

計算法則をもとに計算の仕方を創造的に考える算数の学習指導

Mathematics instruction that encourages students to think creatively about calculation methods
based on mathematical principles

早 川 健¹ 中 山 大 輔²
HAYAKAWA Ken NAKAYAMA Daisuke

要約：計算法則は計算を支配する原理であり数学的に重要な法則であるが、計算ができることを重視する小学校算数の中では暗黙の内に扱われる。しかし、計算法則に基づいて計算過程を考え説明することを通して、論理的に考える力を伸ばすことができる。計算法則を積極的に活用し計算の仕方を考える実践授業を構想し、計算法則を計算の仕方を考える根拠として創造的に学ぶ児童の様相を明らかにすることを目指した。

その結果、未知の問題解決に除法の性質を活用する児童は、解決では少数であったが、比較検討では除法の性質を使うと筆算を使わなくても2桁の除法ができるという考えが生まれ、除数が同じ数ならば10以外の数でも除法の性質が活用できることや計算がより簡単にできると考えることができた。計算法則は計算の意味や特徴を明らかにする演算の原理として重要な法則にとらえ指導への示唆としたい。

キーワード：計算法則 活用 除法の性質

I 問題の所在

1 小学校算数の中での計算法則の位置づけ

計算法則は、数学的に考えれば数計算を支配しているものであり数学的には公理ともなるべきものである。しかし、小学校算数では、必ずしも重要な法則であると認められているとはいいがたい。それは、算数では、数の理解やそれらの計算ができることを重視するためである。数範囲が広がるとともに新たな四則計算の計算方法を考えていく。算数では計算ができることに重きを置くので、計算の原理である計算法則、例えば、交換法則や分配法則は、暗黙のうちに認められる。計算法則を使うことによってより簡潔に計算ができるため、計算を工夫するための計算のコツとして学習することもある。計算法則は学習者である子供たちからは、答えを求める過程で現れた計算のきまりは当然なきまりと考えられ、余分な学習内容と思われる可能性がある。

しかし、計算の原理である計算法則は、これに基づいて計算過程を考えたり、説明したりすることを通して、論理的に考える力を伸ばすことができる。学習指導の中で暗黙のうちに認められているからといって、そのまま見過ごしてよいというわけではない。無意識に認めていたことを意識することによって物事の背景や周辺の事柄が明らかになり理解が深められることがあるからである。その意味では無意識に行っていることを意識化することは教育的な価値が認められるのである。

本研究では、計算法則を積極的に活用することを提案する。単元のまとめで、いわば消極的に計算法則を扱うのではなく、「整数のかけ算では交換のきまりが成り立っていたから、小数のかけ算でも成り立つと考えて使ってみよう」と積極的な態度で臨みたい。計算法則を意識的に用いることに

¹ 教育実践創成講座 ² 教育学部附属小学校

よって、計算法則を未知の計算を考えるときの根拠として活用し、算数の創造的な学習態度を養っていきたい。

Ⅱ 研究の目的と方法

本研究の目的は、未知の問題を解決したり新しい計算を考えたりするときに、計算法則を考えた根拠にして創造的に計算の仕方を考えようとする算数の学習指導について理論的に考察し、実践授業を通して児童の様相を明らかにしていくことである。

研究の方法は次のとおりである。

- (1) 計算法則の指導に対する基本的な考えをまとめる。
- (2) これまでの計算法則の取り上げられ方を考察する。
- (3) 計算法則を根拠にして創造的に学ぶ授業を構想し実践する。実践授業を通して児童の様相を明らかにする。理論部分を早川が担当し、実践部分を中山が担当執筆する。

Ⅲ 研究内容

1 小学校算数において計算法則を取り扱う場面

計算法則が小学校の算数授業でどのように取り扱われているかを、教科書の2事例をもとに概観する。次節以降では、その取り扱い方をもとに、計算法則の役割や計算法則を指導する際の態度について考察していく。

(ア) 既習で成立していた計算法則が新しい学習でも成り立つことを統合的に考えさせるため

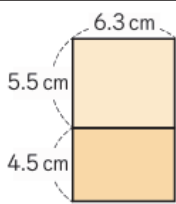
低学年では、乗数が自然数の場合、乗法は同数累加の意味でとらえられている。小学校5年の単元「小数のかけ算」では、乗数が小数となり、これまでの意味が通用しなくなるため、乗法の意味の拡張を図ることが主な学習指導のねらいとなる。乗法を「基準量×割合」で定義しなおし、有理数に拡張した数範囲で乗法を用いることができるようになる。単元終盤では、整数で成り立っていた、交換、結合、分配法則が小数でも成り立つことを確かめ、乗法の計算を統合的にとらえることができるようにする(図-1)。

6 右の長方形の面積は何 cm^2 ですか。

① 上の長方形、下の長方形の面積は、それぞれ何 cm^2 ですか。また、あわせて何 cm^2 ですか。

② たて 10 cm、横 6.3 cm の長方形とみて面積を求め、① の答えと比べましょう。

③ ⑦～⑩の■、●、▲に、自分で小数を決めてあてはめ、等号の左側と右側が等しいか確かめましょう。



5.5 cm
4.5 cm
6.3 cm

⑦ $\blacksquare \times \bullet = \bullet \times \blacksquare$

⑧ $(\blacksquare \times \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times (\bullet \times \blacktriangle)$

⑨ $(\blacksquare + \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle + \bullet \times \blacktriangle$

⑩ $(\blacksquare - \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle - \bullet \times \blacktriangle$

$(5.5 + 4.5) \times 6.3 = 5.5 \times 6.3 + 4.5 \times 6.3$ になっているよ。
計算のきまりは、小数のときも成り立つのかな。

5.5 + 4.5 = 10 だね。

⑦～⑩の■、●、▲に、自分で小数を決めてあてはめ、等号の左側と右側が等しいか確かめましょう。

同じ記号には同じ数を入れるよ。

まとめ

整数のときに成り立った計算のきまりは、小数のときにも整数のときと同じように成り立つ。

—— 練習 ——

⑧ 上の⑦～⑩の計算のきまりを使って、くふうして計算しましょう。

① $1.7 \times 4 \times 2.5$ ② $2.4 \times 1.8 + 2.6 \times 1.8$

③ 25.3×4 ④ 9.8×15

図－1 東京書籍「新しい算数5上」「4. 小数のかけ算」(p. 49)

(イ) 計算のきまりとして学習し計算の工夫ができるようにするため

小学校4年の単元「計算のきまり」では、○の数を求める問題を解いた後、2人の子供の式を見比べ、分配法則が成り立つことが示される。授業のまとめでは文字●，■，▲を用いた式によって分配法則が確認される。その後練習問題を行う。この練習問題は、分配法則を用いることによって計算が簡単になる問題である。工夫して計算するためには分配のきまりを使うとよいことが理解できる。このように、問題解決の結果、分配のきまりがあることを知らせ、このきまりを用いることにより工夫して手際よく計算ができることを指導する。

2 計算のきまりとくふう

1

右の図で、○と●は、全部で何こありますか。
1つの式に表して、答えを求めましょう。

① 2人の考えを説明しましょう。

$(13+7) \times 6 = 120$
 答え 120こ

$13 \times 6 + 7 \times 6 = 120$
 答え 120こ

上の2つの式は、答えが等しくなるので、等号でつなぐことができます。

$$(13+7) \times 6 = 13 \times 6 + 7 \times 6$$

? ほかの場合も、等号でつなぐことができるか調べよう。

② 右の図で、○と●は全部で何こありますか。
①の2人の考えを使って、答えを求めましょう。

③ 自分で図をかくて、ほかの数でも調べてみましょう。

まとめ

()を使った式の計算のきまりには、下のようなものがある。

分配のきまり

$(\blacksquare + \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle + \bullet \times \blacktriangle$
 $(\blacksquare - \bullet) \times \blacktriangle = \blacksquare \times \blacktriangle - \bullet \times \blacktriangle$

いくつかの場合を調べて、きまりをまとめられたね。

同じ記号には、同じ数が入るよ。

— 練習 —

⚠ 数をよく見て、分配のきまりを使って計算しましょう。

① $102 \times 25 = (100 + \square) \times 25$

$= 100 \times 25 + \square \times 25$

$= \square$

② $98 \times 6 = (\square - 2) \times 6$

$= \dots$

図-2 東京書籍「新しい算数4下」「8. 計算のやくそくを調べよう」(p. 10)

2 計算法則の役割

前節の例から、小学校算数の中の計算法則の役割は次の2つと考えてよい。

- ①計算を支配する原理であり、数の代数的構造を明らかにすること
- ②計算を能率的に手際よく行うことができるようにすること

①について

計算法則は数学的には数の計算を支配する原理であり重要な法則である。数学学習においては、学習が進むにつれ、扱う数範囲が、自然数、整数、有理数などと拡張される。そして、例えば、有理数を新たに学ぶときに、整数の範囲で成り立っていたある演算の計算法則が、有理数においても成り立つことが確かめられると、その演算は有理数の範囲にまで拡張されて使用することができる

ことになる。このようにして、計算法則が成立するか否かを確かめることによって、学習者の数や計算の概念が拡張されていく。計算法則はその際に1つの重要な役割を果たす。

しかし、小学校算数では、計算法則はそれほど重視されない。算数では具体的に即して数をとらえ、数を理解し、計算ができるようになることを大きな目的とする。そのため、計算法則を計算の仕方を説明するために使用することはあるが、上述のように数を体系的にとらえたり、計算過程を計算法則に基づいて考え計算法則そのものの意義に目を向けさせたりするために使われることはあまり行わない。

前節の取扱い例では（ア）に該当するように、計算法則は単元の終盤に付け足すように登場する。整数で成り立つ3つの計算法則が、有理数に数範囲が広がったときにも成立することが確かめられ、計算法則によって、数や計算を統合的にとらえる、数学的には重要な場面である。ところが、計算法則を用いて工夫して計算すること（②の役割）を重視して、適用問題でも計算が簡潔にできることを指導するに留まっている。

②について

（イ）の場面では、問題解決の中で計算法則が見い出される。きまりをまとめた後は、それを使って計算を工夫したり、手際よく答えを求めたりできるようにする。計算法則を用いることによって、能率的に計算できたり、簡単・便利に計算できたりすることを目的としている。

このように、小学校算数では、計算法則は、新しく学んだ学習内容をこれまでの観点から整理したり、計算を簡潔に手際よくしたりするために学習のまとめの段階で扱われることが多い。いわば、計算法則を消極的に受け入れ、受動的に扱っているととらえることができる。

これに対して筆者は、計算法則をもとにして、新たな計算を考えていくような創造的に算数を学ぶことを目指したいと考える。「①計算を支配する原理であり、数の代数的構造を明らかにする」役割を十分に果たすためには、計算法則そのものの意義に目を向けさせることが大切であり、問題解決の中で計算法則を積極的に活用する学習が必要なのである。そこで、次節では、創造的に算数を学ぶための計算法則を用いる際の態度について考えていく。

3 計算法則を用いる態度

（1）計算法則を学習指導に取り入れる際の2つの態度

- A. ある事実についての知識が得られた後で、これまでの法則が当てはまっているかどうかを確かめ、新しく学習した数も同じ仲間として見ていこうとする態度。
- B. これまで成り立っていた法則を仮定としてさらに推論を進め、それによってある結果を予想し、その妥当性を確かめながら新しい知識を獲得していこうとする態度。

Aについて

新しい知識をこれまでの観点で整理し、新たな知識を追認して位置づけていこうとする考え方である。得られた知識を確かめ、位置づけて数と計算としてまとめていく考え方である。現在の教科書で扱われている計算法則の用いられ方である。

先の（ア）の場面は、小数の計算を学習する中で、整数について成り立っていた交換、結合、分配法則が、小数においても成り立っていることを確かめている。整数と小数が同じ仲間であると見ようとする考え方がうかがえる。（イ）の場面は、計算法則は計算を手際よく能率的に行うことができるというよさがある。しかし、計算法則は計算を簡単にする働きに留まっている。本研究では、

算数を創造的に学ぶために計算法則そのものを学習に生かそうと考えていく。

Bについて

現在の学習指導では、前述の教科書の例のように、計算法則が計算学習のまとめで登場し、いわば、後追いの役目に留まっている。本研究では、計算法則が先行して新たな算数を予測し創造するために用いられ、推論を進める推進役としての役割が果たせないかを模索する。新しい知識を獲得していこうという算数をつくり生かす態度で、計算法則の活用を考えていく。

（２）未知の計算を考えるときの根拠として計算法則を活用する授業の構想

Bの態度で計算法則を意識的に用いることを考える。例えば、計算法則を発見した後、その計算法則が成り立つと仮定して、さらに推論を進め、それによってある結果を予想し、その妥当性を確かめながら新しい知識を獲得していこうとする。未知の計算を考えるときの根拠として計算法則を活用し問題解決できないかを考える。

この方針に従って授業を構想する。

計算法則のうち、除法に関して成り立つ性質に焦点を当てる。この計算法則は、小学校４年「整数のわり算」の単元の学習の中で取り扱われる。現行の指導では、単元「わり算の筆算（１）」で、まず、除数が１桁の除法の筆算形式を学ぶ。その後の単元「わり算の筆算（２）」で、除数が２桁の除法の筆算形式を学習する。そして、仮商修正の方法を学び、３桁÷２桁の筆算ができるようにする。単元終盤には、除法の性質として「被除数と除数に同じ数をかけても、同じ数で割っても商は変わらない」を帰納的に発見する。そして、この計算法則を使って、工夫して計算できるように計画される。

本研究では、単元「わり算の筆算（２）」の構成を変える。単元冒頭で除法の性質を扱う。その後、本時（実践授業）では、除法の性質を根拠に、未習の３桁÷２桁の計算の仕方を考える授業を行う。

具体的には、まず、第１，２時で除法の性質を発見する。「何十÷何十」の計算から除法の性質「被除数と除数に同じ数をかけても、同じ数で割っても商は変わらない」を帰納的に発見する。

第３時は、未習の「 $168 \div 24$ 」を問題とする。既習の除法の性質を活用して、未習の「 $168 \div 24$ 」を解決していく。未習の計算に計算法則が成り立つと考えて、被除数と除数を同じ数でわる。何度か試すことで、３桁÷２桁の計算を、２桁÷２桁、そして既習の２桁÷１桁に変えていく。除法の計算法則を積極的に活用することによって、未知の計算問題を解決していくのである。その後、２桁でわる筆算形式や仮商修正を学ぶ。

４ 本研究で対象とする計算法則

本研究で対象とする計算法則は次のようなものである。

①加法・減法に関して成り立つ性質

「たす数とたされる数をとりかえても和は変わらない」（交換法則）

「たす数を大きくした分だけたされる数を小さくすればその和は変わらない」

「たす数を１大きくすると、和は１大きくなる」（分配法則）

低学年の段階では計算法則を用いて計算過程を厳密に吟味したり、説明したりしていくことは難しい。低学年は数概念を形成し、数に関する基本的なことがらを理解することが主なねらいであり、計算のきまりを帰納し活用する以前の段階である。しかし、単元末に数カードを並べると、簡単な計算のきまりに目を向けることができ、それに基づいて考えていくと数の理解や計算の理解に役立つ。

②加法と減法の関係（乗法と除法の関係）

一般には検算に用いられることが多い。計算法則ではないが、加法から減法、減法から加法へのきっかけ作りに使うことができる。乗法と除法の関係も同様に、互いの逆演算の意識は算数の計算学習の発展のきっかけを与えてくれる。

③乗法に関して成り立つ性質

「かける数を1大きくすると、積はかけられる数だけ大きくなる」(乗数と積の関係・分配法則)

「かけられる数とかける数を反対にしても積は変わらない」(交換法則)

「かけられる数が2つの数の和であるとき、積はそれぞれの積の和である」(分配法則)

乗法の計算法則は、かけ算九九をつくる過程で子供に発見させていくことができる。九九をつくる際に、式を乗法の意味(1つ分×いくつ分)として教え、答えの求め方は同数累加を教える。同数累加で九九を作っていくと「前の答えにかけられる数をたすと次の九九の答えになる。」を発見する。さらに、アレイ図をもとに交換法則を見出す。1の段、2の段、3の段の答えを見比べると、分配法則を発見するきっかけとなる。計算法則を根拠にして、子供自らが九九をつくり出すことができる。

④除法に関して成り立つ性質

「被除数と除数に同じ数をかけても、同じ数で割っても商は変わらない」

前節の「単元をつなぐ考え方としての計算法則」で述べたが、乗法同様、単元をつなぐ性質として重要である。4年生の整数の除法で発見し、5年生の小数のわり算と6年生の分数のわり算で活用する。

5 これまでの計算法則の学習指導

ここでは、計算法則が算数指導でどのように取り上げられてきたかを、学習指導要領の記述から整理する。

①昭和33年学習指導要領

3年「A数と計算」、5年「A数と計算」には次のような記述があり、能率的に手際よく計算できるように計算法則を使うようにしている。

3年A数と計算

(8) 乗法について、次のような関係があることを知らせ、計算やその結果の確かめに用いることができるようにする。

ア 交換や結合の法則。

イ 乗数や被乗数が0であるとき積も0であること。

ウ 乗数が1だけ増減すると、それに伴って、積も被乗数の大きさだけ増減すること。

5年A数と計算

(8) 小数の乗法・除法についても、整数の場合と同じ関係や法則がなりたつことを理解させ、計算の方法をくふうしたり計算の結果を確かめたりするのに、これを用いることができるようにする。

②昭和43年学習指導要領

能率的に手際よく計算でき、検算に使えるように計算法則を用いるようにしている。新しい計算を学習して、これまでの計算法則が当てはまり、新しい計算も同じ仲間として見ていこうという統合の考えがある。

3年A数と計算

- (3) 乗法についてなりたつ性質（たとえば、交換、結合などの法則や、乗数が1ずつ増減したときの積の変化のしかたなど）を知り、それを計算などに用いること。

4年A数と計算

- (3) 四則の意味と四則に関してなりたつ性質などについての理解をまとめ、実際の場合における四則の適用や検算などに適切に用いることができるようにする。

ア 四則が用いられる場合と四則の相互関係についての理解をまとめること。

イ 計算が交換、結合、分配などの法則をもとにしていることに着目すること。

③平成元年学習指導要領

計算法則は、「計算の仕方や計算の確かめをしたりすることに用いること」が記された。また、2年、3年の加法及び減法、乗法に関して成り立つ性質に加えて、4年に「除法に関して成り立つ性質」が初めて登場する（下記傍線部・筆者による）。

2年A数と計算

- (2) 加法及び減法についての理解を深め、それらを用いる能力を伸ばす。

ウ 加法及び減法に関して成り立つ簡単な性質について知り、計算の仕方を考えたり計算の確かめをしたりすることに用いること。

- (3) 乗法の意味について理解し、それを用いることができるようにする。

イ 乗法に関して成り立つ性質として、乗数が1ずつ増えるときの積の増え方や交換の法則などを知り、乗法九九を構成したり計算の確かめをしたりすることに用いること。

- 4年(4) 整数の除法についての理解を深め、それを用いる能力を伸ばす。

ウ 除法に関して成り立つ性質として、除数、被除数に同じ数をかけても、同じ数で割っても商は変わらないことなどを知り、それを計算の仕方を考えたり計算の確かめをしたりすることに用いること。

- (7) 四則の意味、四則に関して成り立つ性質などについての理解をまとめ、それらを適切に用いて実際の場合において四則を適用したり、計算の確かめをしたりすることなどができるようにする。

ア 四則が用いられる場合と四則の相互関係についての理解をまとめること。

イ 計算の仕方が交換、結合、分配の法則などを基にしてできていることに着目すること。

④平成29年学習指導要領

計算法則については、各学年の「A数と計算」領域において、「ア 知識・技能」として、「性質について理解すること。」が記される。また、「イ 思考力、判断力、表現力」として、「計算に関して成り立つ性質を見いだしたりするとともに、その性質を活用して、計算を工夫したり計算の確かめをしたりすること。」と記される。

知識として計算法則を知るだけでなく、数学的な考え方として、計算法則を仮定して考え、課題解決していこうとする考え方を養うのに、計算法則を活用することが示された。

Ⅳ 授業実践（附属小学校）

1 単元について

児童はこれまで、整数の除法計算について、第3学年から学習を始め、第4学年の前単元「わり算の筆算（1）」で除数が1位数の場合の筆算を学習している。本単元では、除数が2位数で被除数が2～3位数のときの筆算について学習する。

指導にあたっては、前単元で学習した1位数でわる除法の計算方法を児童が自ら生かして、2位数でわる筆算を工夫して考え出せるような学習を大切に、児童とともに除法の筆算を創り上げていきたい。その学習過程で「筆算の仕方はこれまでと同じ」という考えを大切に、被除数や除数が大きい桁数の筆算になっても、それまでの学習との共通点を見出すという統合的な考えを児童に身につけさせたい。

2位数でわる計算は、除数の桁数が増えても計算を進めるときの考え方や手順は同じであるが、除数が2位数になると「商をたてる」の段階で、仮商の修正が必要となる場合がある。この仮商の修正に困難を感じる児童も多くいると予想されるので、仮商のたて方や過大商、過小商の仮商修正の仕方について、教科書に示されている非形式の筆算も提示しながら、丁寧に学習を進めていきたい。

また、「被除数と除数に同じ数をかけても、被除数と除数を同じ数でわっても、商は変わらない」という除法の性質についても学習する。筆算の計算を確実にできるようにするとともに、除法の性質を活用することで、学習していない計算ができたり、筆算を使わずに暗算でも計算できたりする良さを感じられるように学習を進めていきたい。除法の性質を活用することで、未習の計算も既習を生かしてできるという経験は、第5学年「小数のわり算」や第6学年「分数のわり算」の学習で活用できるものとなるので大切に学習を進めていきたい。

2 単元の目標

- 既習の除法の筆算の仕方や数のまとまりを用いて2～3位数を2位数でわる除法の計算をすることができる。（知識及び技能）
- 数量の関係に着目して、2～3位数を2位数でわる除法の計算の仕方を考え、説明している。（思考力、判断力、表現力等）
- 2～3位数÷2位数の除法の計算方法を、既習の除法の計算を基に考えたことを振り返り、多面的にとらえ検討してよりよいものを求めて粘り強く考えたり、数学のよさに気づき学習したことを今後の生活や学習に活用しようとしていたりしている。（学びに向かう力、人間性等）

3 単元の評価規準

知識・技能	思考・判断・表現	主体的に学習に取り組む態度
①除数が1位数や2位数で被除数が2位数や3位数の場合の計算が、基本的な計算を基にしていることを理解している。また、その筆算の仕方について理解している。 ②除法の計算が確実にでき、それを適切に用いることができる。 ③除法に関して成り立つ性質について理解している。	①数量の関係に着目し、計算の仕方を考えたり計算に関して成り立つ性質を見いだしたりしているとともに、その性質を活用して、計算を工夫したり計算の確かめをしたりしている。	①整数の除法について、数学的に表現・処理したことを振り返り、多面的に捉え検討してよりよいものを求めて粘り強く考えたり、数学のよさに気づき学習したことを生活や学習に活用しようとしていたりしている。

4 指導と評価の計画（総15時数）

評価：[知] 知識・理解 [思] 思考・判断・表現 [主] 主体的に学習に取り組む態度

評価方法：【指導に生かす評価（・），記録に残す評価（○）】

時	目標	学習活動	評価規準・評価方法等
わり算のせいしつ 【3時間】			
1	除法の性質について理解することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・商が等しいわり算の式を見比べて，除法の性質について考える。 ・除法の性質についてまとめる。 	○知③【行動観察・ノート分析】
2	除法の性質を活用して，末尾に0のある数のわり算の仕方を理解し，説明することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・除法の性質を活用した何十，何百の計算の仕方を考える。 ・計算練習をする。 	<ul style="list-style-type: none"> ・知②【行動観察・ノート分析】 ・思【行動観察・ノート分析】
3 本時	除法の性質を活用して，問題を解決することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・問題場面から数量の関係をとらえ，立式する。 ・$168 \div 24$の除法の性質を活用した計算の仕方を考える。 ・除法の性質を活用すると，未習の除数が2桁の除法も計算できることをまとめる。 	<ul style="list-style-type: none"> ○思【行動観察・ノート分析】 ○主【行動観察・ノート分析】
2けたの数でわる筆算（1） 6時間			
4 5	2位数÷2位数（仮商修正なし）の筆算の仕方を理解し，その計算ができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・問題場面から数量の関係をとらえ，立式する。 ・$87 \div 21$の筆算の仕方を考える。 ・除数を20（切り捨て）とみて，商の見当をつける。 ・$87 \div 21$の筆算の仕方をまとめる。 ・商の見当をつける際，被除数と除数の両方をまるめる方法があることを知る。 ・$87 \div 21$の筆算をする。 ・$87 \div 21$の計算の検算をする。 ・計算練習をする。 	<ul style="list-style-type: none"> ・知①【行動観察・ノート分析】 ・思【行動観察・ノート分析】
6	2位数÷2位数の筆算で，過大商をたてたときの仮商修正の仕方を理解し，その計算ができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・$86 \div 23$の筆算の仕方を考える。 ・除数を20（切り捨て）とみて，商の見当をつける。 ・過大商の場合の仮商修正1回の仕方を理解し，この型の計算練習をする。 ・$81 \div 12$の筆算の仕方を考える。 ・過大商の場合の仮商修正2回の仕方を理解し，この型の計算練習をする。 	・知②【行動観察・ノート分析】

7	2 位数 ÷ 2 位数の筆算で、過小商をたてたときの仮商修正の仕方を理解し、その計算ができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ $78 \div 19$ の筆算の仕方を考える。 ・ 除数を 20（切り上げ）とみて、商の見当をつける。 ・ 過小商の場合の仮商修正の仕方を理解し、この型の計算練習をする。 	・ 知②【行動観察・ノート分析】
8	除数に着目して、2 位数 ÷ 2 位数の筆算で、除数の切り捨てや切り上げを選んで仮商をたてて計算することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ $87 \div 25$ の筆算の仕方を考える。 ・ 除数を切り捨てた（過大商）場合と、切り上げた（過小商）場合の筆算の仕方を比べる。 ・ 自分が仮商をたてやすい除数の処理の仕方を考える。 ・ 計算練習をする。 	○ 思【行動観察・ノート分析】 ○ 主【行動観察・ノート分析】
9	3 位数 ÷ 2 位数 = 1 位数の筆算の仮商のたて方を 2 位数 ÷ 2 位数の筆算の仕方を基に考え、説明することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ $153 \div 24$ の筆算の仕方を考える。 ・ 計算練習をする。 	・ 知①【行動観察・ノート分析】 ・ 思【行動観察・ノート分析】
2 けたの数でわる筆算（2） 3 時間			
10	3 位数 ÷ 2 位数 = 2 位数の筆算の仕方を理解し、その計算ができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ 問題場面から数量の関係をとらえ、立式する。 ・ $345 \div 21$ の筆算の仕方を考える。 ・ $345 \div 21$ の筆算の仕方をまとめる。 	・ 思【行動観察・ノート分析】
11	2 位数 ÷ 1 位数 = 2 位数の筆算の仕方をういて、3 位数 ÷ 2 位数 = 2 位数の筆算をすることができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ 計算練習をする。 ・ $476 \div 15$ で、除数を切り捨てた（過大商）場合と、切り上げた（過小商）場合の筆算の仕方を比べる。 	・ 知①【行動観察・ノート分析】
12	商に 0 がたつ場合（商が何十）の簡便な筆算の仕方や、除数が 3 桁の場合の筆算の仕方を、既習の除法の筆算の仕方を基に考え、説明することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ $941 \div 23$, $960 \div 16$ の筆算の仕方を考える。 ・ 計算練習をする。 ・ $732 \div 216$ の筆算の仕方を考える。 ・ 216 を 200 とみて、仮商をたてる。 ・ 計算練習をする。 	・ 知①【行動観察・ノート分析】 ・ 思【行動観察・ノート分析】
13	末尾に 0 のある数の除法の簡便な筆算の仕方を既習の除法の計算の仕方を基に考え、説明することができる。	<ul style="list-style-type: none"> ・ 末尾に 0 のある数の除法の筆算の仕方を考え、末尾に 0 のある数の除法の簡便な筆算の仕方をまとめる。 ・ 末尾に 0 のある数の除法の筆算の仕方と、末尾に 0 のある数の除法での余りの求め方を考える。 ・ 末尾に 0 のある数の除法の筆算の仕方についてまとめる。 	・ 知③【行動観察・ノート分析】 ・ 思【行動観察・ノート分析】

まとめ 2時間		
	<p>学習内容の定着を確認するとともに、数学的な見方・考え方を振り返り価値づける。</p> <p>・「たしかめよう」に取り組む。 ・「つないでいこう 算数の目」に取り組む。</p>	<p>○知②【行動観察・ノート分析】</p> <p>○思【行動観察・ノート分析】</p> <p>○主【行動観察・ノート分析】</p>

5 本時の学習

(1) 本時の目標

○除法の性質を活用して、問題を解決することができる。

(2) 指導意図

前時では、末尾に0のある除法を除法の性質を活用して計算している。本時では、筆算が未習の末尾が0でない、除数が2桁の除法を除法の性質を活用して計算することを通して、児童が自ら見出した除法の性質の有用性に気づき、活用できるようになることを目指したい。さらに、除法の性質を活用して計算を行うことで、そのよさを感じ、工夫して計算しようとする態度の育成につなげていきたい。

授業過程としては、まず、未習の除数が2桁の除法について、筆算では計算ができないことをつかむ。そこから、第1時で見つけた除法の性質を活用して問題を解決できないかという見通しをもち学習を進めていく。比較検討する場面では、除数と被除数を一度同じ数でわると既習の方法で除法ができる場合や、除数と被除数を二度わると除数と被除数がさらに小さくなり、暗算でも計算できる場合、同じ式でもそれまでの思考過程が違う場合などについて取り上げ、それぞれの共通点や相違点を問うたりすることによって、除法の性質についての理解を深めていきたい。

(3) 学習過程

過程 分	<p>・主な学習活動</p> <p>・内容○予想される児童の反応</p>	・指導上の留意点
7	<p>1 本時の課題を捉える</p> <p>・問題場면을把握する。</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>168枚のおり紙を24班で等分すると、1班分は何枚になりますか。</p> </div> <p>○わり算になりそうだ。 ○だいたいの枚数はどれくらいだろう。 ○式は、$168 \div 24$になる。 ○一班分は、だいたい何枚になるのかな。</p>	<p>・全校で千羽鶴を折ることになり、4年生は168羽を折ることになったことを伝える。 ・4年生は3クラスあり、各クラス8班あるので、全部で24班になることを確認する。</p>

	<p>○数直線を見ると、どれくらいになりそうかわかるかな。</p> <p>○筆算でできるかな。</p> <p>○2桁でわる筆算の仕方はわからない。</p>	<p>・除数が2桁の筆算は未学習であることから、筆算以外に解決方法がないか考える。</p>
	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> $168 \div 24$ の答えはいくつ？ </div>	
	<p>・どのようにすれば解決できそうか見通しを持つ。</p> <p>○わる数が1桁になれば計算できそう。</p> <p>○わられる数とわる数を同じ数でわったらいいかもしれない。</p>	<p>・わる数が1桁になれば、計算できそうだという見通しを持たせる。</p>
5	<p>2 自力解決をする</p> <p>○わられる数とわる数も3でわると $56 \div 8 = 7$</p> <p>○わられる数とわる数を4でわると $42 \div 6 = 7$</p> <p>○わられる数もわる数も6でわると $28 \div 4 = 7$</p> <p>○わられる数もわる数も8でわると $21 \div 3 = 7$</p> <p>○わられる数とわる数を2でわって、さらに6でわると $14 \div 2 = 7$</p> <p>○わられる数もわる数も3でわって、さらに8でわると $7 \div 1 = 7$</p>	<p>・言葉や図、式で記述していくことを伝える。</p> <p>・解決し終わった児童には、別の方法で確かめるように促す。</p>
28	<p>3 比較検討する</p> <p>・最初に答えが7になることを確認する。</p> <p>・どのようにして答えを出したのかを全体で検討する。</p> <p>○わられる数もわる数も6でわって、 $28 \div 4 = 7$</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center; margin-top: 10px;"> $168 \div 24 = 7$ <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> \downarrow 6でわる </div> <div style="text-align: center;"> \downarrow 6でわる </div> </div> $28 \div 4 = 7$ </div>	<p>・答えが7になることを確認した後、どのような式で答えを出したのかを問う。</p> <p>・どのような式で求めたのか先に聞き、除数と被除数をいくつでわったのかを考える。</p>

	<p>○わられる数もわる数も2でわって、さらに3でわって、$28 \div 4 = 7$</p> <div data-bbox="317 320 652 553" style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> $\begin{array}{ccc} 168 \div 24 = 7 & & \\ \downarrow 2\text{でわる} & & \downarrow 2\text{でわる} \\ 84 \div 12 & & \\ \downarrow 3\text{でわる} & & \downarrow 3\text{でわる} \\ 28 \div 4 = 7 & & \end{array}$ </div> <p>○わられる数とわる数を3でわって、$56 \div 8 = 7$</p> <div data-bbox="317 674 652 846" style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> $\begin{array}{ccc} 168 \div 24 = 7 & & \\ \downarrow 3\text{でわる} & & \downarrow 3\text{でわる} \\ 56 \div 8 = 7 & & \end{array}$ </div> <p>○わられる数とわる数を3でわって、さらに8でわって、$7 \div 1 = 7$</p> <div data-bbox="317 983 652 1216" style="border: 1px solid black; padding: 10px; text-align: center;"> $\begin{array}{ccc} 168 \div 24 = 7 & & \\ \downarrow 3\text{でわる} & & \downarrow 3\text{でわる} \\ 56 \div 8 & & \\ \downarrow 8\text{でわる} & & \downarrow 8\text{でわる} \\ 7 \div 1 = 7 & & \end{array}$ </div> <p>・それぞれの方法の共通点や相違点を問う。</p> <p>○みんなわり算の性質を使って、計算を簡単にしている。</p> <p>○わる数を1桁にすると、計算できる。</p> <p>○最後の式は同じだったけど、わる数が違う。</p> <p>○わられる数とわる数をなるべく小さい数にすると暗算でも計算できる。</p>	<p>・複数の式を比べることを通して、共通点や相違点を問う。</p>
5	<p>4 振り返る</p> <p>・除法の性質を活用するよさを問う。</p> <p>○わり算の性質を使うと、数が小さくなって、習っていないわる数が2桁のわり算も計算できる。</p> <p>○なるべく小さな数にすると計算しやすい。</p> <p>・学習感想を書く。</p> <p>○もっと大きい数でもこの性質が使えるのかな。</p>	<p>・板書の言葉から、本時を振り返るようにする。</p>

<p>○他の場面でも簡単に計算できないか考えてみたい。</p> <p>○わり算の性質を使うと簡単に計算することができる。</p>	
--	--

6 指導の実際

(1) 児童の考えから課題設定を行う

問題を提示して、「 $168 \div 24$ 」と立式したところで、既習の除数が1桁の除法とはちがうことに気づき、計算ができないと発言した児童がいた(図-3)。そこで、前時との違いを問うことで、除数が2桁の除法は未習であることをみんなで確認しながら、「どうしたら $168 \div 24$ の答えを見つけられるだろうか」と本時の課題を設定していった。以下はその際の発話記録である。

T: Sちゃんは、なんでこの計算がわからないと思ったの?

C: 今までは、 $168 \div 24$ の場所が1桁だったけど...

C: あー

C: 2桁になっちゃったから

T: 聞こえた?

C: わる数が2桁になっちゃったから、前と違う

T: Hさん、どういうことかもう一度言って

C: いつもだったらわる数の24は1桁なのに2桁だからできない

C: 初めてだから

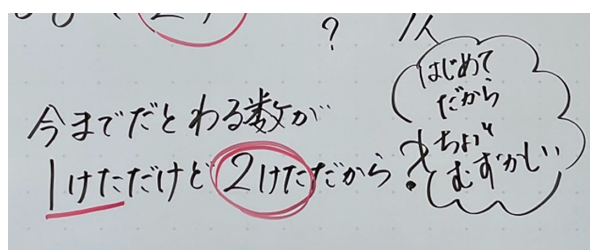


図-3 これまでとの違いに気付いた発言

前時の学習で「 $60 \div 20$ 」を除法の性質を用いて解決したことを振り返り(図-4)、 $168 \div 24$ も除法の性質を使えば答えが見つかりそうだという見通しを持たせて自力解決に結びつけていきかけたが、自力解決では、除法の性質を活用しようとしていた児童は少数であった。もっと丁寧に既習事項を問い、除法の性質の活用について板書にしっかりと残すことで、既習事項である除法の性質を用いて解決できそうだという見通しをもっと持たせる必要があった。

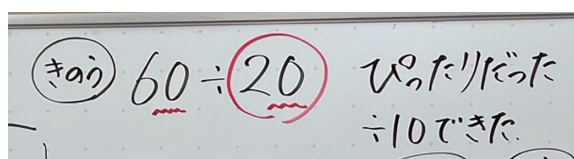


図-4 前時の除法の性質をふり返る

(2) 除法の性質を活用しようとする考えを全体で共有する

比較検討の場面では、前時の学習をいかして、除法の性質を活用し、被除数と除数を10でわろうとしたがうまくいかなかった児童の考えを取り上げた。以下はその際の発話記録である。

-
- T：ちょっと見てたら，途中でHさんが悩んでた。こうやってたんだよ。（ $168 \div 24$ の168と24の下に↓を書く）こうやって矢印を書いてたんだよ。
- C：あ，同じだ。
- C：違うわ
- T：Hさんは何をしようと思ったの？
- C： $\div 10$ をしようと思ったんだけど…
- T：Hさんは，何をしようとしたんだろうね。
- C：前と同じで10でわって少なくしようとした。
- C：わられる数とわる数を同じ数でわっても商はかわらないから，計算を簡単にしようとした。でも，168と24は，10ではわりきれなかったから困ったんだと思う。
- T：わられる数とわる数を同じ数でわっても商は変わらないというきまりを使おうとしたんだってこと？
- C：うん
- T：でも10じゃうまくできなかったんだよね。
- C：6とか4とかでやればぴったりわりきれから，10じゃなくても同じ数でわったら商は変わらないから，それは10に限らないから，同じ数ずつ168と24を6でわるとか4でわるとかするといいのかなと思う。
- T：6とか4ならいけそう？
- C：それは，2でわれる数
- T：8とかもいけるの？
- C：3でもできるよ。
- C：12でもできるよ。
-

自力解決において，除法の性質を活用して問題を解決しようとしていたのは，少数であった。しかし，その考えについて周りの人と関わりながら主体的に課題にとりくみ，自分の考えと仲間の考えを比較検討することで，除法の性質を活用すると計算できることに気づき，「わり算の性質を使うと，筆算を使わなくてもわる数が2桁のわり算もできそうだ」と既習事項を活用して，未習の除法も解決しようとしている姿が見られた（図-5）。さらにそこから，他の数でわってもできそうだということに気づき，その方法でも問題が解決できるか考えている姿が見られた。一人の児童の考えについて全体で議論をしていくなかで，被除数と除数を同じ数でわっても商は変わらないということや，同じ数ならば10以外の数でも除法の性質が活用できるということを確認することができた。「～さんは，何をしようとしたのかな」という問いから，自分の考えだけでなく，他の児童の考えや方法に目を向け，根拠や他の方法について考えることができた。

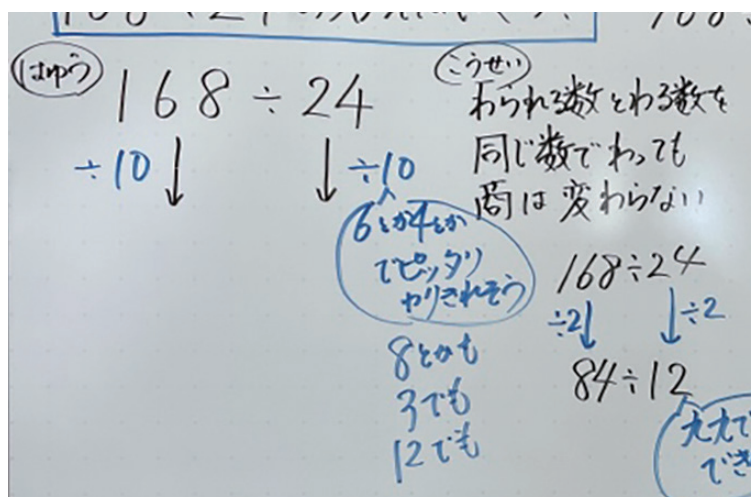


図 - 5 除法の性質の活用を共有する

(3) 除法の性質の活用を広げていく

次時では、本時での学習を児童が広げていった。本時では、被除数と除数を2でわると $84 \div 12$ となり、除数が2桁のままで答えを求めることができなかったが、さらに同じ数でわることによって、除数が1桁になって答えを求められるということを見つけた。さらに被除数と除数を同じ数でわっていくと $7 \div 1$ になり、とても簡単になることを見つけたことができた (図-6)。

除法の性質を活用して被除数と除数を小さくしていくという方法について、「他の数のときでもできるのかな」、「もっと簡単にできないかな」と意欲的に粘り強く学習に取り組み、次々と考えを広げ、除法の性質についての理解を深めることができた。

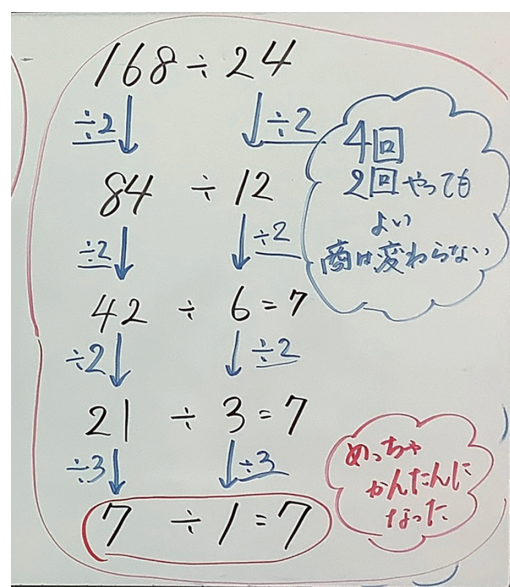


図 - 6 除法の性質の活用を広げる

7 実践のまとめ

(1) 単元構成について

本単元を構成するにあたって、除法の性質について注目し、その良さについて注目して欲しいと考え、単元の前半に除法の性質を扱った。

本校で採用している教科書を含め、6社の教科書を比較したが、どの教科書でも除法の性質が単元の終盤に位置付けられている。除法の性質は、発見して終わりではなく、単元の前半で発見し、単元を通して活用できるようにしたいと考えた。上学年の分数や小数の除法では、除法の性質を活用することが大切になり、それが学習の軸となる。単元の前半で除法の性質について扱い、未習の除数が2桁の除法の問題でも、除法の性質を活用すれば計算できることを体験したことで、未習の学習でも既習を活用すればできるということを経験することができた。その経験が上学年の学習につながり、未習の問題に対して、「既習事項を活用すれば解決できそうだ」という考え方につながってほしいと考える。

(2) 除法の性質を広げて活用する姿

本時以外の除法の性質を活用する場面でも、被除数と除数をさまざまな数でわってみることで、特定の数だけでなく、どんな数でも同じ数でわれば商は変わらないということを見つけていった(図-7)。そこでは、検算をすることで、本当にその方法はあっているのかと確かめる姿も見られた。それによって、それまでは、「100でわっても」としていたところを「同じ数でわっても」に変えていった(図-8)。

一つの活用だけで終わらず、「だったら、他の数でもできるのではないか」や「もっと簡単にできそうだ」といったように発展的に考えようとする児童が見られた。その際、自分の考えだけでなく、仲間の考えについても除法の性質が活用できないか考えている姿や他の方法でもできるかと問うている姿から、除法の性質を活用し、よりよく問題を解決しようとする子供の姿が見られた。

Handwritten student work showing various division problems and their solutions, illustrating the concept of dividing by the same number. The work includes:

- $24000 \div 6000 = 4$ (with $\div 1000$ and $\downarrow \div 1000$ indicated)
- $24 \div 6 = 4$ (with $\div 10$ and $\downarrow \div 10$ indicated)
- $6000 \times 4 = 24000$ (labeled as 'だいき')
- $240 \div 60 = 4$ (with $\div 10$ and $\downarrow \div 10$ indicated)
- $24 \div 6 = 4$ (with $\div 10$ and $\downarrow \div 10$ indicated)
- $20 \div 5 = 4$ (with $\div 5$ and $\downarrow \div 5$ indicated)
- $4 \div 1 = 4$ (with $\div 5$ and $\downarrow \div 5$ indicated)
- $24 \div 6 = 4$ (with $\div 6$ and $\downarrow \div 6$ indicated)
- $4 \div 1 = 4$ (with $\div 6$ and $\downarrow \div 6$ indicated)

図-7 除法の性質を活用して計算する

Handwritten student work showing a comparison of multiplication and division problems, highlighting the concept of dividing by the same number. The work includes:

- $600 \times 4 = 2400$ (labeled as '㊦')
- $6 \times 4 = 24$ (labeled as '㊦')
- A red arrow points from the text '同じ数' (Same number) to the numbers 4 and 4 in the equations above.
- A red circle highlights the text: 'わられる数とわる数を100で' (Dividing number and divisor by 100).
- Below the circle, it says: 'わっても商は同じ' (Even if divided, the quotient is the same).

図-8 どんな数でも除法の性質が使えることを確認する

V まとめと今後の展望

1 授業実践を振り返って

実践授業の前時に、「 $60 \div 20$ 」から除法の性質「被除数と除数を同じ数でわっても商は変わらない」を見出している。本時は、未習の「 $168 \div 24$ 」に除法の性質を活用して答えを見つけ出すことが目標であった。

本時の学習では、未習の計算に除法の性質を使うと、式が簡単になり答えが見つかりそうだという見通しの場面で時間がかかった。自力解決時は除法の性質を活用しようとしていた児童は少数で

あった。問題把握の段階の流れが課題となった。

本学級は、普段から既習を探り学んだ算数を問題解決に生かすことを心がけているクラスである。しかし、子供たちはこれまでに、既習の計算法則を仮定して、結果を予測し試行錯誤しながら未知の問題解決に計算法則を活用する学習は経験していない。

そこで、授業者は、全体検討をとおして、計算法則を活用する過程を子供たちに考えさせていった。まず、「除法の性質を活用し、被除数と除数を10でわろうとしたがうまくいかなかった児童の考えを取り上げた。」のである。未知の問題に既習の知識を生かす活用には失敗がつきものである。高学年では小数や分数の乗除法において、計算法則を活用して課題解決することが多いため、早くから計算法則を活用する経験をさせておきたい。乗法の計算法則の振る舞いと除法の法則の振る舞いの違いに気づいたり、活用する失敗や成功を繰り返したりしながら、知識を未知の問題解決に生かす態度が身につく。そのような訓練や経験が必要である。教えられた知識を覚える学習では活用する力は育たない。自分の発意で考え学ぶ積極的な学習観や、問題解決に自分の知識を総動員してとりかかろうとする強靱な態度が必要である。

子供たちの中から、「除法の性質を使うと、筆算を使わなくてもわる数が2桁のわり算もできそうだ」という積極的な態度が出てくるのは、自分の考えと仲間の考えを比較検討する協働的な学びの中であった。「同じ数ならば10以外の数でもわり算の性質が活用できる」ことに気づいたり、「もっと簡単にできそうだ」と考えたりする子供が出てくる。そして、「被除数と除数を同じ数でわっても商は変わらない」ことをわかり直す子供が出てくる。法則を上手に生かして問題解決する友達の言葉に耳を傾け、友達の記す表現を解釈し考えをよむ活動に主体的に関わることが大切であった。

このような協働的な学びを深めるために教師の役割が重要である。「他の数のときでもできるのかな」「もっと簡単にできないかな」と問い、問題解決した後に、計算法則を発展的に生かして用いる場の理解を深めていくことができた。教師の役割としては、問うべき問いを問い、子供の思考を高めることが必要であった。

2 計算法則で単元をつなげる

実践授業で扱った除法の性質である除法の計算法則は、数学的には除法の原理であり、整数においても有理数においても成り立つ。

算数の学習指導では、除法の内容を単元に分けて教える。除法の意味を学んだ後、1桁でわる計算の単元、筆算形式を用いて2桁でわる単元（本実践授業）、小数の除法の単元（5年）、分数の除法の単元（6年）などである。単元ごとに知識が断片的にならないようにしたい。除法の学習では除法の性質を意識して、整数、小数、分数の単元をつなげて指導していきたい。除法の性質「被除数と除数に同じ数をかけても同じ数でわっても商は変わらない」はこれらの単元をつなげる役割を果たす。小数の除法と分数の除法は子供たちには別物だと思われる傾向があるが、同じ原理で貫かれており、除法の性質という共通のアイデアで計算することができる。除法の特徴を、計算と計算法則を関連させ、整数と小数、分数をつなげて指導していきたい。

小学校で学ぶ四則（加法、減法、乗法、除法）の学習では、それぞれの演算の意味や特徴を明らかにすることが大切である。計算法則には、算数の学習内容をつなげ、1つの単元を超えて学習内容と学習内容を結びつける役割がある。四則の性質である計算法則を意識して学ぶことにより、関連させた計算指導ができる。

3 今後の展望

本研究では小学校4年生の整数の除法の学習指導の中で、除法の性質「被除数と除数に同じ数を

かけても同じ数でわっても商は変わらない」に焦点を当て、この計算法則を発見した後、未知の計算に活用して問題を解決する授業を実践した。

除法の性質が整数においても小数や分数においても成立することがわかると、この計算法則が除法を支配し除法を特徴づける重要な法則であることが見えてくる。計算法則は、現在、能率的に計算するために指導されているが、それだけでなく、計算の意味や特徴を明らかにする演算の原理として重要な法則ととらえたい。そのためには、既に成り立つ計算法則を仮定して推論を進め結果を予想し、その妥当性を確かめながら新しい知識を獲得していく態度で学ぶことが大切である。

小学校4年生の整数の計算で発見・活用された除法の性質は、今後は小数の計算（5年）、分数の計算（6年）においても自ら活用できるようにすることが大切となる。本実践授業同様、計算法則を仮定して、結果を予測し、試行錯誤しながら未知の計算に計算法則を活用する学習指導について実証的に研究していきたい。

参考文献

- ・ 早川健（2002）計算の仕方を子どもが自ら考え出すための学習指導，日本数学教育学会誌算数教育，第84巻第2号，pp. 20-25
- ・ 国立教育政策研究所（2020）『指導と評価の一体化』のための学習評価に関する参考資料 小学校算数，東洋館出版社
- ・ 文部省（1958）小学校学習指導要領（国立教育政策研究所教育研究情報データベース）
<https://erid.nier.go.jp/files/COFS/s33e/index.htm>（参照2024. 11. 30）
- ・ 文部省（1968）小学校学習指導要領（国立教育政策研究所教育研究情報データベース）
<https://erid.nier.go.jp/files/COFS/s43e/index.htm>（参照2024. 11. 30）
- ・ 文部省（1989）小学校学習指導要領（国立教育政策研究所教育研究情報データベース）
<https://erid.nier.go.jp/files/COFS/h01e/index.htm>（参照2024. 11. 30）
- ・ 文部科学省（2018）小学校学習指導要領（国立教育政策研究所教育研究情報データベース）
<https://erid.nier.go.jp/files/COFS/h29e/index.htm>（参照2024. 11. 30）
- ・ 文部科学省（2018）小学校学習指導要領解説（平成29年告示）算数編，東洋館出版社
- ・ 中村享史（1999）計算法則を根拠に計算の仕方をつくり出す，「新しい算数研究2月号」No. 336，東洋館出版社，p. 36
- ・ 清水美憲他（2023）「新編 新しい算数4年下」，令和5年文部科学省検定済，東京書籍
- ・ 清水美憲他（2023）「新編 新しい算数5年上」，令和5年文部科学省検定済，東京書籍
- ・ 杉山吉茂（1986）「公理的方法に基づく算数・数学の学習指導」，東洋館出版社