

S字曲線形立体トラス橋の応力解析

近 藤 繁 人
小 林 真 人

Stress Analysis of S-Curved Space Frame Bridge

Shigeto KONDO, Mahito KOBAYASHI

Synopsis

When we construct a new road in a city, we are often obliged to use a S-Curved bridge because of the topography or the pre-established buildings.

On the stress analysis of a circular curved space frame bridge, we had already investigated, we described here on the stress analysis of the circular S-Curved space frame bridge. For the convenience of calculation, we assume that the radii of the two circles are same and there is no transition curve between them.

1. ま え が き

市街地などで道路や鉄道を築造するとき、地形ならびに大きなビルなどの関係上、曲線形の橋の架設を必要とする場合がしばしばある。単一円曲線形の立体トラス橋についてはすでに発表済み¹⁾であるので、ここでは、計算の便宜上、半径相等しい2個の円曲線をS字形に連続させ、中間に緩和曲線を入れない場合の立体トラス橋について、鉛直荷重、接線荷重、遠心荷重などが作用した場合の応力解析を試みることにした。

2. 上げん材応力に関する階差方程式(その1)

第1図に示すようなS字曲線形立体トラス橋を例にとれば、これは静定構造である。この格点 $A_i B_i C_i D_i$ に

- 鉛直下向荷重 $P_{Ai}, P_{Bi}, P_{Ci}, P_{Di}$
- 右向接線荷重 $Q_{Ai}, Q_{Bi}, Q_{Ci}, Q_{Di}$
- 遠心荷重 $W_{Ai}, W_{Bi}, W_{Ci}, W_{Di}$

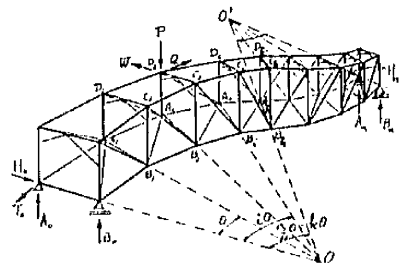
が作用したときの、外側トラスと内側トラスに対し

- 上げん材の応力を U_i^0, U_i
- 斜材の応力を D_i^0, D_i
- 下げん材の応力を L_i^0, L_i

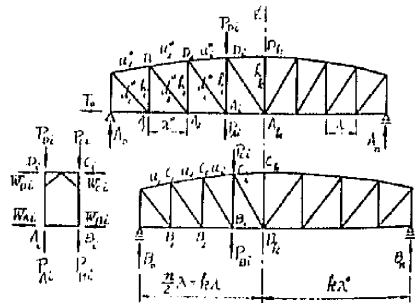
などで表わすこととし、またそれぞれの部材の長さを $u_i^0, u_i, d_i^0, d_i, l_i^0, l_i$ などで表わすことにする。下げん材がすべて水平になっている場合には

$$l_i^0 = \lambda^0, \quad l_i = \lambda$$

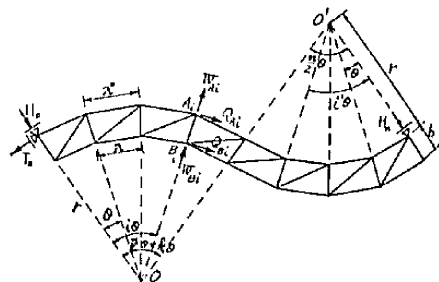
となる。いま、 i 番目の外側および内側の上げん格点について、接線荷重方向の外力および内力の総和を0



第1図-a S字曲線形立体トラス橋の見取図



第1図-b トラス橋の展開図と横断面図



第1図-c トラス橋の平面図

とおけば次の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -U_i^0 \frac{\lambda^0}{u_i^0} + U_{i+1}^0 \frac{\lambda^0}{u_{i+1}^0} + D_{i+1}^0 \frac{\lambda^0}{d_{i+1}^0} + Q_{Di} \sec \frac{\theta}{2} = 0 \\ -U_i \frac{\lambda}{u_i} + U_{i+1} \frac{\lambda}{u_{i+1}} + D_{i+1} \frac{\lambda}{d_{i+1}} + Q_{Di} \sec \frac{\theta}{2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

上式を加えて、 $i+1$ を i に変えると

$$\begin{aligned} \frac{D_{i+1}^0 \lambda^0}{d_{i+1}^0} + \frac{D_i \lambda}{d_i} = - \left(\frac{U_{i+1}^0 \lambda^0}{u_{i+1}^0} + \frac{U_i \lambda}{u_i} \right) \\ + \left(\frac{U_{i+1}^0 \lambda^0}{u_{i+1}^0} + \frac{U_{i-1} \lambda}{u_{i-1}} \right) \\ - (Q_{C, i-1} + Q_{D, i-1}) \sec \frac{\theta}{2} \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

また格点 i の左側の部材応力を使って右側の部材応力を表わせば

$$U_{i+1}^0 = \left[\begin{aligned} & U_i^0 \frac{2h_i - h_{i-1}}{u_i^0} - D_i^0 \frac{h_{i-1}}{d_i^0} \\ & - \frac{h_i}{\lambda^0} Q_{Di} \sec \frac{\theta}{2} + P_{At} + P_{Di} \\ & + \frac{h_i}{b} \{ W_{Ci} + W_{Di} \} \\ & + (Q_{Ci} + Q_{Di}) \tan \frac{\theta}{2} \\ & - 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(U_i^0 \frac{\lambda^0}{u_i^0} + U_i \frac{\lambda}{u_i} \right) \end{aligned} \right] \frac{u_{i+1}^0 \dots}{h_{i+1}} \dots\dots(3)$$

$$U_{i+1} = \left[\begin{aligned} & U_i \frac{2h_i - h_{i-1}}{u_i} - D_i \frac{h_{i-1}}{d_i} \\ & - \frac{h_i}{\lambda} Q_{Di} \sec \frac{\theta}{2} + P_{Mt} + P_{Di} \\ & - \frac{h_i}{b} \{ W_{Ci} + W_{Di} \} \\ & + (Q_{Ci} + Q_{Di}) \tan \frac{\theta}{2} \\ & - 2 \sin \frac{\theta}{2} \left(U_i \frac{\lambda^0}{u_i^0} + U_i \frac{\lambda}{u_i} \right) \end{aligned} \right] \frac{u_{i+1} \dots}{h_{i+1}} \dots\dots(4)$$

(3) × $\frac{h_{i+1}}{u_{i+1}^0} \lambda^0$ + (4) × $\frac{h_{i+1}}{u_{i+1}} \lambda$ を作って (2) × h_{i-1} を代入し

$$\left. \begin{aligned} \lambda^0 - \lambda = 2b \sin \frac{\theta}{2} \\ \left(\frac{U_i^0 \lambda^0}{u_i^0} + \frac{U_i \lambda}{u_i} \right) h_i = y_i \\ (Q_{Ci} + Q_{Di}) h_i \sec \frac{\theta}{2} = p_i \\ (W_{Ci} + W_{Di}) h_i \sin \frac{\theta}{2} = w_i \\ p_{i-1} - p_i \cos \theta + \lambda^0 (P_{At} + P_{Di}) \\ + \lambda (P_{Mt} + P_{Di}) + 2w_i = K_i \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

とおいて、 i を x に書きかえると次の式が得られる。

$$\boxed{y_{x+1} - 2 \cos \theta \cdot y_x + y_{x-1} = K_x} \dots\dots\dots(6)$$

上式を解くために²⁾

$$\left. \begin{aligned} y_{x+1} - 2 \cos \theta \cdot y_x + y_{x-1} = 0 \\ y_x = \beta^x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

とおけば

$$\begin{aligned} \beta^{x+1} - 2 \cos \theta \cdot \beta^x + \beta^{x-1} = 0 \\ \beta^2 - 2 \cos \theta \cdot \beta + 1 = 0 \\ \beta = \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta - 1} = \cos \theta \pm i \sin \theta \end{aligned}$$

$$\beta^x = (\cos \theta \pm i \sin \theta)^x = \cos x\theta \pm i \sin x\theta$$

上式は (7) の特解であるから (7) の一般解は

$$\begin{aligned} y_x = A_1 (\cos x\theta + i \sin x\theta) + A_2 (\cos x\theta - i \sin x\theta) \\ = c_1 \cos x\theta + c_2 \sin x\theta = c_1 \eta_1(x) + c_2 \eta_2(x) \end{aligned} \dots\dots\dots(8)$$

$$\eta_1(x) = \cos x\theta, \quad \eta_2(x) = \sin x\theta \dots\dots\dots(9)$$

は (7) の特解で、 c_1 および c_2 は定数である。

次に (6) の特解を (10) のように仮定する³⁾、

$$y_{x-1} = c_{x1} \cdot \eta_1(x-1) + c_{x2} \cdot \eta_2(x-1) \dots\dots(10)$$

ここで c_{x1} および c_{x2} は x の関数とする。なお

$$y_x = c_{x1} \cdot \eta_1(x) + c_{x2} \cdot \eta_2(x) \dots\dots\dots(11)$$

$$y_{x+1} = c_{x1} \cdot \eta_1(x+1) + c_{x2} \cdot \eta_2(x+1) \dots\dots(12)$$

が成り立つものとする、 c_{x1} , c_{x2} は x の関数でありながら x を $(x-1)$, $(x+1)$ とおいても、 c_{x1} , c_{x2} が不変であることを意味する。

さて一般に、 x を $(x+1)$ とすれば、(10) より

$$\begin{aligned} y_x = c_{x+1,1} \eta_1(x) + c_{x+1,2} \eta_2(x) \\ = (c_{x1} + \Delta c_{x1}) \eta_1(x) + (c_{x2} + \Delta c_{x2}) \eta_2(x) \end{aligned} \dots\dots\dots(13)$$

とおくことができる。上式から (11) を引けば

$$\Delta c_{x1} \cdot \eta_1(x) + \Delta c_{x2} \cdot \eta_2(x) = 0 \dots\dots\dots(14)$$

すなわち、上式が成り立つときは

$$\Delta c_{x1} \neq 0 \quad \Delta c_{x2} \neq 0$$

であつても、式 (11) が成立する。

式 (11) において、 $x \rightarrow (x+1)$ とおけば

$$\begin{aligned} y_{x+1} = c_{x+1,1} \cdot \eta_1(x+1) + c_{x+1,2} \cdot \eta_2(x+1) \\ = (c_{x1} + \Delta c_{x1}) \eta_1(x+1) \\ + (c_{x2} + \Delta c_{x2}) \eta_2(x+1) \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

式 (10)(11)(15) を式 (6) に代入すると

$$\eta_1^2(x+1) - 2 \cos \theta \eta_1(x) + \eta_1^2(x-1) = 0$$

であるから

$$\Delta c_{x1} \cdot \eta_1(x+1) + \Delta c_{x2} \cdot \eta_2(x+1) = K_x \dots\dots(16)$$

式 (14) と (16) から

$$\Delta c_{x1} = - \frac{K_x \sin x\theta}{\sin \theta}, \quad \Delta c_{x2} = \frac{K_x \cos x\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(17)$$

$$c_{x1} = - \sum_{i=0}^x \frac{K_i \sin i\theta}{\sin \theta}, \quad c_{x2} = \sum_{i=0}^x \frac{K_i \cos i\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(18)$$

(6) の特解は (9)(11)(18) より

$$y_x = -\cos x\theta \sum_0^x \frac{K_i \sin i\theta}{\sin \theta} + \sin x\theta \sum_0^x \frac{K_i \cos i\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(19)$$

(6) の一般解は (8) と (19) の和で表わされ

$$y_x = c_1 \cos x\theta + c_2 \sin x\theta + \sum_0^x \frac{K_i \sin(x-i)\theta}{\sin \theta} = c_1 \cos x\theta + c_2 \sin x\theta + \sum_0^{x-1} \frac{K_i \sin(x-i)\theta}{\sin \theta} = c_1 \cos x\theta + c_2 \sin x\theta + \sum_0^{x-1} \{p_{l-1} - p_l \cos \theta + \lambda^0(P_{Al} + P_{Bl}) + \lambda(P_{Bl} + P_{Cl}) + 2\tau\omega_l\} \frac{\sin(x-i)\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(20)$$

ここで境界条件を入れると

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ のとき } y_0 &= c_1 \\ x=1 \text{ のとき } y_1 &= c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta - p_0 \cos \theta \\ &\quad + \lambda^0(P_{A0} - A_0 + P_{B0}) + \lambda(P_{B0} - B_0 + P_{C0}) + 2\tau\omega_0 \end{aligned} \right\}$$

また、式 (20) は (6) を満足しているのので (6) において、 x を -1 、および 0 とおけば

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= -p_0 \cos \theta + \lambda^0(P_{A0} - A_0 + P_{B0}) \\ &\quad + \lambda(P_{B0} - B_0 + P_{C0}) + 2\tau\omega_0 \end{aligned} \right\}$$

$\therefore c_1 = 0, c_2 = 0$

$$\therefore y_x = \sum_0^{x-1} \{p_{l-1} - p_l \cos \theta + \lambda^0(P_{Al} + P_{Bl}) + \lambda(P_{Bl} + P_{Cl}) + 2\tau\omega_l\} \frac{\sin(x-i)\theta}{\sin \theta}$$

ここで

$$\{P_{Al}\}_{l=0} \rightarrow P_{A0} - A_0 \quad \{P_{Bl}\}_{l=0} \rightarrow P_{B0} - B_0$$

であるから、 A_0 と B_0 とを P_{Al} P_{Bl} からはずして

$$\{P_{Al}\}_{l=0,1,2,\dots} = P_{A0}, P_{A1}, P_{A2}, \dots$$

$$\{P_{Bl}\}_{l=0,1,2,\dots} = P_{B0}, P_{B1}, P_{B2}, \dots$$

を表わすものとすれば

$$y_x = \sum_0^{x-1} \{p_{l-1} - p_l \cos \theta + \lambda^0(P_{Al} + P_{Bl}) + \lambda(P_{Bl} + P_{Cl}) + 2\tau\omega_l\} \frac{\sin(x-i)\theta}{\sin \theta} - (\lambda^0 A_0 + \lambda B_0) \frac{\sin x\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(21)$$

さて

$$\sum_{i=0}^{x-1} p_{l-1} \sin(x-i)\theta = \sum_{i=1}^{x-1} p_l \sin(x-i-1)\theta = \sum_{i=0}^{x-2} p_l \sin(x-i-1)\theta = \sum_{i=0}^{x-1} p_l \sin(x-i-1)\theta$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{x-1} (p_{l-1} - p_l \cos \theta) \frac{\sin(x-i)\theta}{\sin \theta} = -\sum_{i=0}^{x-1} p_l \cos(x-i)\theta$$

$$\therefore y_x = -\sum_{i=0}^{x-1} p_l \cos(x-i)\theta + \sum_{i=0}^{x-1} \{\lambda^0(P_{Al} + P_{Bl}) + \lambda(P_{Bl} + P_{Cl}) + 2\tau\omega_l\} \frac{\sin(x-i)\theta}{\sin \theta} - (\lambda^0 A_0 + \lambda B_0) \frac{\sin x\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(22)$$

もし、 x が中央格点 k のときは

$$y_k = h_k \left(\frac{U_k^0}{u_k^0} \lambda^0 + \frac{U_k}{uk} \lambda \right) = -\sum_{i=0}^{k-1} p_l \cos(k-i)\theta + \sum_{i=0}^{k-1} \{\lambda^0(P_{Al} + P_{Bl}) + \lambda(P_{Bl} + P_{Cl}) + 2\tau\omega_l\} \frac{\sin(k-i)\theta}{\sin \theta} - (\lambda^0 A_0 + \lambda B_0) \frac{\sin k\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(23)$$

同様にして、反対側の支点からかぞえた中央格点番号を k' とすれば

$$y_{k'} = h_{k'} \left(\frac{U_{k'}^0}{u_{k'}^0} \lambda^0 + \frac{U_{k'}}{uk'} \lambda \right) = \sum_{i'=0}^{k'-1} p_{l'} \cos(k'-i')\theta + \sum_{i'=0}^{k'-1} \{\lambda^0(P_{Bl'} + P_{Cl'}) + \lambda(P_{Al'} + P_{Bl'}) - 2\tau\omega_{l'}\} \frac{\sin(k'-i')}{\sin \theta} - (\lambda^0 B_n + \lambda A_n) \frac{\sin k'\theta}{\sin \theta} \dots\dots\dots(24)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} k &= k' = n/2 \\ i &+ i' = n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

3. 上げん材応力に関する階差方程式(その2)

式 (1) を変形して加えると

$$\frac{U^0_{i+1}}{u^0_{i+1}} + \frac{U_{i+1}}{u_{i+1}} + \frac{D^0_{i+1}}{d^0_{i+1}} + \frac{D_{i+1}}{d_{i+1}} - \frac{U^0_i}{u^0_i} - \frac{U_i}{u_i} + \left(\frac{Q_{Di}}{\lambda^0} + \frac{Q_{Ci}}{\lambda} \right) \operatorname{csc} \frac{\theta}{2} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

また、面 A_i B_i C_i D_i の両側でトラスを切断して巾の部分を取り出し、これに作用しているすべての外力および内力の鉛直方向の力の総和を 0 とおけば、次の式が得られる。

$$\left(\frac{U^0_i}{u^0_i} + \frac{U_i}{u_i} \right) (h_i - h_{i-1}) - \left(\frac{D^0_i}{d^0_i} + \frac{D_i}{d_i} \right) h_{i-1} - \left(\frac{U^0_{i+1}}{u^0_{i+1}} + \frac{U_{i+1}}{u_{i+1}} \right) (h_{i+1} - h_i) + \left(\frac{D^0_{i+1}}{d^0_{i+1}} + \frac{D_{i+1}}{d_{i+1}} \right) h_i + P_{Al} + P_{Bl} + P_{Cl} + P_{Di} = 0 \dots\dots\dots(27)$$

ここで

$$P_{Al} + P_{Bl} + P_{Cl} + P_{Di} = P_i \dots\dots\dots(28)$$

$$h_i \sec \frac{\theta}{2} \left(\frac{Q_{Di}}{\lambda^0} + \frac{Q_{Ci}}{\lambda} \right) = \frac{h_i}{\sin \theta} \left(\frac{Q_{Di}}{r+b} + \frac{Q_{Ci}}{r} \right) = q_i \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$\left(\frac{U_i^0}{u_i^0} + \frac{U_i}{u_i} \right) h_i = x_i \quad \dots\dots\dots(30)$$

とおいて (26) と (27) から D を消去すると

$$\boxed{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = P_i - q_i + q_{i-1}} \quad \dots\dots\dots(31)$$

これに、境界条件として

$$\left. \begin{array}{l} i=0 \text{ のとき } x_0=0 \\ i=1 \text{ のとき } x_1=P_0 - q_0 - A_0 - B_0 \end{array} \right\} \text{ を入れると}$$

$$x_i = \sum_{z=0}^{i-1} (i-z) P_z - \sum_{z=0}^{i-1} q_z - i(A_0 + B_0) \quad \dots\dots\dots(32)$$

もし、 i が中央格点 k のときは、 i を k 、 z を i に書きかえて

$$\begin{aligned} x_k &= \left(\frac{U_k^0}{u_k^0} + \frac{U_k}{u_k} \right) h_k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (k-i) P_i - \sum_{i=0}^{k-1} q_i - k(A_0 + B_0) \quad \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

同様に、反対側の支点からかぞえた中央格点番号を k' とすれば

$$\begin{aligned} x_{k'} &= \left(\frac{U_{k'}^0}{u_{k'}^0} + \frac{U_{k'}}{u_{k'}} \right) h_{k'} \\ &= \sum_{i'=0}^{k'-1} (k'-i') P_{i'} + \sum_{i'=0}^{k'-1} q_{i'} - k'(A_n + B_n) \quad \dots\dots\dots(34) \end{aligned}$$

4. 上げん材の応力

式 (23) と (33) において、もし支点反力がわかっていたら、 x_k, y_k を決定することができるので、これらの2式を連立方程式として解けば

$$\frac{U_k^0}{u_k^0} = \frac{y_k - \lambda x_k}{(\lambda^0 - \lambda) h_k}, \quad \frac{U_k}{u_k} = \frac{-y_k + \lambda^0 x_k}{(\lambda^0 - \lambda) h_k} \quad \dots\dots\dots(35)$$

同様に、式 (24) と (34) より

$$\frac{U_{k'}^0}{u_{k'}^0} = \frac{y_{k'} - \lambda x_{k'}}{(\lambda^0 - \lambda) h_{k'}}, \quad \frac{U_{k'}}{u_{k'}} = \frac{-y_{k'} + \lambda^0 x_{k'}}{(\lambda^0 - \lambda) h_{k'}} \quad \dots\dots\dots(36)$$

以上の4式は、 k および k' が中央格点でない場合にも成り立つ。

5. 左右両側の支点反力の関係

第1図において、中央上げん格点における接線方向の力のつり合条件式を作り、(35) と (36) を代入すると次の式が得られる。

$$-\frac{U_k^0}{u_k^0} \lambda^0 \cos \frac{\theta}{2} + \frac{U_{k'}}{u_{k'}} \lambda \cos \frac{\theta}{2} + Q_{Dk} = 0$$

$$x_k + x_{k'} - \left(\frac{y_k}{\lambda} + \frac{y_{k'}}{\lambda^0} \right) + h_k \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^0} \right) Q_{Dk} \sec \frac{\theta}{2} = 0$$

上式に(33), (34), (23), (24)を代入して整理すると

$$\frac{\lambda^0}{\lambda} A_0 + \frac{\lambda}{\lambda^0} A_n + B_0 + B_n = \frac{[\delta]}{r(r+b) \sin k\theta} \quad \dots\dots\dots(37)$$

ただし

$$\begin{aligned} [\delta] &= \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{array}{l} (P_{Ai} + P_{Di}) \{ (r+b)^2 \sin(k-i)\theta \\ + (r+b)r \sin \theta \} \\ + (P_{Bi} + P_{Ci}) r (r+b) \{ \sin(k-i)\theta \\ + i \sin \theta \} \\ + Q_{Ci} h_i (r+b) \{ 1 - \cos(k-i)\theta \} \\ + Q_{Di} h_i \{ r - (r+b) \cos(k-i)\theta \} \\ + (W_{Ci} + W_{Di}) h_i (r+b) \sin(k-i)\theta \end{array} \right\} \\ &+ \sum_{k+1}^n \left\{ \begin{array}{l} (P_{Ai} + P_{Di}) \{ r^2 \sin(i-k)\theta \\ + r(r+b)(n-i) \sin \theta \} \\ + (P_{Bi} + P_{Ci}) r (r+b) \{ \sin(i-k)\theta \\ + (n-i) \sin \theta \} \\ - Q_{Ci} h_i r \{ 1 - \cos(i-k)\theta \} \\ - Q_{Di} h_i \{ r+b-r \cos(i-k)\theta \} \\ - (W_{Ci} + W_{Di}) h_i r \sin(i-k)\theta \end{array} \right\} \end{aligned}$$

6. 鉛直反力

第1図のような曲線形立体トラス橋に外力 P, Q, W が作用したとき

- (1) 直線 $A_n B_n$ を軸として $\Sigma M = 0$
- (2) 直線 $O O'$ を軸として $\Sigma M = 0$
- (3) 鉛直反力と P に対し $\Sigma V = 0$

式 (37) を含めて、方程式が4個、未知鉛直反力が4個であるから、この連立方程式を解けば未知鉛直反力を求めることができる。

まず (1) を作って整理すると

$$A_0 + B_0 = -\frac{[\beta]}{(2r+b) \sin k\theta} \quad \dots\dots\dots(38)$$

$$[\beta] = \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{array}{l} (P_{Ai} + P_{Di}) \{ (2r+b) \sin k\theta - (r+b) \sin i\theta \} \\ + (P_{Bi} + P_{Ci}) \{ (2r+b) \sin k\theta - r \sin i\theta \} \\ - (Q_{Ci} + Q_{Di}) h_i \cos i\theta \\ - (W_{Ci} + W_{Di}) h_i \sin i\theta \end{array} \right\}$$

$$+ \sum_{k+1}^n \left\{ \begin{array}{l} (P_{Ai} + P_{Di}) r \sin(n-i)\theta \\ + (P_{Bi} + P_{Ci}) (r+b) \sin(n-i)\theta \\ - (Q_{Ci} + Q_{Di}) h_i \cos(n-i)\theta \\ - (W_{Ci} + W_{Di}) h_i \sin(n-i)\theta \end{array} \right\}$$

次に (2) を作って整理すると

$$\left(\frac{r+b}{r} \right) (A_0 - B_n) + B_0 - A_n = \frac{[r]}{r \sin k\theta} \quad \dots\dots\dots(39)$$

$$[r] = \sum_{i=0}^k \left\{ \begin{array}{l} (P_{Ai} + P_{Di}) (r+b) \sin(k-i)\theta \\ + (P_{Bi} + P_{Ci}) r \sin(k-i)\theta \\ - (Q_{Ci} + Q_{Di}) h_i \cos(k-i)\theta \\ + (W_{Ci} + W_{Di}) h_i \sin(k-i)\theta \end{array} \right\}$$

$$- \sum_{k+1}^n \left\{ \begin{array}{l} (P_{Ai} + P_{Di}) r \sin(i-k)\theta \\ + (P_{Bi} + P_{Ci}) (r+b) \sin(i-k)\theta \\ + (Q_{Ci} + Q_{Di}) h_i \cos(i-k)\theta \\ - (W_{Ci} + W_{Di}) h_i \sin(i-k)\theta \end{array} \right\}$$

また (3) を作って整理すると

$$A_0 + B_0 + A_n + B_n = [\alpha]$$

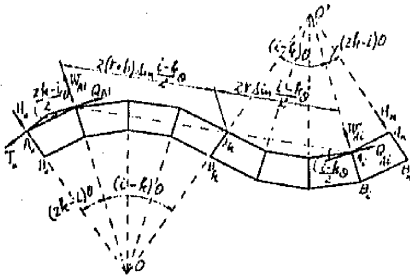
$$= \sum_{i=0}^n (P_{Ai} + P_{Mi} + P_{Ci} + P_{Di}) \dots\dots\dots(40)$$

以上4個の式(37)~(40)を連立方程式として解けば4個の鉛直反力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \mu \{-r[\beta] + r[\gamma] + [\delta]\} \\ B_0 &= \mu \{(r+b)[\beta] - r[\gamma] - [\delta]\} \\ A_n &= \mu \{(r+b)(2r+b)\sin k\theta[\alpha] \\ &\quad - [\delta] - (r+b)[\beta] + (r+b)[\gamma]\} \\ B_n &= \mu \{-r(2r+b)\sin k\theta[\alpha] \\ &\quad + [\delta] + r[\beta] - (r+b)[\gamma]\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

$$\mu = \frac{1}{b(2r+b)\sin k\theta}$$

式(41)において、 $P=1$ 、 $Q=1$ 、 $W=1$ とおけば、それぞれに対する鉛直反力の影響線が得られる。



第2図 平面図における幾何学的関係

7. 水平反力

第2図において接線 T_0 方向の力の総和を0とおけば

$$T_0 = \sum_{i=0}^k \left(\begin{aligned} &(Q_{Ai} + Q_{Mi} + Q_{Ci} + Q_{Di})\cos i\theta \\ &+ (W_{Ai} + W_{Mi} + W_{Ci} + W_{Di})\sin i\theta \end{aligned} \right)$$

$$+ \sum_{k+1}^n \left(\begin{aligned} &(Q_{Ai} + Q_{Mi} + Q_{Ci} + Q_{Di})\cos(n-i)\theta \\ &+ (W_{Ai} + W_{Mi} + W_{Ci} + W_{Di})\sin(n-i)\theta \end{aligned} \right)$$

.....(42)

次に A_0 を通る鉛直線の周りのモーメントの総和を0とおいて整理すれば

$$[(2r+b)\sin k\theta] H_n$$

$$= \sum_{i=0}^k \left(\begin{aligned} &-(Q_{Ai} + Q_{Di})(r+b)(1 - \cos i\theta) \\ &-(Q_{Mi} + Q_{Ci})\{r - (r+b)\cos i\theta\} \\ &+ (W_{Ai} + W_{Mi} + W_{Ci} + W_{Di})(r+b)\sin i\theta \end{aligned} \right)$$

$$+ \sum_{k+1}^n \left(\begin{aligned} &(Q_{Ai} + Q_{Mi})\{r - (2r+b)\cos(i-k)\theta \\ &\quad + (r+b)\cos(n-i)\theta\} \\ &+ (Q_{Mi} + Q_{Ci})\{- (2r+b)\cos(i-k)\theta \\ &\quad + (r+b) + (r+b)\cos(n-i)\theta\} \\ &+ (W_{Ai} + W_{Mi} + W_{Ci} + W_{Di})\{(2r+b) \\ &\quad \times \sin(i-k)\theta + (r+b)\sin(n-i)\theta\} \end{aligned} \right)$$

.....(43)

さらに、第2図において O' を通る鉛直線の周りのモーメントの総和を0とおき、式(42)を代入すれば

$$= \sum_{i=0}^k \left(\begin{aligned} &(Q_{Ai} + Q_{Di})\{(r+b)(1 - \cos i\theta) \\ &\quad - (2r+b)\sin k\theta \sin i\theta\} \\ &+ (Q_{Mi} + Q_{Ci})\{r - (r+b)\cos i\theta \\ &\quad - (2r+b)\sin k\theta \sin i\theta\} \\ &- (W_{Ai} + W_{Mi} + W_{Ci} + W_{Di})\{(r+b)\sin i\theta \\ &\quad - (2r+b)\sin k\theta \cos i\theta\} \end{aligned} \right)$$

$$- \sum_{k+1}^n \left(\begin{aligned} &(Q_{Ai} + Q_{Di})\{r + \{(r+b) \\ &\quad - (2r+b)\cos k\theta\}\cos(n-i)\theta\} \\ &+ (Q_{Mi} + Q_{Ci})\{(r+b) + \{(r+b) \\ &\quad - (2r+b)\cos k\theta\}\cos(n-i)\theta\} \\ &+ (W_{Ai} + W_{Mi} + W_{Ci} + W_{Di})\{\{(r+b) \\ &\quad - (2r+b)\cos k\theta\}\sin(n-i)\theta\} \end{aligned} \right)$$

.....(44)

8. 支点反力の影響線

第1図のような格間数 n 個のS字曲線形立体トラス橋の格点 i に、 $P=1$ 、 $Q=1$ 、または $W=1$ だけが作用したときの支点反力は、式(41)~(44)より次の式で表わされ、 i を $0 \sim n$ の間で変化させると反力の影響線が得られる。

それぞれの式において

$$b=4m \quad r=13m \quad h=5m$$

$$\theta=9^\circ 13' 03'' \quad n=8$$

に対する影響線のグラフを画けば、第3図~第10図のようになる。

(1) 鉛直荷重 $P_{Ai}=1$ または $P_{Di}=1$ が作用した場合

(a) $0 \leq i \leq k$ の場合

$$A_0 = \mu \{r(r+b)(i \sin \theta + \sin i\theta) + (r+b)(2r+b)\sin(k-i)\theta - r(2r+b)\sin k\theta\}$$

$$B_0 = -\mu \{r(r+b)i \sin \theta + (r+b)^2 \sin i\theta + (r+b)(2r+b)\sin(k-i)\theta - (r+b)(2r+b)\sin k\theta\}$$

$$A_n = \mu \{(r+b)^2 \sin i\theta - r(r+b)i \sin \theta\}$$

$$B_n = \mu \{r(r+b)(i \sin \theta - \sin i\theta)\}$$

$$H_n = T_0 = H_0 = 0$$

(b) $k+1 \leq i \leq n$ の場合

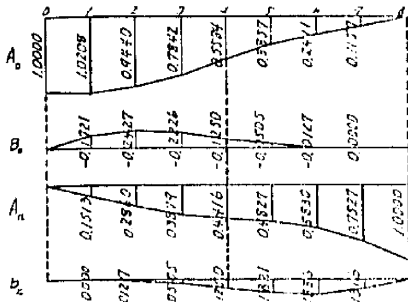
$$A_0 = \mu r \{(r+b)(n-i)\sin \theta - r \sin(n-i)\theta\}$$

$$B_0 = -\mu r (r+b) \{(n-i)\sin \theta - \sin(n-i)\theta\}$$

$$A_n = \mu \{(r+b)(2r+b)\sin k\theta - r(r+b)(n-i)\sin \theta - r(r+b)\sin(n-i)\theta - r(2r+b)\sin(i-k)\theta\}$$

$$B_n = \mu r \{ (r+b)(n-i) \sin \theta + r \sin(n-i)\theta + (2r+b) \sin(i-k)\theta - (2r+b) \sin k\theta \}$$

$$H_n = H_0 = T_0 = 0$$



第3図 $P_{At}=1$ または $P_{Dt}=1$ による鉛直反力影響線

(2) 鉛直荷重 $P_{mi}=1$ または $P_{ci}=1$ が作用した場合

(a) $0 \leq i \leq k$ の場合

$$A_0 = \mu r \{ (r+b)i \sin \theta + r \sin i\theta + (2r+b) \sin(k-i)\theta - (2r+b) \sin k\theta \}$$

$$B_0 = \mu \{ (r+b)(2r+b) \sin k\theta - r(r+b)(i \sin \theta + \sin i\theta) - r(2r+b) \sin(k-i)\theta \}$$

$$A_n = -\mu r(r+b)(i \sin \theta - \sin i\theta)$$

$$B_n = \mu r \{ (r+b)i \sin \theta - r \sin i\theta \}$$

$$H_n = H_0 = T_0 = 0$$

(b) $k+1 \leq i \leq n$ の場合

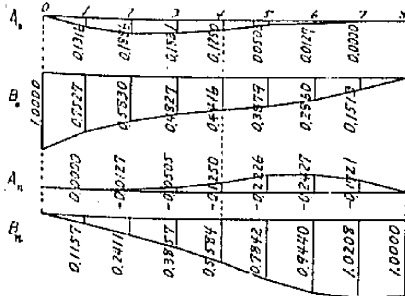
$$A_0 = \mu r(r+b) \{ (n-i) \sin \theta - \sin(n-i)\theta \}$$

$$B_0 = \mu(r+b) \{ (r+b) \sin(n-i)\theta - r(n-i) \sin \theta \}$$

$$A_n = -\mu(r+b) \{ r(n-i) \sin \theta + (r+b) \sin(n-i)\theta + (2r+b) \sin(i-k)\theta - (2r+b) \sin k\theta \}$$

$$B_n = \mu \{ r(r+b)(n-i) \sin \theta + r(r+b) \sin(n-i)\theta + (r+b)(2r+b) \sin(i-k)\theta - r(2r+b) \sin k\theta \}$$

$$H_n = H_0 = T_0 = 0$$



第4図 $P_{mi}=1$ または $P_{ci}=1$ による鉛直反力影響線

(3) 接線荷重 $Q_{ci}=1$ が作用した場合

(a) $0 \leq i \leq k$ の場合

$$A_0 = \mu h_i \{ (r+b) + r \cos i\theta - (2r+b) \cos(k-i)\theta \}$$

$$B_0 = -\mu h_i \{ (r+b)(1 + \cos i\theta) - (2r+b) \cos(k-i)\theta \}$$

$$A_n = -\mu h_i (r+b)(1 - \cos i\theta)$$

$$B_n = \mu h_i \{ (r+b) - r \cos i\theta \}$$

$$H_n = \mu b \{ (r+b) \cos i\theta - r \}$$

$$H_0 = -\mu b \{ (r+b) \cos i\theta - r + (2r+b) \sin k\theta \sin i\theta \}$$

$$T_0 = \cos i\theta$$

(b) $k+1 \leq i \leq n$ の場合

$$A_0 = -\mu h_i r (1 - \cos(n-i)\theta)$$

$$B_0 = -\mu h_i \{ (r+b) \cos(n-i)\theta - r \}$$

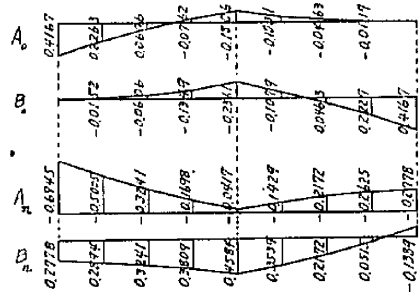
$$A_n = \mu h_i \{ r + (r+b) \cos(n-i)\theta - (2r+b) \cos(i-k)\theta \}$$

$$B_n = -\mu h_i \{ r + r \cos(n-i)\theta - (2r+b) \cos(i-k)\theta \}$$

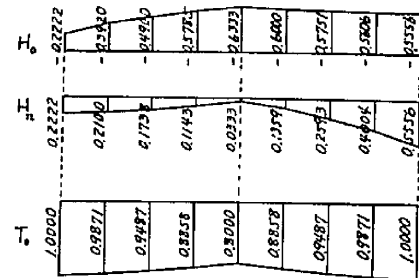
$$H_n = \mu b \{ r + b + (r+b) \cos(n-i)\theta - (2r+b) \cos(i-k)\theta \}$$

$$H_0 = -\mu b \{ (r+b) \{ 1 + \cos(n-i)\theta \} - (2r+b) \cos k\theta \cos(n-i)\theta \}$$

$$T_0 = \cos(n-i)\theta$$



第5図 $Q_{ci}=1$ による鉛直反力影響線



第6図 $Q_{bi}=1$ または $Q_{ci}=1$ による水平反力影響線

(4) 接線荷重 $Q_{nl}=1$ が作用した場合

$$A_0=B_0=A_n=B_n=0$$

H_n, H_0, T_0 は接線荷重 $Q_{cl}=1$ が作用した場合と同じである。

(5) 接線荷重 $Q_{nl}=1$ が作用した場合

(a) $0 \leq i \leq k$ の場合

$$A_0 = -\mu h_i \{(2r+b)\cos(k-i)\theta - r(1+\cos i\theta)\}$$

$$B_0 = -\mu h_i \{r+(r+b)\cos i\theta - (2r+b)\cos(k-i)\theta\}$$

$$A_n = \mu h_i \{(r+b)\cos i\theta - r\}$$

$$B_n = \mu h_i r(1-\cos i\theta)$$

$$H_n = -\mu b(r+b)(1-\cos i\theta)$$

$$H_0 = \mu b \{(r+b)(1-\cos i\theta) - (2r+b)\sin k\theta \sin i\theta\}$$

$$T_0 = \cos i\theta$$

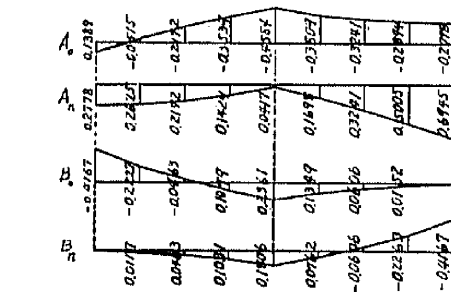
(b) $k+1 \leq i \leq n$ の場合

$$A_0 = -\mu h_i \{(r+b) - r \cos(n-i)\theta\}$$

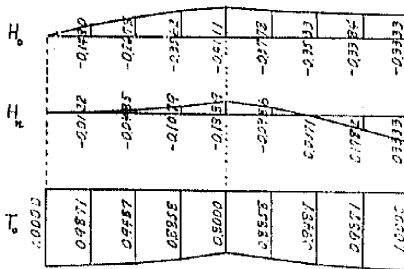
$$B_0 = \mu h_i (r+b) \{1 - \cos(n-i)\theta\}$$

$$A_n = \mu h_i \{r+b+(r+b)\cos(n-i)\theta - (2r+b)\cos(i-k)\theta\}$$

$$B_n = -\mu h_i \{r+b+r \cos(n-i)\theta - (2r+b)\cos(i-k)\theta\}$$



第7図 $Q_{nl}=1$ による鉛直反力影響線



第8図 $Q_{nl}=1$ または $Q_{cl}=1$ による水平反力影響線

$$H_n = -\mu b \{(2r+b)\cos(i-k)\theta - r - (r+b)\cos(n-i)\theta\}$$

$$H_0 = -\mu b \{r+(r+b)\cos(n-i)\theta - (2r+b)\cos k\theta \cos(n-i)\theta\}$$

$$T_0 = \cos(n-i)\theta$$

(6) 接線荷重 $Q_{cl}=1$ が作用した場合

$A_0=B_0=A_n=B_n=0$ で、 H_n, H_0, T_0 は、接線荷重 $Q_{nl}=1$ が作用した場合と同じである。

(7) 遠心荷重 $W_{cl}=1$ または $W_{nl}=1$ が作用した場合

(a) $0 \leq i \leq k$ の場合

$$A_0 = \mu h_i \{r \sin i\theta + (2r+b)\sin(k-i)\theta\}$$

$$B_0 = -\mu h_i \{(r+b)\sin i\theta + (2r+b)\sin(k-i)\theta\}$$

$$A_n = \mu h_i (r+b)\sin i\theta$$

$$B_n = -\mu h_i r \sin i\theta$$

$$H_n = \mu b(r+b)\sin i\theta, T_0 = \sin i\theta$$

$$H_0 = \mu b \{(2r+b)\sin k\theta \cos i\theta - (r+b)\sin i\theta\}$$

(b) $k+1 \leq i \leq n$ の場合

$$A_0 = \mu h_i r \sin(n-i)\theta$$

$$B_0 = -\mu h_i (r+b)\sin(n-i)\theta$$

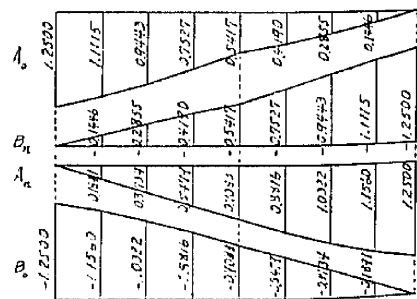
$$A_n = \mu h_i \{(r+b)\sin(n-i)\theta + (2r+b)\sin(i-k)\theta\}$$

$$B_n = -\mu h_i \{r \sin(n-i)\theta + (2r+b)\sin(i-k)\theta\}$$

$$H_n = \mu b \{(2r+b)\sin(i-k)\theta + (r+b)\sin(n-i)\theta\}$$

$$H_0 = \mu b \{(2r+b)\cos k\theta \sin(n-i)\theta - (r+b)\sin(n-i)\theta\}$$

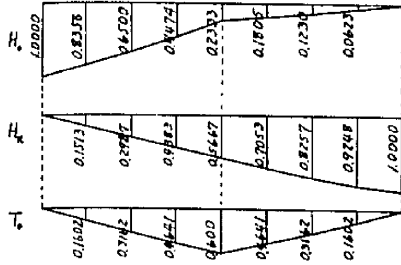
$$T_0 = \sin(n-i)\theta$$



第9図 $W_{cl}=1$ または $W_{nl}=1$ による鉛直反力影響線

(8) 遠心荷重 $W_{cl}=1$ または $W_{nl}=1$ が作用した場合

$A_0=B_0=A_n=B_n=0$ で、 H_n, H_0, T_0 は、遠心荷重 $W_{cl}=1$ または $W_{nl}=1$ が作用した場合と同じである。



第10図 $W_{A1}=1, W_{B1}=1, W_{C1}=1$ または $W_{D1}=1$ による水平反力影響線

9. 模型実験値と理論値の比較

- 内側格点半径 $r=130$ cm
- 巾員 $b=40$ cm
- 格間数 $n=4$
- 格点間の中心角 $\theta=18^\circ 26' 06''$
- トラスの高さ $h_i=50$ cm
- 外側上げん長 $u_i^0=54.5$ cm $=\lambda^0$
- 内側上げん長 $u_i=41.6$ cm $=\lambda$
- 外側斜材長 $d_i^0=71.9$ cm
- 内側斜材長 $d_i=62.9$ cm

以上のようなS字曲線形立体トラス橋の模型に対して鉛直移動荷重を作用させ、すべての支点反力と部材応力の影響線を求めたが、その実験値と理論計算値とを比較した結果の1例を示せば第1表のようになる。

第 1 表

| 載荷点 | 反力 A_0 | | 反力 B_0 | | 反力 A_4 | | 反力 B_4 | | $A_0+B_0+A_4+B_4$ | |
|-------|----------|------|----------|-------|----------|------|----------|------|-------------------|------|
| | 理論値 | 実験値 | 理論値 | 実験値 | 理論値 | 実験値 | 理論値 | 実験値 | 理論値 | 実験値 |
| A_0 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |
| A_1 | 0.93 | 0.92 | -0.23 | -0.25 | 0.30 | 0.31 | 0.00 | 0.01 | 1.00 | 0.99 |
| A_2 | 0.53 | 0.52 | -0.10 | -0.13 | 0.47 | 0.50 | 0.10 | 0.11 | 1.00 | 1.00 |
| A_3 | 0.23 | 0.23 | 0.00 | -0.02 | 0.60 | 0.63 | 0.17 | 0.15 | 1.00 | 0.99 |
| A_4 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 | 0.00 | 0.00 | 1.00 | 1.00 |

(昭和41年 8 月31日受付)

この表でわかるように、個々の反力については、外力1に対し最大3%程度の誤差があり、反力の総和については、1%以下の誤差に止まった。なお、部材応力については、外力1に対し、最大30%台の誤差を生じたものもあったが、これらの誤差は、格点の剛結によるもので、トラスの2次応力と考えられる。

10. あとがき

ここに解析したS字曲線形立体トラス橋は、背向曲線の間に緩和部分がないので、そのまま道路橋や鉄道橋に利用することはできないが、実用的な解析へ一歩近づけることができたことは確かである。さらに半径の異なる背向曲線より成るものや、背向曲線の間に直線部分を入れたものなどについて解析を進めることが必要である。

本研究は昭和40年度文部省科学研究費による研究の一部であり、なおこの計算ならびに実験については松田昌憲君、および金子武久君に労苦を煩わした。ここに附記して感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 近藤：山梨大学工学部研究報告第13号昭和37
- 2) 福田武雄：差分法
- 3) 林 桂一：応用関数方程式