論　　文

ティモシェンコばり理論の薄肉開断面ばりの曲げねじれ振動問題への拡張

深　沢　泰　晴
太　田　貞　次

(昭和49年8月31日受理)

Extension of Timoshenko's Beam Theory to Bending-Torsion Vibration Problems of Thin-Walled Elastic Beam With Open Cross Section

by Yasuharu FUKASAWA and Teiji OHTA

Abstract

Timoshenko's beam theory is extended to the bending-torsion problems of thin-walled elastic beam with open cross section. A set of governing equations for each static and dynamic behavior of the beam is established by considering the effects of transverse and warping shear deformation accompanying bending and non-uniform torsion and, in the case of vibrating beams, rotary and longitudinal inertia. The shear coefficients for non-uniform torsion as well as bending are introduced on the basis of the energy theorem.

The phase velocity-wavelength curves for I, ⊏, ▯ and C sections from harmonic wave analysis are illustrated and compared with the results obtained by classical bending-torsion theory. The present theory leads to satisfactory wave velocities for short-wavelength, whereas the classical theory shows the defects that short-wavelength waves travel with infinite velocities and are dispersive in character.

1. はじめに

薄肉ばりに衝撃力が作用した場合に生ずる sharp transient な曲げねじれ振動現象の解明には，いわゆる Wagner の Unit Warping の仮定を用いた慣用の曲げねじれ理論に基づく振動解析では，満足な結果は得られない。なぜならば，その解においては，短波長波の伝播速度は無限大となり，振動波は分散現象を呈してしまうからである。これははりの曲げ振動の場合と同様である。

この欠陥を補うため Aggarwal & Cranch は，I およびチャンネル断面ばりについて，その曲げねじれ現象は個々のフランジおよびウエブプレートに関しては曲げ現象である点に着目し，各プレートのせん断変形および回転慣性を考慮したいわゆる Timoshenko Beam Theory を適用して，その曲げねじ振動波の伝播の問題を初めて論じた[1]。また，深沢は任意形状の薄肉多角開断面のはりに対しても，同様な解析が可能であることを一般的な形で示した[2]。しかしながら，はりの個々の構成板帯断面の平均せん断変形を未知関数とするこのような解析法には，断面形状が複雑になると，すなわち板帯数が多くなると計算が非常に煩雑になること，また曲線形状のような任意な形の薄肉断面ばりには適用できないことの2つの問題点がある。

そこで本論文では，薄肉開断面の場合，曲げおよび曲げねじれに伴なうせん断ひずみとも，断面の薄肉中心線に沿った分布は一般に急激な変動を示さない点に着目し，薄肉中心線の全長にわたっての平均せん断変形を用いることによって，任意形状の薄肉開断面ばりについて，曲げせん断および反りせん断変形を考慮し

た振動解析を行い得ることを示す。すなわち，これによって，任意形状の薄肉開断面ばりの高周波振動の曲げねじれ問題が比較的容易に解析できるようになる。

このような手法により，まず任意形状の薄肉開断面ばりの曲げねじれ問題について，曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した静的つりあいの微分方程式を導く。つぎに，これに基づく振動問題の基礎微分方程式の誘導ならびに自由振動波に対する振動解析の過程を示す。

最後に，解析例として，一軸対称の数種の代表的薄肉開断面ばりをとりあげ，その曲げねじれ振動における自由振動波の伝播に関する２，３の基礎的検討結果について報告する。

2.　曲げおよび反り拘束ねじりに伴なうせん断変形を考慮した静的平衡方程式

任意形状の薄肉開断面ばりの一例を図-1に示す（断面形ははりの全長にわたって一定とする）。解析においては，はりの一方の端断面の図心Oを原点とし，断面の主軸に一致するx，y軸および各断面の図心Oを連ねた軸線に一致するz軸をもつ右手系直角座標系（O－x，y，z）を用いる。

はりに作用するxおよびy軸方向の横荷重をそれぞれq_x^*およびq_y^*，xおよびy軸まわりのモーメント荷重をそれぞれm_xおよびm_y，はりのせん断中心軸に関するねじりモーメント荷重をm_z^*，さらにせん断中心Sに関する曲げねじりモーメント荷重をm_ω^*とする（図-1参照）。これはすべてはりの単位長さ当りの荷重強度を表すものとする。

断面力として，xおよびy軸方向のせん断力をそれぞれQ_x^*およびQ_y^*，xおよびy軸に関する曲げモーメントをそれぞれM_xおよびM_y，せん断中心軸に関するSt. Venantのねじりモーメントおよび反り拘束ねじりモーメントをそれぞれT_s^*およびT_ω^*，せん断中心Sに関する反り拘束バイモーメントをM_ω^*とする。

上記の荷重と断面力との間には，微小変形理論に基づくエネルギー原理より次式が書ける[3]；

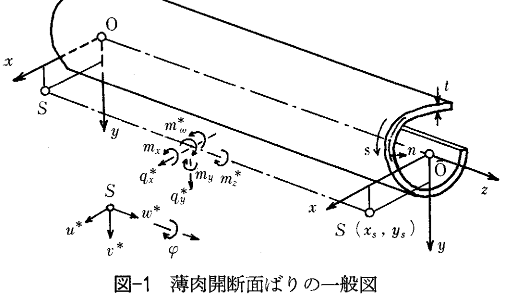


図-1　薄肉開断面ばりの一般図

$$\left.\begin{array}{l} Q_x^{*\prime}+q_x^*=0,\ Q_y^{*\prime}+q_y^*=0 \\ M_x'-Q_y^*+m_x=0,\ M_y'-Q_x^*+m_y=0 \\ (T_s^*+T_\omega^*)'+m_z^*=0,\ M_\omega^{*\prime}-T_\omega^*+m_\omega^*=0 \end{array}\right\} \quad (1)_{a-f}$$

ここにダッシュはzに関する微分を意味し，＊印はせん断中心に関する量であることを表す。

はりの任意点P(x，y，z)のx，yおよびz軸方向の変位をそれぞれu，vおよびw，断面のせん断中心Sのxおよびy軸方向の変位をそれぞれu^*およびv^*，図心Oのz軸方向変位をw_o，さらに断面形不変の仮定のもとに断面のねじれ回転角をφとすると，任意点Pの変位u，v，wと変位u^*，v^*，w_oとの間には微小変形の範囲内で次式が成り立つ；

$$\left.\begin{array}{l} u=u^*-(y-y_s)\varphi \\ v=v^*+(x-x_s)\varphi \\ w=w_o-y\psi_x-x\psi_y-\omega^*\vartheta^* \end{array}\right\} \quad (2)_{a-c}$$

ここに，x_sおよびy_sはそれぞれせん断中心Sのxおよびy座標である。またψ_xおよびψ_yはそれぞれxおよびy軸まわりの曲げに伴なうせん断変形を考慮した場合の平均回転角，$\vartheta^*=\vartheta^*(z)$は反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した場合のねじり率φ'に代る新しい関数を意味する。さらにω^*はせん断中心に関するUnit Warpingを表す。

式$(2)_c$より，任意点Pにおけるはり軸方向の直応力σ_zは，M_x，M_yおよびM_ω^*の定義式を考慮すると，つぎのように表される；

$$\sigma_z=E\varepsilon_z=\frac{M_y}{J_y}x+\frac{M_x}{J_x}y+\frac{M_\omega^*}{C_\omega^*}\omega^* \quad (3)$$

ここに，J_xおよびJ_yはそれぞれxおよびy軸に関する断面二次モーメント，C_ω^*は断面の曲げねじり定数を表す。

断面の薄肉中心線に沿う線座表をs，およびsに対して法線方向の座標n（図-1参照）を用いると，せん断応力τ_{zs}は，St. Venantのねじりにおけるせん断応力と，はりの微小要素$dz\times ds\times t$に作用する力のつりあい条件

$$t\frac{\partial\sigma_z}{\partial t}+\frac{\partial(\tau_{zs}t)}{\partial s}=0 \quad (4)$$

を満たすべきせん断応力との和として，次式で表される；

$$\begin{aligned}\tau_{zs}&=G\gamma_{zs}\\ &=\frac{T_s^*}{J_T^*}\cdot 2n-\frac{1}{t}\left(\frac{Q_y^*}{J_x}\cdot S_x+\frac{Q_x^*}{J_y}\cdot S_y+\frac{T_\omega^*}{C_\omega^*}\right.\\ &\quad\left.\cdot S_\omega^*\right) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに，tは板厚，J_T^*はSt. Venantのねじり定数を表す。さらに

$$\left.\begin{aligned} S_x&=\int_0^s ytds \\ S_y&=\int_0^s xtds \\ S_\omega^*&=\int_0^s \omega^* tds \end{aligned}\right\} \qquad (6)_{a-c}$$

断面力と変形との関係は仮想仕事の原理

$$\delta\Pi=\delta(\Pi_i+\Pi_a+\Pi_N)=0 \qquad (7)$$

によって定めることができる。ここに，$\delta\Pi_i$ および $\delta\Pi_a$ はそれぞれ $z=z_1$ と $z=z_2$ 間のはりの内力および外力による仮想仕事を表し，$\delta\Pi_N(=\sum_i G_i\lambda_i)$ は付帯条件の項を意味する。これらはそれぞれつぎのように書き表すことができる。

まず内力の仮想仕事は式(3)および(5)を用い，さらに直交条件を考慮して結局つぎのように書ける；

$$\begin{aligned}\delta\Pi_i&=\int_{z1}^{z2}\int_F(\delta\sigma_z\cdot\varepsilon_z+\delta\tau_{zs}\cdot\gamma_{zs})dFdz\\ &=\int_{z1}^{z2}\Big(\frac{M_x\delta M_x}{EJ_x}+\frac{M_y\delta M_y}{EJ_y}+\frac{M_\omega^*\delta M_\omega^*}{EC_\omega^*}\\ &\quad+\frac{T_s^*\delta T_s^*}{GJ_T^*}+\frac{Q_x^*\delta Q_x^*}{\kappa_x GF}+\frac{Q_y^*\delta Q_y^*}{\kappa_y GF}\\ &\quad+\frac{T_\omega^*\delta T_\omega^*}{\kappa_\omega^* GJ_T^*}\Big)dz \end{aligned} \qquad (8)$$

ここに，F ははりの断面積である。また，κ_x および κ_y はそれぞれ x および y 軸方向の曲げせん断補正係数，κ_ω^* は反りせん断補正係数を意味し，それぞれ次式で表される。

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\kappa_x}&=\frac{F}{J_y^2}\int_F\frac{S_y^2}{t^2}dF \\ \frac{1}{\kappa_y}&=\frac{F}{J_x^2}\int_F\frac{S_x^2}{t^2}dF \\ \frac{1}{\kappa_\omega^*}&=\frac{J_T^*}{C_\omega^{*2}}\int_F\frac{S_\omega^{*2}}{t^2}dF \end{aligned}\right\} \qquad (9)_{a-c}$$

つぎに，外力による仮想仕事を計算するとつぎのようになる；

$$\begin{aligned}\delta\Pi_a=&-[\delta Q_x^*\cdot u^*+\delta Q_y^*\cdot v^*-\delta M_x\cdot\psi_x-\delta M_y\cdot\\ &\psi_y+\delta(T_s^*+T_\omega^*)\cdot\varphi-\delta M_\omega^*\cdot\vartheta^*]_{z2}^{z1}\\ &-\int_{z1}^{z2}(\delta q_x^*\cdot u^*+\delta q_y^*\cdot v^*-\delta m_x\cdot\psi_x\\ &-\delta m_y\cdot\psi_y+\delta m_z^*\cdot\varphi-\delta m_\omega^*\cdot\vartheta^*)dz \end{aligned} \qquad (10)$$

付帯条件 G_i として，式$(1)_{a-f}$ を課すと，Lagrange の乗数を $\lambda_i(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6)$ として $\delta\Pi_N$ はつぎのように表される；

$$\begin{aligned}\delta\Pi_N&=\delta\sum_{i=1}^{6}\lambda_i\cdot G_i\\ &=\delta\int_{z1}^{z2}[\lambda_1(Q_x^{*\prime}+q_x^*)+\lambda_2(Q_y^{*\prime}+q_y^*)\\ &\quad+\lambda_3(M_x'-Q_y^*+m_x)+\lambda_4(M_y'-Q_x^*+m_y)\\ &\quad+\lambda_5(T_s^{*\prime}+T_\omega^{*\prime}+m_z^*)+\lambda_6(M_\omega^{*\prime}-T_\omega^*\\ &\quad+m_\omega^*)]dz \end{aligned}$$

ここで，部分積分を行うと

$$\begin{aligned}\delta\Pi_N=&[\lambda_1\delta Q_x^*+\lambda_2\delta Q_y^*+\lambda_3\delta M_x+\lambda_4\delta M_y\\ &+\lambda_5\delta(T_s^*+T_\omega^*)+\lambda_6\delta M_\omega^*]_{z1}^{z2}\\ &-\int_{z1}^{z2}\{\lambda_1'\delta Q_x^*-\lambda_1\delta q_x^*+\lambda_2'\delta Q_y^*-\lambda_2\delta q_y^*\\ &+\lambda_3'\delta M_x+\lambda_3\delta Q_y^*-\lambda_3\delta m_x\\ &+\lambda_4'\delta M_y+\lambda_4\delta Q_x^*-\lambda_4\delta m_y\\ &+\lambda_5'\delta(T_s^*+T_\omega^*)-\lambda_5\delta m_z^*\\ &+\lambda_6'\delta M_\omega^*+\lambda_6\delta T_\omega^*-\lambda_6\delta m_\omega^*\}dz \end{aligned} \qquad (11)$$

Lagrange の乗数 $\lambda_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ は式(8)，(10)および(11)を式(7)に代入した際，境界項が消滅する条件より定まり，つぎのように表される；

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1=u^*,\ \lambda_2=v^*,\ \lambda_3=-\psi_x \\ &\lambda_4=-\psi_y,\ \lambda_5=\varphi,\ \lambda_6=-\vartheta^* \end{aligned}\right\} \qquad (12)_{a-f}$$

結局，仮想仕事の原理を表す式(7)は，式(8)，(10)，(11)，(12)を用いてつぎのように書き表される；

$$\begin{aligned}\delta\Pi=&\int_{z1}^{z2}\Big\{\frac{M_x\delta M_x}{EJ_x}+\frac{M_y\delta M_y}{EJ_y}+\frac{M_\omega^*\delta M_\omega^*}{EC_\omega^*}\\ &+\frac{T_s^*\delta T_s^*}{GJ_T^*}+\frac{Q_x^*\delta Q_x^*}{\kappa_x GF}+\frac{Q_y^*\delta Q_y^*}{\kappa_y GF}+\frac{T_\omega^*\delta T_\omega^*}{\kappa_\omega^* GJ_T^*}\\ &-u^{*\prime}\delta Q_x^*-v^{*\prime}\delta Q_y^*+\psi_x'\delta M_x+\psi_x\delta Q_y^*\\ &+\psi_y'\delta M_y+\psi_y\delta Q_x^*-\varphi'\delta(T_s^*+T_\omega^*)\\ &+\vartheta^{*\prime}\delta M_\omega^*+\vartheta^*\delta T_\omega^*\Big\}dz=0 \end{aligned} \qquad (13)$$

したがって，式(13)より δQ_x^*，δQ_y^*，δM_x，δM_y，δT_s^*，δT_ω^*，δM_ω^* の任意性からつぎのような断面力と変形との関係式を得る；

$$\left.\begin{aligned} Q_x^*&=\kappa_x GF(u^{*\prime}-\psi_y) \\ Q_y^*&=\kappa_y GF(v^{*\prime}-\psi_x) \\ M_x&=-EJ_x\psi_x' \\ M_y&=-EJ_y\psi_y' \\ T_s^*&=GJ_T^*\varphi' \\ T_\omega^*&=\kappa_\omega^* GJ_T^*(\varphi'-\vartheta^*) \\ M_\omega^*&=-EC_\omega^*\vartheta^{*\prime} \end{aligned}\right\} \qquad (14)_{a-g}$$

式(14)を式(1)に代入すると，曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した，薄肉ばりの静的つりあいの微分方程式がつぎのように得られる；

$$\left.\begin{aligned} &\kappa_x GF(u^{*\prime\prime}-\psi_y')+q_x^*=0 \\ &\kappa_x GFu^{*\prime}+EJ_y\psi_y''-\kappa_x GF\psi_y'-m_y=0 \\ &\kappa_y GF(v^{*\prime\prime}-\psi_x')+q_y^*=0 \\ &\kappa_y GFv^{*\prime}+EJ_x\psi_x''-\kappa_y GF\psi_x'-m_x=0 \\ &(1+\kappa_\omega^*)GJ_T^*\varphi''-\kappa_\omega^* GJ_T^*\vartheta^{*\prime}+m_z^*=0 \\ &\kappa_\omega^* GJ_T^*\varphi'+EC_\omega^*\vartheta^{*\prime\prime}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\vartheta^*-m_\omega^*=0 \end{aligned}\right\} \qquad (15)_{a-f}$$

これは３組の連立方程式であり，第１組および第２組はそれぞれせん断変形を考慮した x および y 軸方向への曲げに関する微分方程式を表し，第３組は反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した曲げねじれに関する微

分方程式を表している

3. 曲げおよび反り拘束ねじりに伴なうせん断変形を考慮した振動方程式

曲げおよび反り拘束ねじれに伴なうせん断変形を考慮した，薄肉ばりの振動方程式は，2. で求めた静的つりあいの微分方程式(15)の荷重項をはりの振動時における慣性力と強制外力で置き換えることによって得られる。

いま，はりの薄肉中心面の単位面積当りの慣性力の x, y, z 方向の成分をそれぞれ p_x, p_y, p_z とすると，これらは式(2)を用いてつぎのように表される；

$$\left.\begin{aligned}
p_x&=-\rho t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\rho t\left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}-(y-y_s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]\\
p_y&=-\rho t\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=-\rho t\left[\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}+(x-x_s)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right]\\
p_z&=-\rho t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-\rho t\left[\frac{\partial^2 w_o}{\partial t^2}-y\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right.\\
&\qquad\left.-\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial t^2}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{16$_{a-c}$}$$

ここに，ρ ははりの材料の密度である。

はりの単位長さ当りの慣性力は p_x, p_y, p_zを用いてつぎのように書ける；

$$\left.\begin{aligned}
&q_x^*=\int_F\frac{1}{t}p_x dF,\quad q_y^*=\int_F\frac{1}{t}p_y dF\\
&m_x=\int_F\frac{1}{t}p_z y dF,\quad m_y=\int_F\frac{1}{t}p_z x dF\\
&m_z^*=\int_F\frac{1}{t}\{p_y(x-x_s)-p_x(y-y_s)\}dF\\
&m_\omega^*=\int_F\frac{1}{t}p_z\omega^* dF
\end{aligned}\right\}\tag{17$_{a-f}$}$$

したがって，式(17)に式(16)を代入すると，慣性力として次式を得る；

$$\left.\begin{aligned}
q_x^*&=-\rho F\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}+y_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\\
q_y^*&=-\rho F\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\\
m_x&=\rho J_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\\
m_y&=\rho J_y\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\\
m_z^*&=-\rho F\left(y_s\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}+r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\\
m_\omega^*&=\rho C_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\tag{18$_{a-f}$}$$

ここに，r_s はせん断中心 S に関する極回転半径を表す。すなわち

$$r_s^2=\frac{1}{F}\int_F\{(x-x_s)^2+(y-y_s)^2\}dF\tag{19}$$

式(18)を式(15)に代入すると，曲げおよび反り拘束に伴なうせん断変形を考慮した曲げねじれ自由振動の振動方程式がつぎのように得られる；

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa_x GF\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi_y}{\partial z}\right)-\rho F\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}+y_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&\kappa_x GF\frac{\partial u^*}{\partial z}+EJ_y\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}-\kappa_x GF\psi_y-\rho J_y\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}=0\\
&\kappa_y GF\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\right)-\rho F\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&\kappa_y GF\frac{\partial v^*}{\partial z}+EJ_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2}-\kappa_y GF\psi_x-\rho J_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}=0\\
&(1+\kappa_\omega^*)GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\frac{\partial\vartheta^*}{\partial z}\\
&-\rho F\left(y_s\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}+r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&\kappa_\omega^* GJ_T^*\frac{\partial\varphi}{\partial z}+EC_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\vartheta^*\\
&\qquad-\rho C_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial t^2}=0
\end{aligned}\right\}\tag{20$_{a-f}$}$$

式(20)$_{a\cdot b}$, (20)$_{c\cdot d}$, (20)$_{e\cdot f}$ よりそれぞれ κ_x, κ_y, κ_ω^*の項を消去し，さらに

$$\psi_x=\frac{\partial v^*}{\partial z},\quad \psi_y=\frac{\partial u^*}{\partial z},\quad \vartheta^*=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\tag{21$_{a-c}$}$$

とおくと，曲げおよび反り拘束ねじりに伴なうせん断変形を無視した場合の微分方程式が得られる。すなわち

$$\left.\begin{aligned}
&EJ_y\frac{\partial^4 u^*}{\partial z^4}-\rho J_y\frac{\partial^4 u^*}{\partial z^2\partial t^2}+\rho F\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}+y_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&EJ_x\frac{\partial^4 v^*}{\partial z^4}-\rho J_x\frac{\partial^4 v^*}{\partial z^2\partial t^2}+\rho F\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&EC_\omega^*\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}-GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\rho C_\omega^*\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^2\partial t^2}\\
&\qquad+\rho F\left(y_s\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}+r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{22$_{a-c}$}$$

さらに，曲げ回転慣性および反り慣性をも無視すると，次式を得る；

$$\left.\begin{aligned}
&EJ_y\frac{\partial^4 u^*}{\partial z^4}+\rho F\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}+y_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&EJ_x\frac{\partial^4 v^*}{\partial z^4}+\rho F\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\
&EC_\omega^*\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}-GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\rho F\left(y_s\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}\right.\\
&\qquad\left.+r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0
\end{aligned}\right\}\tag{23$_{a-c}$}$$

これは慣用の曲げねじれ理論に基づく薄肉ばりの振動方程式であり，すでに知られているものと一致する[4)]。式(20)の微分方程式系においては，6個の方程式がすべて連成しているが，二軸対称断面の場合には $x_s=y_s$

$=0$ であるから，それぞれ2個の微分方程式よりなる3組の方程式系に分解される。すなわち，x 軸方向への曲げ振動に対して

$$\left.\begin{aligned}&\kappa_x GF\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}-\frac{\partial \psi_y}{\partial z}\right)-\rho F\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}=0\\&\kappa_x GF\frac{\partial u^*}{\partial z}+EJ_y\frac{\partial^2\psi_y}{\partial z^2}-\kappa_x GF\psi_y-\rho J_y\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{24}_{ab}$$

y 軸方向の曲げ振動に対して

$$\left.\begin{aligned}&\kappa_y GF\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2}-\frac{\partial \psi_x}{\partial z}\right)-\rho F\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}=0\\&\kappa_y GF\frac{\partial v^*}{\partial z}+EJ_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2}-\kappa_y GF\psi_x-\rho J_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{25}_{ab}$$

さらに，反り拘束ねじれ振動に対して

$$\left.\begin{aligned}&(1+\kappa_\omega^*)GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\frac{\partial\vartheta^*}{\partial z}\\&\qquad-\rho F r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\\&\kappa_\omega^* GJ_T^*\frac{\partial\varphi}{\partial z}+EC_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\vartheta^*\\&\qquad-\rho C_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{26}_{a,b}$$

式(24)，(25)はいわゆる Timoshenko Beam Equation にほかならない。一方，二軸対称断面で，曲げおよび反り拘束ねじれに伴なうせん断変形，曲げ回転慣性ならびに反り慣性を無視した場合の振動方程式は，よく知られた3個の独立した微分方程式となる。すなわち，式(23)において $x_s=y_s=0$ として

$$\left.\begin{aligned}&EJ_y\frac{\partial^4 u^*}{\partial z^4}+\rho F\frac{\partial^2 u^*}{\partial t^2}=0\\&EJ_x\frac{\partial^4 v^*}{\partial z^4}+\rho F\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}=0\\&EC_\omega^*\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}-GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\rho F r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{27}_{a-c}$$

一軸対称断面の場合には，$x_s=0$ または $y_s=0$ であるから，式(20)は2個の微分方程式よりなる方程式系と，4個の微分方程式よりなる方程式系とに分解される。たとえば，x 軸に関して対称な断面の場合には，$y_s=0$ として，x 軸方向の曲げ振動に対しては式(24)があてはまり，一方 y 軸方向の曲げとねじれは連成し，その振動方程式はつぎのように表される；

$$\left.\begin{aligned}&\kappa_y GF\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial z^2}-\frac{\partial\psi_x}{\partial z}\right)-\rho F\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\&\kappa_y GF\frac{\partial v^*}{\partial z}+EJ_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial z^2}-\kappa_y GF\psi_x-\rho J_x\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}=0\\&(1+\kappa_\omega^*)GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\frac{\partial\vartheta^*}{\partial z}\\&\qquad+\rho F\left(x_s\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\&\kappa_\omega^* GJ_T^*\frac{\partial\varphi}{\partial z}+EC_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* GJ_T^*\vartheta^*\\&\qquad-\rho C_\omega^*\frac{\partial^2\vartheta^*}{\partial t^2}\Big)=0\end{aligned}\right\} \tag{28}_{a-d}$$

これに対し，x 軸に関して対称な断面で，曲げおよび反り拘束ねじりに伴なうせん断変形，曲げ回転慣性ならびに反り慣性をともに無視した場合の y 軸方向の曲げと反り拘束ねじりの連成振動の支配方程式は，式(23)$_{b\text{-}c}$ で $y_s=0$ とおいて，つぎのようになる；

$$\left.\begin{aligned}&EJ_x\frac{\partial^4 v^*}{\partial z^4}+\rho F\left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}-x_s\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\\&EC_\omega^*\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4}-GJ_T^*\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\rho F\left(x_s\frac{\partial^2 v^*}{\partial t^2}\right.\\&\qquad\left.-r_s^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)=0\end{aligned}\right\} \tag{29}_{a\cdot b}$$

4. 曲げねじれ自由振動波の波動解析

ここでは一軸対称断面（$y_s=0$ の場合とする）ばりの曲げねじれ振動を例に選んで，その自由振動波の波動解析を行う。

まず，支配方程式(28)を Matrix 表示すると

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\kappa_y\frac{\partial^2}{\partial z^2} & \kappa_y\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{c_2^2}x_s\frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0\\ \kappa_y\frac{\partial}{\partial z} & \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 r_x^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\kappa_y-\frac{1}{c_2^2}r_x^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{c_2^2}x_s\frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & -(1+\kappa_\omega^*)r_t^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{c_2^2}r_s^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \kappa_\omega^* r_t^2\frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & \kappa_\omega^* r_t^2\frac{\partial}{\partial z} & \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 r_\omega^4\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\kappa_\omega^* r_t^2-\frac{1}{c_2^2}r_\omega^4\frac{\partial^2}{\partial t^2}\end{vmatrix}\begin{pmatrix}v^*\\ \psi_x\\ \varphi\\ \vartheta^*\end{pmatrix}=0 \tag{28'}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}&r_x^2=\frac{J_x}{F},\quad r_t^2=\frac{J_T^*}{F},\quad r_\omega^4=\frac{C_\omega^*}{F}\\&c_0^2=\frac{E}{\rho},\quad c_2^2=\frac{G}{\rho}\end{aligned}\right\} \tag{30}_{a-e}$$

したがって，式(28)$'$からϕ_x，φ，ϑ^*を消去すると，v^*のみに関する微分方程式がつぎのように書ける；

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c_2{}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\kappa_y\frac{\partial^2}{\partial z^2} & \kappa_y\frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{c_2{}^2}x_s\frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 \\ \kappa_y\frac{\partial}{\partial z} & \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 r_x{}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\kappa_y-\frac{1}{c_2{}^2}r_x{}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{c_2{}^2}x_s\frac{\partial^2}{\partial t^2} & 0 & -(1+\kappa_\omega{}^*)r_t{}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{c_2{}^2}r_s{}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \kappa_\omega{}^* r_t{}^2\frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & \kappa_\omega{}^* r_t{}^2\frac{\partial}{\partial z} & \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2 r_\omega{}^4\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\kappa_\omega{}^* r_t{}^2-\frac{1}{c_2{}^2}r_\omega{}^4\frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{pmatrix} v^*=0 \tag{31}$$

さて，位相速度c_p，波長λで無限長のはりを伝播する正弦波を考える。すなわち，Cを任意定数として

$$v^*=C\cos\frac{2\pi}{\lambda}(z-c_pt) \tag{32}$$

式(31)，(32)より，$\partial^2/\partial z^2=-(2\pi/\lambda)^2$，$\partial^2/\partial t^2=-(2\pi/\lambda)^2c_p{}^2$ を考慮して，固有値問題として波速c_pを定める次式が得られる；

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2-\kappa_y\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 & -\kappa_y & -\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2x_s & 0 \\ \kappa_y\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 & \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2r_x{}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2+\kappa_y-\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2r_x{}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 & 0 & 0 \\ -\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2x_s & 0 & -(1+\kappa_\omega{}^*)r_t{}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2r_s{}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 & -\kappa_\omega{}^*r_t{}^2 \\ 0 & 0 & \kappa_\omega{}^*r_t{}^2\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 & \left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2r_\omega{}^4\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2+\kappa_\omega{}^*r_t{}^2-\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2r_\omega{}^4\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \end{vmatrix}=0 \tag{33}$$

計算に便利なように，代数方程式の形で表すと，つぎのようになる：

$$a_1\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^8-a_2\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^6+a_3\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^4-a_4\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2+a_5=0 \tag{33$'$}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} a_1&=16\pi^4\beta(\alpha-\gamma)\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^4 \\ a_2&=16\pi^4\beta\{1+\kappa_\omega{}^*+\alpha\kappa_y+2\mu(\alpha-\gamma)\}\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^4 \\ &\quad+4\pi^2(\kappa_\omega{}^*+\beta\kappa_y)(\alpha-\gamma)\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^2 \\ a_3&=16\pi^4\beta\{\kappa_y(1+\kappa_\omega{}^*)+2\mu(1+\kappa_\omega{}^*+\alpha\kappa_y) \\ &\qquad+\mu^2(\alpha-\gamma)\}\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^4 \\ &\quad+4\pi^2\{\kappa_\omega{}^*+\beta\kappa_y+(\alpha+\beta)\kappa_y\kappa_\omega{}^* \\ &\qquad+\mu(\kappa_\omega{}^*+\beta\kappa_y)(\alpha-\gamma)\}\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^2 \\ &\quad+\kappa_y\kappa_\omega{}^*(\alpha-\gamma) \\ a_4&=16\pi^4\beta\mu\{2\kappa_y(1+\kappa_\omega{}^*)+\mu(1+\kappa_\omega{}^*+\alpha\kappa_y)\} \\ &\quad\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^4+4\pi^2\{\kappa_y\kappa_\omega{}^*(1+\alpha\mu+\beta\mu) \\ &\quad+\mu(\kappa_\omega{}^*+\beta\kappa_y)\}\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^2+\kappa_y\kappa_\omega{}^* \\ a_5&=16\pi^4\beta\mu^2\kappa_y(1+\kappa_\omega{}^*)\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^4 \\ &\quad+4\pi^2\mu\kappa_y\kappa_\omega{}^*\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{34$_{a-e}$}$$

さらに

$$\left.\begin{aligned} \alpha&=\left(\frac{r_s}{r_t}\right)^2=\frac{J_x+J_y+F(x_s{}^2+y_s{}^2)}{J_T{}^*} \\ \beta&=\left(\frac{r_\omega{}^2}{r_xr_t}\right)^2=\frac{FC_\omega{}^*}{J_xJ_T{}^*} \\ \gamma&=\left(\frac{x_s}{r_t}\right)^2=\frac{Fx_s{}^2}{J_T{}^*} \\ \mu&=\left(\frac{c_0}{c_2}\right)^2=\frac{E}{G} \end{aligned}\right\} \tag{35$_{a-d}$}$$

式(33)または式(33)$'$を解いて求まる4個のc_pは，4種の Mode の伝播速度を表すことになる。ここではその4種の Mode を最も卓越する変形で代表させて，それぞれ v^*−Mode，ϕ_x−Mode，φ−Mode，ϑ^*−Mode と呼ぶことにする。

なお，曲げおよび反り拘束ねじりに伴なうせん断変形，曲げ回転慣性，ならびに反り慣性をともに無視した場合には，式(29)に基づき，c_pを定める方程式として次式を得る；

$$\begin{vmatrix} 4\pi^2\mu\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 & -\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 \\ -\gamma\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 & 4\pi^2\beta\mu\left(\frac{r_x}{\lambda}\right)^2+1-\alpha\left(\frac{c_p}{c_2}\right)^2 \end{vmatrix}=0 \tag{36}$$

これは2種の Mode の伝播速度を与えるが，ここでは上記の場合と同様にその2つの Mode をそれぞれ

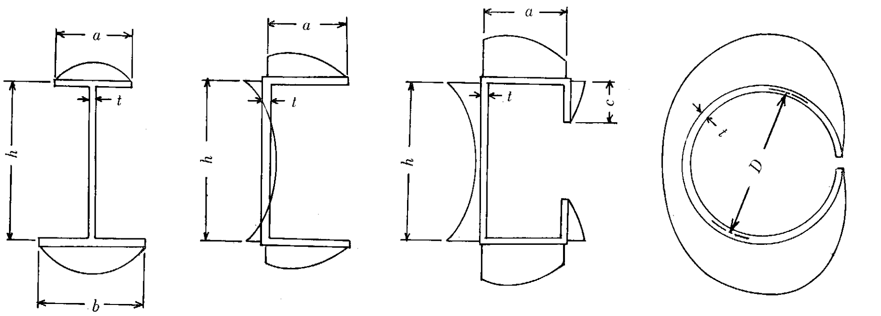


図-2　1軸対称断面とその S_ω*—図

v^*-Mode, $\varphi-$Mode, と呼ぶことにする。

5. 数値計算結果と考察

4種の代表的な一軸対称断面の薄肉ばりについて，4. の波動解析を数値的に行い，その曲げねじれ自由振動波の伝播特性を調べてみる。4種の断面形を S_ω*-図とともに図-2に示す（x軸を対称軸とする）。数値計算にあたって，図-2の記号で記した断面寸法に対して無次元量

$$k=\frac{a}{h}\ ,\quad l=\frac{b}{h}\ ,\quad m=\frac{c}{h} \tag{37$_{a-c}$}$$

を導入する。

これらの記号を用いて，各断面形に対して計算される各種の断面定数のうち，St. Venant のねじり定数 J_T*，せん断中心 S の座標 x_s，反り定数 C_ω* 非対称軸（y軸）方向への曲げせん断補正係数 κ_y，反りせん断補正係数 κ_ω* の表式，ならびに κ_y および κ_ω* の特性を列記すればつぎのようである。

不等フランジをもつ I 断面の場合

$$\left.\begin{aligned}
J_T^*&=\frac{t^3h}{3}(1+k+l)\\
x_s&=\frac{h}{2}\cdot\frac{(k-l)(k^2+kl+l^2-2l^3)}{(k^3+l^3)(1+k-l)}\\
C_\omega^*&=\frac{th^5}{12}\cdot\frac{k^3l^3}{k^3+l^3}\\
\frac{1}{\kappa_y}&=\frac{6}{5}\cdot\frac{k^5+l^5}{(k^2-kl+l^2)(k^3+l^3)}\\
\frac{1}{\kappa_\omega^*}&=\frac{2}{5}\left(\frac{t}{h}\right)^2\frac{(k+l)(1+k+l)}{kl}
\end{aligned}\right\} \tag{39$_{a-e}$}$$

$1/\kappa_y$ の値は，板厚 t には無関係に，両フランジ幅の比 $a/b(=k/l)$ とともに増大し，$1/\kappa_\omega$* の値は，板厚 t の増大（t/h の増大），フランジ幅の減少（k, l の減少）とともに大きくなる性質を有する。

チャンネル断面の場合

$$\left.\begin{aligned}
J_T^*&=\frac{t^3h}{3}(1+2k)\\
x_s&=4h\cdot\frac{k^2(1+3k)}{(1+2k)(1+6k)}\\
C_\omega^*&=\frac{th^5}{12}\cdot\frac{k^3(2+3k)}{1+6k}\\
\frac{1}{\kappa_y}&=\frac{6}{5}\cdot\frac{1+10k+30k^2+20k^3}{(1+6k)^2}\\
\frac{1}{\kappa_\omega^*}&=\frac{1}{5}\left(\frac{t}{h}\right)^2\frac{(1+2k)(3+16k+42k^2+36k^3)}{k^2(2+3k)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{39$_{a-e}$}$$

$1/\kappa_y$ の値は，板厚 t とは無関係に，フランジ幅 b の増大（k の増大）とともに大きくなり，一方 $1/\kappa_\omega$* は，I 断面の場合と同様な傾向を示すが，値そのものは k の小さい領域では I 断面のそれよりもかなり大きい。

⊏断面の場合

$$\left.\begin{aligned}
J_T^*&=\frac{t^3h}{3}(1+2k+2m)\\
x_s&=hk(f+g)\\
C_\omega^*&=\frac{th^5}{12}\{2k^2(k+3m+6m^2+4m^3)\\
&\quad-2k(3k+6m-8m^3)g\\
&\quad+(1+6k+6m-12m^2+8m^3)g^2\}
\end{aligned}\right\} \tag{40$_{a-c}$}$$

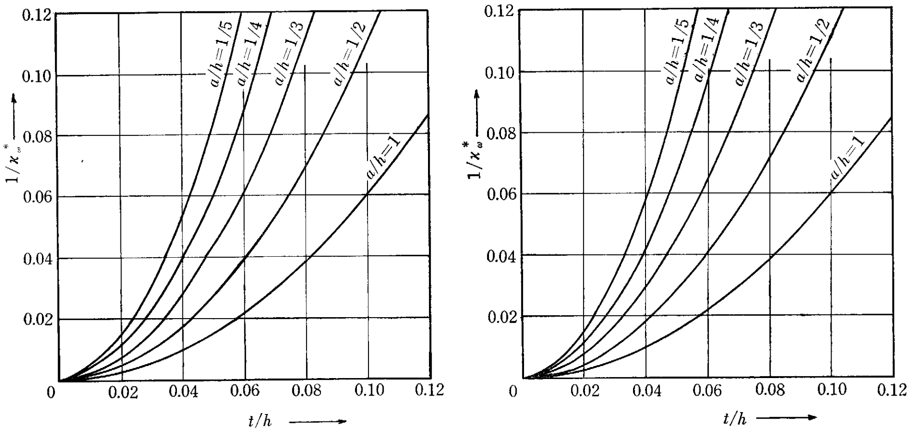
ここに

$$f=\frac{k(k+2m)}{1+2k+2m},\quad g=\frac{k(3k+6m-8m^3)}{1+6k+6m-12m^2+8m^3} \tag{41$_{a,b}$}$$

$1/\kappa_y$ および $1/\kappa_\omega$* の表式は非常に複雑になるので，

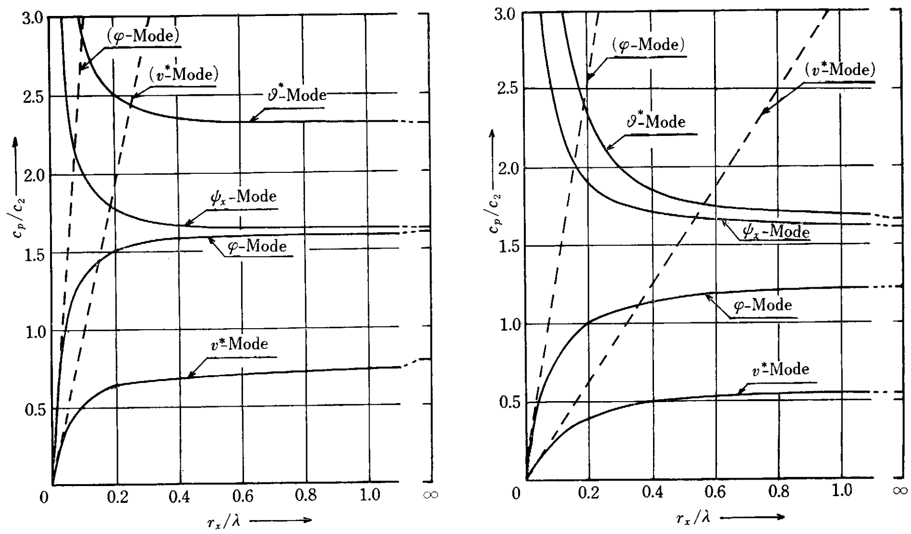
表-1　⊏断面の曲げせん断補正係数($1/\kappa_y$)

c/h \ a/h	1	1/2	1/3	1/4	1/5
0.05	5.201	3.563	2.971	2.657	2.461
0.10	5.872	4.102	3.468	3.135	2.927
0.15	6.585	4.686	4.011	3.658	3.439
0.20	7.333	5.308	4.593	4.222	3.992
0.25	8.107	5.960	5.207	4.818	4.579
0.30	8.895	6.628	5.839	5.434	5.185
0.35	9.680	7.295	6.471	6.049	5.792
0.40	10.441	7.937	7.078	6.640	6.373
0.45	11.155	8.528	7.630	7.174	6.897
0.50	11.793	9.033	8.092	7.615	7.325



$c/h=0.25$ の場合　　$c/h=0.40$ の場合

図-3　[断面の反りせん断補正係数 $(1/\kappa_\omega{}^*)$



工断面 ($a/h=1/4$, $b/h=1/2$, $t/h=1/10$ の場合)　　チャンネル断面 ($a/h=1/2$, $t/h=1/10$ の場合)

図-4　不等フランジをもつ工断面とチャンネル断面のはりの曲げねじれ振動波の位相速度 c_p と波長 λ との関係の一例

ここでは省略し，数値計算結果の一部を $1/\kappa_y$ については**表-1** に，$1/\kappa_\omega{}^*$ については**図-3** に示すにとどめる。$1/\kappa_y$ の値は，板厚 t には無関係に，フランジ幅 b の増大（k の増大），アゴ c の増大（m の増大）とともに大きくなる。$1/\kappa_\omega{}^*$ の値は，板厚 t の増大（t/h の増大），フランジ幅 b の減少（k の減少）とともに大きくなるが，アゴ $c(m)$ の影響はあまり受けない。

スリットをもつ円管断面の場合

$$J_T{}^*=\frac{\pi}{3}Dt^3$$

$$x_s=D$$

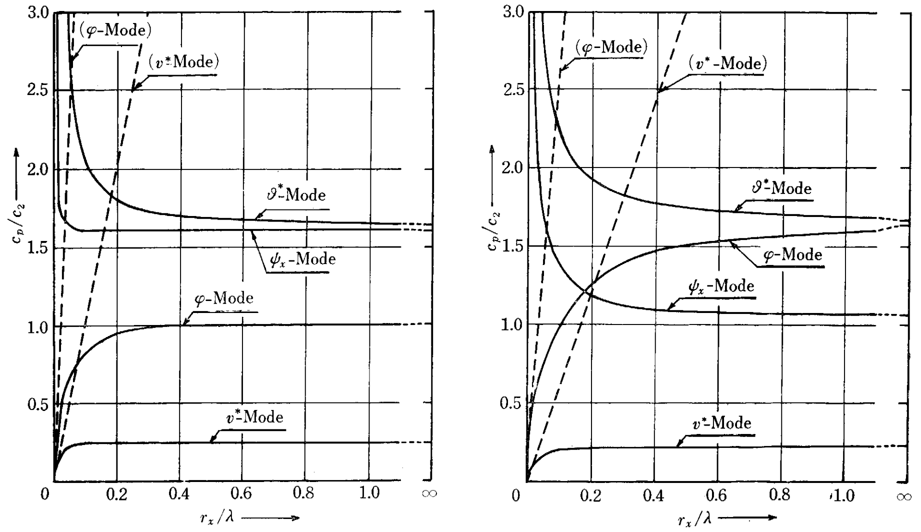
$$C_\omega{}^*=\frac{1}{48}\pi(\pi^2-6)D^5t$$

$$\frac{1}{\kappa_y}=\frac{6}{\left\{1+\left(\frac{t}{D}\right)^2\right\}^2}$$

$$\frac{1}{\kappa_\omega{}^*}=6\cdot\frac{\frac{\pi^4}{80}-\frac{2.930}{6}\pi^2+8.585}{(\pi^2-6)^2}\left(\frac{t}{D}\right)^2=3.987\left(\frac{t}{D}\right)^2 \qquad (42)_{a-e}$$

$1/\kappa_y$ および $1/\kappa_\omega{}^*$ の特性は式(42)より明らかである。

各種の断面定数を知れば，式(33)あるいは式(33)′ によって，振動波の位相速度 c_p と波長 λ との関係を求めることができる。その計算結果の一例として，図-2の4種の断面形のおのおのについて一ケースづつを，**図-4**および**図-5**に実線で示す。図中の破線は，曲げおよ



C 断面 (a/h=1/2, c/h=1/4, t/h=1/10の場合)　　スリットをもつ円管断面 (t/D=1/10の場合)

図-5　C断面とスリットをもつ円管断面のはりの曲げねじれ振動波の位相速度c_pと波長λとの関係の一例

び反り拘束ねじりに伴なうせん断変形，ならびに曲げ回転慣性および反り慣性を無視した慣用の曲げねじれ理論に基づく式(35)より計算された結果を表している。

図-4および図-5から明らかのように，$1/\lambda$ が小さい領域，すなわち長周期の振動においては，両理論の結果は一致しているが，$1/\lambda$ が大きい領域では，前者の理論による波速は波長（振動数）にほぼ無関係に一定であるのに対し，後者の理論による波速は振動数の増大とともに極端に大きくなってしまう。このことは短波長波すなわち高周波振動においては，後者の理論によれば，振動波形は伝播の過程で次第にくづれていきいわゆる分散現象を呈し，しかもその伝播は瞬間的であることになる。これに対し，前者の解析によれば，4つの波列が振動数にはほとんど無関係に一定速度で伝播することになるから，衝撃問題のように Time Delay が意味をもつ曲げねじれ振動の解析がはじめて可能になる。

6. おわりに

はりの曲げに関するいわゆる Timoshenko Beam Theory を，薄肉開断面ばりの一般的な変形，すなわち曲げと反り拘束ねじりの連成問題に拡張し，衝撃的荷重を受けるそのようなはりの過渡的応答の解析に際して，その基盤となり得る基礎理論の関発につとめた。

本報告の特徴は，曲げおよび反り拘束ねじりに伴なうせん断ひずみの取り扱いに際して，薄肉中心線の全長にわたってエネルギー論的平均化の処置を施した点にある。それによって，基本変形量を最も一般的な場合でも6個に限定することができ，慣用の曲げねじれ理論による支配方程式と対応関係を保持する形の基礎微分方程式を得ることができた。換言すれば，本論の支配方程式の係数は慣用の曲げねじれ理論において現れる断面の諸定数に，新たに曲げおよび反りせん断補正係数が加わったにすぎない点で特徴的である。

代表的な一軸対称断面のはりの曲げと反り拘束ねじりの連成振動の自由振動波について，解析を行った結果は，定性的には満足のいくものであったが，前記の近似的処置に対する精度上の保証は，より厳密な解析によって裏づけられなければならないことはいうまでもない。この種の検討と，具体的な薄肉ばりの衝撃的曲げねじれ問題の解析への発展ならびに実験的検証については今後の課題である。

参考文献

1) Aggarwal, H. R. and E. T. Cranch: A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin-Walled Open Section Beams, Journal of Applied Mechanics, Vol. 34, No. 2, P. 337–343 (June 1967)
2) 深沢泰晴：薄肉ばりの曲げねじれ振動波の伝播について，土木学会第28回年次学術講演会講演概要集第1部 (1973. 10)
3) Kollbrunner, C. F. and N. Hajdin: Dünnwandige-Stäbe Band 1, Springer-Verlag (1972)
4) Gere, J. M. and Y. K. Lin: Coupled Vibrations of Thin-Walled Beams of Open Cross Section, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, No. 3, P. 373–378 (September 1958)

5) G. R. Cowper : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, No. 2, P. 335–340 (June 1966)
6) 深沢泰晴： "ティモシェンコばり" としての薄肉曲線ばりの曲げねじれ振動波の理論，土木学会第27回年次学術講演会講演概要集第1部(1972. 10)
7) Morley, L. S. D. : Elastic Waves in a Naturally Curved Rod, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, Vol. XIV, Part 2, P. 155–172 (1961)
8) Heilig, R. : Der Schubverformungseinfluβ auf die Wölbkrafttorsion von Stäben mit offenem Profil, Stahlbau, Heft 4, S. 97–103 (April 1961)
9) Vlasov, V. Z.: Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Ierusalem(1961)
10) 深沢・太田：開断面薄肉ばりの曲げねじれ振動波の伝播に関する基礎的考察，第1回土木学会関東支部年次研究発表会講演概要集（1974. 5)