

反りせん断変形を考慮した箱げたの 曲げねじれ問題の解析

深 沢 泰 晴
河 西 晴 征

(昭和49年 8 月31日受理)

Analysis of Bending-Torsion Problems of Box Girder Taking Account of Warping Shear Deformation

by Yasuharu FUKASAWA and Haruyuki KASAI

Abstract

An analysis of non-uniform torsion problems, with due regard to the effect of warping shear deformation, is developed for box girders subjected to arbitrary torsional loading. The method of the analysis regards the behavior of the girder in non-uniform torsion from a different angle than do the investigations based upon Wagner's hypothesis, and throws light on the interaction of the plates of which the girder is composed.

Formulas derived in the present analysis for the geometrical properties of the box sections have the advantage that they do not require an excessive amount of calculation effort even for multi-cell girders. Using the formulas, with a view to examining the effect of warping shear strains on the non-uniform torsion of the box girders, numerical treatments are carried out for four box girders with the typical cross sections.

1. はじめに

薄肉けたの曲げねじれ理論においては、断面の反り(warping)の断面内分布は、St. Venant のねじりにおける反りに比例し、また反りのけた軸方向の変化は、ねじり率によって表されるものとしている。このいわゆる Wagner の仮定は、開断面げたに対しては良い精度を保証するが、閉断面げたの場合には必ずしも満足な結果を与えるものではないことが知られている。このような事情から、断面の反りのけた軸方向の変化を、ねじり率とは異なる新しい関数で表すことによって、反り拘束に伴うせん断変形を考慮する点で特徴的な Bescotter の論文¹⁾で代表される研究がみなおされ、閉断面に対してはより妥当性が高い理論として、最近では一般化されつつある²⁾。

この報告では、実用に供されている鋼げたのほとんどが平板より構成されている点に着目し、その個々の

板帯の解析を基本単位として出発し、それをけたとして集合する手法³⁾を、箱げたの曲げねじれ問題の解析に適用した。その際、Bescotter の仮定を採用するとともに、その仮定のもつ意味を従来の研究とは異なった観点から吟味することができた。また、上記の手法を適用した結果として、従来面倒な積分演算によって求めていた箱げたの断面の諸量を、構成板帯の諸定数の和で表した算式を得ることができた。これは、実際の設計計算にとっては非常に便利である。

橋梁の主げた構造として使用される4種の代表的な閉断面形をもつ箱げたについて、本報告で誘導した諸式を用いて数値計算を行い、断面の反りのけた軸方向の変化をねじり率によって表す慣用の曲げねじれ理論による結果と比較対照し、箱げたの曲げねじれ特性への影響を検討する。

2. 基本式の誘導

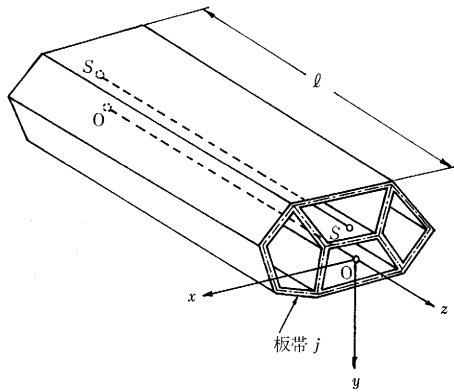


図-1 箱だけの一般図と座標系

図-1に示すように、1, 2, ..., j, k, ..., nの板帯からなり、また①, ②, ..., ④, ⑤, ..., ⑩のセルをもつ任意形状の箱げたを扱う。

けた上の点の位置を表すのに、空間に固定された右手系直角座標系(O-x, y, z)を用いる。変形前のけたに対して、座標の原点Oはけたの全断面の図心とし、xおよびy軸はけたの断面の主軸に重なり、z軸はけたの各断面の図心を連ねた軸線に一致するように定める(図-1参照)。

けたを構成しているn個の板帯のうちから、その代表として第j番目の板帯をとり出し、板帯jとよぶ。板帯jの断面上に、板帯jの断面の図心O_jを原点とする直角座標系(O_j-ξ, η)を設ける。ξおよびη軸はそれぞれ板帯jの断面の主軸と一致させ、かつη軸を板厚中心線に重ねる(図-2参照)。

さて、板帯jの図心O_jのx, y, z軸方向への変位をそれぞれu_j, v_j, w_jとすると、板帯jの任意点P(ξ, η)のけた軸方向の変位wは、St. Venantのねじりによるせん断変形を考慮して、つぎのように書ける：

$$w = w_j - (\xi \cos \alpha_j - \eta \sin \alpha_j) u_j' - (\xi \sin \alpha_j + \eta \cos \alpha_j) v_j' + \bar{\tau}_j \eta \vartheta \quad (1)$$

ここに、α_jはξ軸がx軸となす角(符号は右ねじの法則による)であり、u_j, v_jに付したダッシュはzによる微分の意を表す。ϑ = ϑ(z)は新しく導入されたねじり率 ϑ' とは異なるzの関数である。

式(1)におけるτ_jはSt. Venantのねじりによる板帯jのせん断流をq_jとすると、次式で与えられる：

$$q_j = G \vartheta \bar{q}_j, \quad \bar{q}_j = \bar{\tau}_j t_j \quad (2)_{a,b}$$

ここに、Gは材料のせん断弾性係数、t_jは板帯jの板帯厚である。q_jは板帯jのねじり関数であり、板帯j

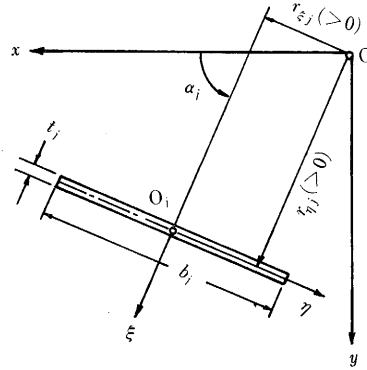


図-2 板帯jの断面と座標系

がセル④とセル①の境界壁のときは

$$\bar{q}_j = \bar{q}_j^o - \bar{q}_h^o \quad (3)$$

で計算される。q_j^oおよびq_j^oはそれぞれセル④およびセル①の循環ねじり関数であり、次式を解いて求められる：

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}_j^o \sum_k \frac{b_k}{t_k} - \sum_k \bar{q}_h^o b_k &= 2F_i \\ i &= a, b, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、suffix kはセル①をとりまく板帯を意味し、また、suffix hは①をとりまく板帯kが属する他のセルを意味する。b_kは板帯kの幅、F_iはセル①をとりまく板帯の板厚中心線が囲む面積である。

なお、式(2)_{a,b}より、q_j = τ_jt_j = Gτ_jt_jを考慮すると次式が成り立つことがわかる：

$$\bar{\tau}_j \vartheta = \tau_{z\eta} \quad (2)'$$

つぎに、けたの全断面の図心Oのx, y, z軸方向の変位成分をそれぞれu_o, v_o, w_oとすると、これらと板帯jの図心O_jの変位u_j, v_j, w_jとの間に次式の関係を設定することができる：

$$\left. \begin{aligned} u_j' &= u_o' - y_j \vartheta \\ v_j' &= v_o' + x_j \vartheta \\ w_j &= w_o - x_j u_o' - y_j v_o' - \omega_j \vartheta \end{aligned} \right\} \quad (5)_{a-c}$$

ここに、x_jおよびy_jはそれぞれ点O_jのxおよびy座標、ω_jはSt. Venantのねじりにおける極Oに対する点O_jの単位反りである。

式(5)を式(1)に代入すると

$$\begin{aligned} w &= w_o - (x_j + \xi \cos \alpha_j - \eta \sin \alpha_j) u_o' \\ &\quad - (y_j + \xi \sin \alpha_j + \eta \cos \alpha_j) v_o' \\ &\quad - \{\omega_j + r_{\xi j} \xi + (r_{\eta j} - \bar{\tau}_j) \eta\} \vartheta \end{aligned} \quad (6)$$

ここに、r_{ξj}およびr_{ηj}はそれぞれ点Oからξおよびη軸におろした垂線の長さを表す(図-2参照)。

すなわち

$$\left. \begin{aligned} r_{\xi j} &= x_j \sin \alpha_j - y_j \cos \alpha_j \\ r_{\eta j} &= x_j \cos \alpha_j + y_j \sin \alpha_j \end{aligned} \right\} \quad (7)_{a,b}$$

板帯 j 上の任意点 $P(\xi, \eta)$ におけるけた軸方向の直ひずみ ε_z は、式(6)より

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= w_o' - (x_j + \xi \cos \alpha_j - \eta \sin \alpha_j) u_o'' \\ &\quad - (y_j + \xi \sin \alpha_j + \eta \cos \alpha_j) v_o'' \\ &\quad - (\omega_j + r_{\xi j} \xi + (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j) \eta) \vartheta' \end{aligned} \quad (8)$$

一方、板帯 j 上の任意点 $P(\xi, \eta)$ におけるせん断ひずみ $\gamma_{z\eta}$ は、曲げに伴なう成分を無視すると、点 P の断面ねじれ回転 φ (符号は右ねじの法則にしたがう) による η 軸方向の変位

$$\bar{v}_\eta = r_{\eta j} \varphi \quad (9)$$

およびねじれに起因する z 軸方向変位、すなわち式(6)の右辺の第4項

$$\bar{w} = -(\omega_j + r_{\xi j} \xi + (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j) \eta) \vartheta \quad (10)$$

とから、つぎのように表すことができる；

$$\gamma_{z\eta} = \frac{\partial \bar{v}_\eta}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \eta} = r_{\eta j} \varphi' - (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j) \vartheta \quad (11)$$

式(2)' は St. Venant のねじりによるせん断ひずみのみを表すのに対して、式(11)はさらに反り拘束に伴なうせん断ひずみ分が考慮されている。ちなみに、

$$\vartheta = \varphi' \quad (12)$$

とすると、式(11)は式(2)' に一致する。

さて、箱げた全体に蓄えられる歪エネルギー Π_i は、けたの長さ l 、板帯 j の断面積を F_j 、材料のヤング係数を E とすると、次式で書ける；

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \int_0^l \int_{F_j} (E \varepsilon_z^2 + G \gamma_{z\eta}^2) dF_j dz \quad (13)$$

これに、式(8)および式(11)を代入すると、歪エネルギー Π_i がつぎのように表される；

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^l [E J_y u_o''^2 + E J_x v_o''^2 + 2 E C_y u_o'' \vartheta' \\ &\quad + 2 E C_x v_o'' \vartheta' + E C_\omega \vartheta'^2 - 2 G (J_r - J_T) \vartheta \varphi' \\ &\quad + G J_r \varphi'^2 + G (J_r - J_T) \vartheta^2 + E F w_o'^2] dz \end{aligned} \quad (13)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum_{j=1}^n (F_j y_j^2 + J_{\eta j} \sin^2 \alpha_j + J_{\xi j} \cos^2 \alpha_j) \\ J_y &= \sum_{j=1}^n (F_j x_j^2 + J_{\eta j} \cos^2 \alpha_j + J_{\xi j} \sin^2 \alpha_j) \\ C_x &= \sum_{j=1}^n \{ F_j \omega_j y_j + r_{\xi j} J_{\eta j} \sin \alpha_j + (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j) J_{\xi j} \cos \alpha_j \} \\ C_y &= \sum_{j=1}^n \{ F_j \omega_j x_j + r_{\xi j} J_{\eta j} \cos \alpha_j - (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j) J_{\xi j} \sin \alpha_j \} \\ C_\omega &= \sum_{j=1}^n \{ F_j \omega_j^2 + r_{\xi j}^2 J_{\eta j} + (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j) J_{\xi j} \} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} J_r &= \sum_{j=1}^n F_j r_{\eta j}^2, \quad J_T = \sum_{j=1}^n F_j r_{\eta j} \tilde{\tau}_j \\ F &= \sum_{j=1}^n F_j \end{aligned} \right\} \quad (14)_{a-b}$$

さらに、式(14)において

$$J_{\xi j} = \int_{F_j} \eta^2 dF_j, \quad J_{\eta j} = \int_{F_j} \xi^2 dF_j \quad (15)_{a,b}$$

なお、式(13)の誘導の際、次式が考慮されている；

$$\sum_{j=1}^n F_j (r_{\eta j} - \tilde{\tau}_j)^2 = J_r - J_T \quad (16)$$

この式については文献 2) p.186 参照。

つぎに、箱げた断面のせん断中心 S の x および y 軸方向の変位をそれぞれ u_s および v_s とすると、断面の図心 O の変位 u_o および v_o との間に次式が成り立つ；

$$\left. \begin{aligned} u_o'' &= u_s'' + y_s \vartheta' \\ v_o'' &= v_s'' - x_s \vartheta' \end{aligned} \right\} \quad (17)_{a,b}$$

ここに、 x_s および y_s はせん断中心 S の x および y 座標である。式(17)を式(10)に代入すると、ひずみエネルギー Π_i をせん断中心 S の横方向変位 u_s および v_s と、図心 O のけた軸方向変位 w_o とでつぎのように表すことができる；

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \frac{1}{2} \int_0^l \{ E J_y u_s''^2 + E J_x v_s''^2 + E C_\omega^* \vartheta'^2 \\ &\quad - 2 G (J_r - J_T) \vartheta \varphi' + G J_r \varphi'^2 \\ &\quad + G (J_r - J_T) \vartheta^2 + E F w_o'^2 \} dz \end{aligned} \quad (18)$$

ここに

$$C_\omega^* = C_\omega + J_x x_s^2 + J_y y_s^2 - 2 C_x x_s + 2 C_y y_s \quad (19)$$

なお、式(18)の誘導の際、せん断中心の特性を表す次式が考慮されている；

$$\left. \begin{aligned} C_x^* &= C_x - J_x x_s = 0 \\ C_y^* &= C_y + J_y y_s = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)_{a,b}$$

式(20)はせん断中心 S の座標 (x_s, y_s) をつぎのように与える；

$$x_s = \frac{C_x}{J_x}, \quad y_s = -\frac{C_y}{J_y} \quad (21)_{a,b}$$

また、式(19)は式(20)を用いると、つぎのように簡単になる；

$$C_\omega^* = C_\omega - C_x x_s + C_y y_s \quad (19')$$

けたの単位長さあたりに作用する荷重として、断面の図心 O を通る z 軸方向荷重 q_z 、せん断中心 S を通る x および y 軸方向荷重 q_x^* および q_y^* 、せん断中心 S に関するねじりモーメント荷重 m_z^* およびバイモーメント荷重 m_ω^* を考えると、これらの外力の得るポテンシャルエネルギー Π_a は

$$\begin{aligned} \Pi_a &= - \int_0^l (q_x^* u_s + q_y^* v_s + q_z w_o + m_z^* \varphi \\ &\quad + m_\omega^* \vartheta) dz \end{aligned} \quad (22)$$

と書ける。

したがって、系の全ポテンシャルエネルギー Π は、式(19)および式(22)より次式で表される；

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \{ & EJ_y u_s''^2 + EJ_x v_s''^2 + EC_\omega^* \vartheta'^2 \\ & - 2G(J_T - J_T) \vartheta \varphi' + EF_T w' \vartheta^2 \\ & + G(J_T - J_T) \vartheta^2 + GJ_T \varphi'^2 \\ & - 2(q_x^* u_s + q_y^* v_s + q_z^* w_o \\ & + m_z^* \varphi + m_\omega^* \vartheta) \} dz \quad (23) \end{aligned}$$

式(23)より、変分問題のオイラーの微分方程式として得られる支配方程式のうち、ねじりに関するもののみを書くと、

$$\left. \begin{aligned} GJ_T \varphi'' - G(J_T - J_T) \vartheta' + m_z^* &= 0 \\ EC_\omega^* \vartheta'' + G(J_T - J_T) (\varphi' - \vartheta) - m_\omega^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)_{a,b}$$

両式より ϑ を消去すれば

$$\varphi'''' - \frac{\alpha^2}{l^2} \varphi'' = \frac{1}{\kappa EC_\omega^*} (m_z^* + m_\omega^*) - \frac{1}{GJ_T} m_z^* \quad (25)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= l \sqrt{\frac{GJ_T}{\kappa EC_\omega^*}} \\ \kappa &= \frac{J_T}{J_T - J_T} \end{aligned} \right\} \quad (26)_{a,b}$$

箱げたの曲げねじれ問題の支配方程式として得られ

た式(24)、あるいは式(25)は文献(2)のものと同様と一致する。式(25)の左辺は、Wagner の仮定に基づく慣用の曲げねじれ理論による支配方程式と同形であり、無次元量 α に対応する慣用理論のそれを α_0 と書くと、両者の間には次式の関係が存在する；

$$\alpha = \frac{\alpha_0}{\sqrt{\kappa}} \quad (27)$$

ここに

$$\alpha_0 = l \sqrt{\frac{GJ_T}{EC_\omega^*}} \quad (28)$$

したがって、式(27)より明らかのように、反りせん断変形を考慮した影響は、けたの曲げねじれ特性を支配する無次元パラメータに対する補正係数 $1/\sqrt{\kappa}$ となって現れる。なお、式(26)より $\kappa > 1$ であるから、つねに次式が成り立つ；

$$\alpha < \alpha_0 \quad (29)$$

すなわち、反りせん断変形を考慮することによって、曲げねじれ現象は強まるから、慣用理論の結果は危険側にあることになる。

なお、曲げねじれ現象に伴って生ずる x 軸方向の直応力 σ_ω 、およびこれとともにけたの微小面素 $t_s dz d\eta$ に作用する力のつりあい条件を満たすべきせん断応力 τ_ω の表式は、慣用理論のそれらと同形である。すなわち

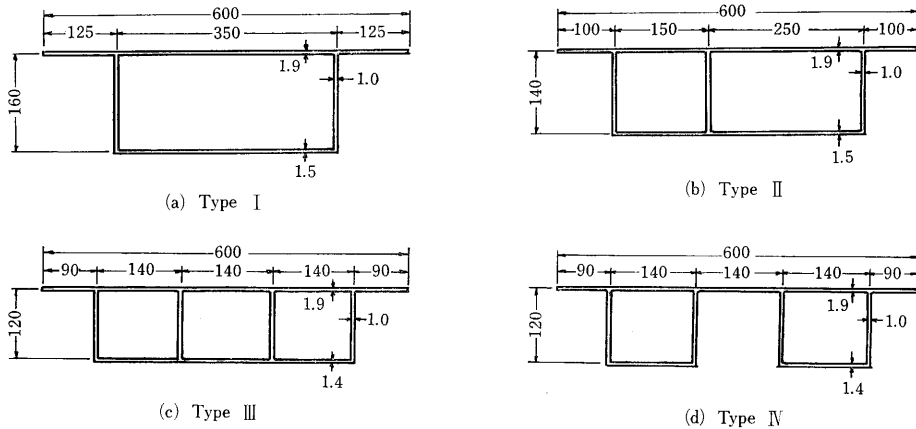


図-3 代表的な4種の箱げた

表-1 4種の箱げたのねじりに関する断面定数

Type	$C_x(\text{cm}^5)$	$C_y(\text{cm}^5)$	$C_\omega(\text{cm}^6)$	$C_\omega^*(\text{cm}^6)$	$J_T(\text{cm}^4)$	$J_T(\text{cm}^4)$
I	0.00	-3.86×10^8	8.78×10^9	5.76×10^9	0.172×10^8	0.195×10^8
II	0.91×10^8	-4.69×10^8	1.44×10^{10}	0.93×10^{10}	0.169×10^8	0.196×10^8
III	0.00	-2.19×10^8	2.21×10^{10}	1.87×10^{10}	0.139×10^8	0.178×10^8
IV	0.00	2.27×10^9	2.25×10^7	1.30×10^{11}	0.04×10^8	0.155×10^8

表-2 4種の箱げたのねじりに関する無次元量

Type	κ	$1/\sqrt{\kappa}$	α_0	α
I	8.611	0.341	67.44	22.98
II	7.145	0.374	52.79	19.75
III	4.574	0.468	33.61	15.72
IV	1.397	0.846	5.095	4.310

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\omega} &= -\frac{M_{\omega}^*}{C_{\omega}^*} \omega^* \\ \tau_{\omega} &= -\frac{T_{\omega}^*}{t_j C_{\omega}^*} S_{\omega}^* \end{aligned} \right\} \quad (30)_{a,b}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} M_{\omega}^* &= -\kappa EC_{\omega}^* \varphi'' - \frac{1}{\alpha^2} m_z^* \\ T_{\omega}^* &= -\kappa EC_{\omega}^* \varphi''' + m_{\omega}^* - \frac{1}{\alpha^2} m_z^* \end{aligned} \right\} \quad (31)_{a,b}$$

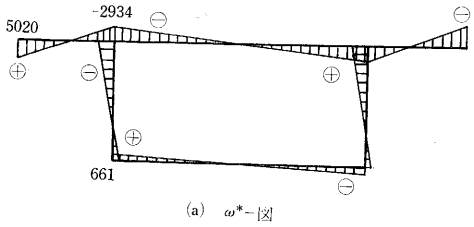
せん断中心 S を極とする ω^* および S_{ω}^* は、慣用理論のそれと共通である。

3. 数値計算結果と考察

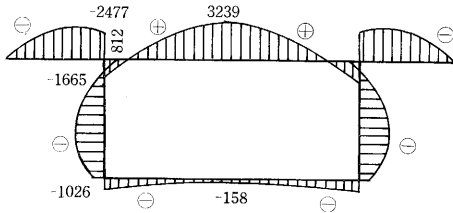
図-3に示すような、橋梁の主げたとして使用される

代表的な、4種の箱げた断面について、2.で誘導した諸式を用いて数値計算を行った(図-3における寸法の単位はcm)。2室断面のType IIは、隔壁がねじりに対して有効に作用するように、非対称断面とした。

計算結果のうち、ねじりに関する断面定数を表-1に、またその無次元パラメータを表-2にまとめた(表-2の α_0 および α の計算において、 $l=20\text{m}$ としている)。Type I から II, III, IV と断面形が変化するにつれて、St. Venant のねじり定数 J_T は減少するのに対し、反り定数 C_{ω}^* は増大している。したがって、 α_0 および α は減少し、曲げねじれ現象は Type I から II, III, IV へと次第に強まっていく。

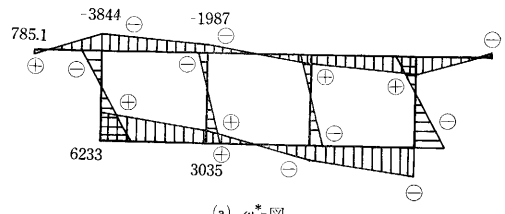


(a) ω^* -図

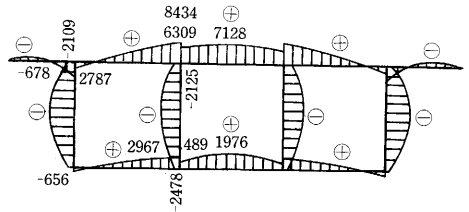


(b) $S_{\omega}^* \times 10^{-2}$ -図

図-4 Type I の ω^* と S_{ω}^* の分布

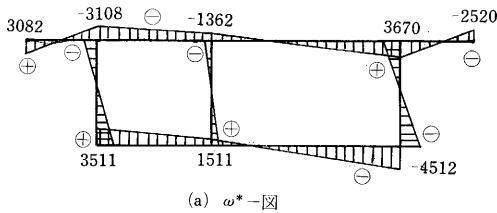


(a) ω^* -図

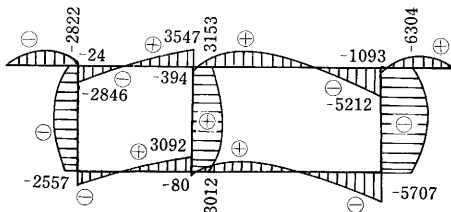


(b) $S_{\omega}^* \times 10^{-2}$ -図

図-6 Type III の ω^* と S_{ω}^* の分布

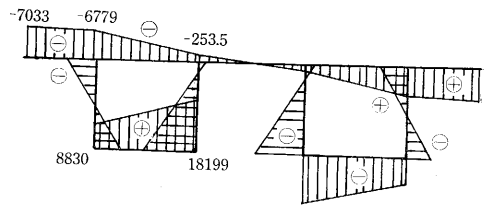


(a) ω^* -図

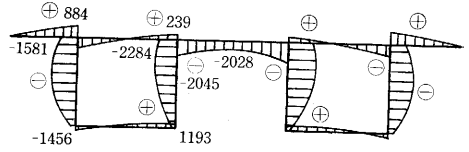


(b) $S_{\omega}^* \times 10^{-2}$ -図

図-5 Type II の ω^* と S_{ω}^* の分布



(a) ω^* -図



(b) $S_{\omega}^* \times 10^{-2}$ -図

図-7 Type IV の ω^* と S_{ω}^* の分布

反りせん断変形の影響を表す補正係数 $1/\sqrt{k}$ は常に1より小さく、したがって反りせん断変形を無視した慣用の曲げねじれ理論は、曲げねじれ現象を小さく見積ることになる。また、各 Type を通じて J_T には大きな変化がないので、St. Venant のねじり定数 J_T が大きい Type I ほど補正係数は1に較べてより、小さな値をとり、したがって補正度はより大きい。

ちなみに、4種の各断面について、曲げねじれに伴う直応力 σ_x およびせん断応力 τ_{xy} の断面内分布を示す ω^* および S_{ω}^* を図-4, 5, 6, 7 に示す (ω^* および S_{ω}^* 図中の数字の単位はそれぞれ cm^2 および cm^4 である)。

4. おわりに

本報告は、薄肉多角断面げたの曲げねじり問題の有力な解析法である構成板帯の解析を基本単位とし、それをけたとして集合する解析手法によって、箱げたの曲げねじれ問題を解析したものである。その際、Wagner の Unit Warping の仮定に基づく慣用の曲げねじれ理論よりも、反り拘束に伴うせん断変形の影響を考慮している点で、より妥当性が高いと評価されている Bencsoter の理念を基盤として出発した。

解析の結果、たとえば式(4)₀₋₉ にみられるように、ねじりに関する断面の諸定数を、Multi-Cell のような

複雑な閉断面に対しても容易に計算可能な算式で表すことができた。と同時に、定式化の過程においては、Bencsoter の採用している仮定のもつ意味を別の観点から吟味することもできた。

代表的な4種の箱げた断面に対する数値計算結果からは、反りせん断変形が箱げたの曲げねじれ現象に与える影響の特性とその度合がある程度明らかとなった。

参考文献

- 1) Bencsoter, S. U. : A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, Journal of Applied Mechanics, Vol. 21, No. 1. P. 25-34 (March 1954)
- 2) Kollbrunner, C. F. and N. Hajdin : Dünwandige-Stäbe Band I, Springer-Verlag (1972)
- 3) 深沢泰晴 : 薄肉多角開断面曲りばりの曲げねじれ問題, 土木学会論文報告集投稿中。
- 4) Heilig, R. : Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform, Stahlbau, Heft 11, S. 333-349 (November 1961)
- 5) 深沢・河西 : せん断変形を考慮した箱げたの曲げねじれ問題の一解析法, 第一回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集 (1974, 5)
- 6) Vlasov, V. Z. : Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Ierusalem (1961)