICT 教材を作成するには、おおよそ 50 時間を要した。従来の「教材研究」に加えて、「開発スキル」+「作成時間の捻出」が必要になる。開発スキルには、論理演算・エラー処理などの専門スキルが必要で、個人レベルでの ICT 教材作成は困難を極める。年間で 1, 2 個ほど少しずつ作ることが出来れば及第点であろう。

いきいきと教材を操作する生徒たちを見て、探究心の芽生えを目の当たりにした。教材に「足場かけ」を適度に施した結果である。探究心に繋がる教材の「足場かけ」について自分自身が探究し、さらに効果的な ICT 教材について今後も考えていきたい。

I, 1の注釈について

* 1 : 本研究のICT教材とは、数学の内容を探究するための教材を指す。共同編集アプリや掲示板アプリ、クイズアプリ等は除く。

* 2 : 本研究の探究活動とは、「総合的な探究の時間」で見られるような自ら課題を設定する探究活動とは異なる。数学の授業内の学習内容になるため、教師が設定した課題としての探究活動である。

附録 散布図形状と相関係数の関係 IV ①, ② について

IV, 1で述べたことの一部を念のために再記しておく、次の通りである。

(1) 散布図形状が傾き正の直線に近いとき、 r は1に近い。

(2) 散布図形状が傾き負の直線に近いとき、 r は-1に近い。

ここではこれらをベクトルの内積を用いた素朴な方法で説明することを試みる。同様のことに言及した文献を見つけれないので記しておくことにした。

高校数学の枠外に出ることもあるが、高校流のベクトル記号を用いることにする。2つのデータ $x: x_1, x_2, \dots, x_n$, $y: y_1, y_2, \dots, y_n$ を n 次元ユークリッド空間における2つのベクトル $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ として考える。補助的に同じく n 次元ユークリッド空間において $\vec{1} = (1, 1, \dots, 1)$ を考えると、これらとデータ x, y の統計量との関係は

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \vec{x} \cdot \vec{1}, \quad S_x^2 = \frac{1}{n} |\vec{x} - \bar{x} \vec{1}|^2, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \vec{y} \cdot \vec{1}, \quad S_y^2 = \frac{1}{n} |\vec{y} - \bar{y} \vec{1}|^2, \quad S_{xy} = \frac{1}{n} (\vec{x} - \bar{x} \vec{1}) \cdot (\vec{y} - \bar{y} \vec{1})$$

と書ける。このとき、 $\vec{x} - \bar{x} \vec{1}, \vec{y} - \bar{y} \vec{1}$ のなす角を (単純化して弧度法で表す) とすると、相関係数は次のように表すことができる：

$$r = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{\frac{1}{n} (\vec{x} - \bar{x} \vec{1}) \cdot (\vec{y} - \bar{y} \vec{1})}{\sqrt{\frac{1}{n} |\vec{x} - \bar{x} \vec{1}|^2} \times \sqrt{\frac{1}{n} |\vec{y} - \bar{y} \vec{1}|^2}} = \frac{(\vec{x} - \bar{x} \vec{1}) \cdot (\vec{y} - \bar{y} \vec{1})}{|\vec{x} - \bar{x} \vec{1}| |\vec{y} - \bar{y} \vec{1}|} = \cos \theta$$

したがって r が1に近いことは $\theta \cong 0$ と読み替えることができ、 $\vec{x} - \bar{x} \vec{1}$ と $\vec{y} - \bar{y} \vec{1}$ は同じ向きで平行に近いということになる。実際のところ、 $a = \frac{S_x}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}$ および $b = \frac{S_y}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}$ とおくと、

$$|b(\vec{x} - \bar{x} \vec{1}) - a(\vec{y} - \bar{y} \vec{1})|^2 = b^2 S_x^2 - 2ab S_{xy} + a^2 S_y^2 = \frac{2S_x^2 S_y^2}{S_x^2 + S_y^2} (1 - \cos \theta) \cong 0$$

と見積ることができて、 $b(\vec{x} - \bar{x} \vec{1}) - a(\vec{y} - \bar{y} \vec{1}) \cong 0$ が得られる。これは $k = 1, 2, \dots, n$ について $b(x_k - \bar{x}) - a(y_k - \bar{y}) \cong 0$ を指し示していることになり、標本点列 (x_k, y_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) は直線 $b(x - \bar{x}) - a(y - \bar{y}) = 0$ の近くに存在していることになる。

同様に r が-1に近いことは $\theta \cong \pi$ と読み替えることができ、上と同じ a, b に対して、

$$|b(\vec{x} - \bar{x} \vec{1}) + a(\vec{y} - \bar{y} \vec{1})|^2 = \frac{2S_x^2 S_y^2}{S_x^2 + S_y^2} (1 + \cos \theta) \cong 0$$

となり、同じ論法で (x_k, y_k) ($k = 1, 2, \dots, n$) は直線 $b(x - \bar{x}) + a(y - \bar{y}) = 0$ の近くに存在していると結論できる。 [説明終]

補記

本論の各章については、Ⅰは功刀と早川が執筆を担当し、Ⅱ、Ⅲ、Ⅴは功刀が、Ⅳと附録は中村が担当した。dSPAKの開発、およびそれを用いた授業実践は、全面的に功刀に負うところのものである。なお、dSPAKは次のURLにて公開している。本文中に記した通り、ネット上で直感的に操作を行うことができる仕様である。<https://www.geogebra.org/m/pcbqaejn>

謝辞

本研究の授業実践は山梨大学教職大学院の教育実習の一環として行ったものである。協力いただいた実習校の多くの先生方、およびいつも温かく迎え入れてくれて授業で活発に発言し元気づけてくれた生徒の皆さんに心からの謝意を表したい。

参考文献

- 1) 今井康晴 (2008), 「ブルーナーにおける「足場かけ」概念の形成過程に関する一考察」, 広島大学大学院教育学研究紀要 第一部 第57号, 2008, pp. 35-42.
- 2) 中村好則 (2015), 「高校数学科におけるICTを活用した指導とその意義」岩手大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要, 第14号, pp. 37-45.
- 3) 宮崎県教育庁高校教育課 資質・能力育成研究会 (2022) 授業研究部門 (数学), 令和3年度 学習指導案①.
- 4) 文部科学省 (2020), 「算数・数学科の指導におけるICTの活用について」
- 5) 森裕一, 黒田正博, 足立浩平 (2017), 最小二乗法・交互最小二乗法 (統計学One Point 3), 共立出版.
- 6) Wood D, Bruner JS, Ross G et al. (1976) The role of tutoring in problem solving, Journal of Child Psychology and Psychiatry, 17, pp. 89-100.