

開水路水面形の簡易計算法

佐々木 大 策
萩 原 能 男

(受理月日 昭和39年 8月31日)

A Simple and Convenient Method of Calculation of the Water Surface Profile in an Open Channel

Daisaku Sasaki Yoshio Ogihara

Abstract

Authors will introduce here the simple method of calculation of water surface profile when the short obstructural structure is installed in the open channel. Generally if any structure is placed in the channel, the control section appears here in many cases. This section is the division point between the supercritical flow and subcritical flow. So the section has a critical depth. It is possible to determine this value. In such a case Dr. Y. Iwasa developed the method of water surface profile calculation.

But if either supercritical flow or subcritical flow occurred continuously upward and downward the structure, we explain the simple method of calculation of water surface profile of this part and readers will understand the conditional equation of such cases.

1 緒 言

最近は各方面で水不足を生じて社会的な問題となったり、又反面洪水による災害も毎年各地で問題を起している。そのために、河川管理や、水路の設計にも各種の努力がはらわれている。しかしながらこれ等の計算には非常に多くの手数を必要としているし又模型実験も必要とされているのであるが、大略の計画を作成する折には、これ等の精密な計算や実験を行うのは、時間的にも経済的にも不経済であるので、簡易計算があれば非常に便利である。

筆者等がここに紹介するのは水路の中に比較的短い構造物を作成した場合に水面形がどのように変化するかを簡単に求めようとする方法である。一般に水路中に構造物を建造すると、この場所において流れは限界流となって、常流から射流に、あるいは射流から常流に流れが変化することになる場合が多い。このような流れに対しては水深が限界水深であるためにその値を求めることは可能であるし、流れの水面形も色々と研究されている⁽¹⁾。しかしながら、不連続の構造物を常流で流し通す場合とか、射流で流し通す場合には境界

条件を他に求めてこの部分とその前後とを一貫して計算する必要がある。この場合の簡易計算法を説明しよう。

2 基礎方程式

開水路の基礎方程式については筆者等が前に報告したとおり次のようにあらわすことができる⁽²⁾。

まず使用する記号文字を次のようにする(図-1参照)。

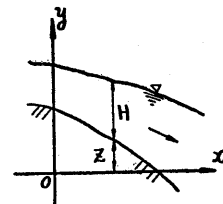


図-1 座 標 系

U = 平均流速

H = 水 深

A = 流水断面積

t = 時間

x = 流心にそった水平距離

z = 河床高

g = 重力の加速度

η = 運動量補正係数

α = エネルギー補正係数

n = Manning の粗度係数

運動方程式、連続方程式は次のようになる。

$$\eta \frac{\partial U}{\partial t} + \alpha U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{n^2 U^2}{R^{4/3}} - g \frac{\partial}{\partial x} (H+z) \quad (1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial UA}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

ここで、各水理量の変動は小さいものとして、定常量と変動量と分けて式(1)、(2)を線形化することにする。

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + u \\ R &= R_0 + r \\ H &= H_0 + h \\ A &= A_0 + a \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに U_0, R_0, H_0, A_0 はそれぞれ U, R, H, A の定常量、 u, r, h, a はそれぞれ U, R, H, A の変動量である。又水路を長方形断面であるとし、水路巾を B 、その定常量を B_0 、変動量を b として、次のような無次元量を用いることにする。

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{u}{U_0}, & \xi &= \frac{h}{H_0}, & m &= \frac{b}{B_0}, \\ \zeta &= \frac{z}{H_0}, & l &= \frac{x}{H_0}, & \theta &= \frac{t}{T}, \\ \gamma &= \frac{U_0 T}{H_0}, & \mu &= \frac{n^2 H_0}{R_0^{4/3} g}, \\ \delta &= \frac{R_0}{B_0} = \frac{H_0}{B_0 + 2H_0}, \\ \beta &= \frac{R_0}{H_0} = \frac{B_0}{B_0 + 2H_0}, \\ f &= \frac{U_0}{\sqrt{gH_0}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(1)(2)は次のようになる。

$$\frac{\eta}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \alpha \frac{\partial v}{\partial l} = -\mu - 2\mu v + \frac{4}{3} \mu \beta \xi + \frac{8}{3} \mu \delta m - \frac{1}{f^2} \frac{\partial \xi}{\partial l} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial \zeta}{\partial l} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial}{\partial l} (\xi + m + v) = 0 \quad (6)$$

さて、流れが定常の場合には時間に関する項が一定になるので上式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \alpha \frac{dv}{dl} &= -\mu - 2\mu v + \frac{4}{3} \mu \beta \xi + \frac{8}{3} \mu \delta m \\ &\quad - \frac{1}{f^2} \frac{d\xi}{dl} - \frac{1}{f^2} \frac{d\zeta}{dl} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\frac{d}{dl} (\xi + m + v) = 0 \quad (8)$$

ζ は水路床の関数形、 m は水路巾の関数形である。これ等の関数形は特に定めず一般的なものであるとする。又境界条件としては、 $l=0$ (原点) における水理量を基準にとることにして、次のように定める。

$$l=0 \text{ にて } \left. \begin{aligned} v &= 0 \\ \xi &= 0 \\ \zeta &= 0 \\ m &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

そこで式(7)(8)を l に関してラプラス変換をとると。

$$\begin{aligned} \alpha s \bar{v} &= -\frac{\mu}{s} - 2\mu \bar{v} + \frac{4}{3} \mu \beta \bar{\xi} + \frac{8}{3} \mu \delta \bar{m} \\ &\quad - \frac{1}{f^2} s \bar{\xi} - \frac{1}{f^2} s \bar{\zeta} \\ \bar{\xi} + \bar{m} + \bar{v} &= 0 \end{aligned}$$

したがって \bar{v} を消去して $\bar{\xi}$ について整理すると次のようになる。

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\alpha - \frac{1}{f^2} \right) s + 2\mu \left(1 + \frac{2}{3} \beta \right) \right\} \bar{\xi} \\ &= \frac{\mu}{s} - \left\{ \alpha s + 2\mu \left(1 + \frac{4}{3} \delta \right) \right\} \bar{m} + \frac{1}{f^2} s \bar{\zeta} \end{aligned}$$

$$\text{今 } \left. \begin{aligned} F &= \alpha - \frac{1}{f^2} \\ K &= 2 \left(1 + \frac{2}{3} \beta \right) \\ N &= 2 \left(1 + \frac{4}{3} \delta \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\mu}{F s \left(s + \frac{K}{F} \mu \right)} - \frac{\alpha s + N\mu}{F \left(s + \frac{K}{F} \mu \right)} \bar{m} \\ &\quad + \frac{s}{F \left(s + \frac{K}{F} \mu \right) f^2} \bar{\zeta} \end{aligned}$$

逆変換をとると

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\mu}{F} \int_0^l e^{-\frac{K}{F} \mu l} dl \\ &\quad - \frac{\alpha}{F} \int_0^l e^{-\frac{K}{F} \mu (l-\tau)} \frac{dm}{d\tau} d\tau \\ &\quad - \frac{N}{F} \mu \int_0^l e^{-\frac{K}{F} \mu (l-\tau)} m d\tau \\ &\quad + \frac{1}{F f^2} \int_0^l e^{-\frac{K}{F} \mu (l-\tau)} \frac{d\zeta}{d\tau} d\tau \end{aligned}$$

構造物の長さは短く、その近くの粗度による水面形の変化を無視すると

$$\xi = -\frac{1}{2(1+\frac{2}{3}\beta)} \left(e^{-\frac{2(1+\frac{2}{3}\beta)}{\alpha - \frac{1}{f^2}} \mu l} - 1 \right) - \frac{\alpha f^2}{\alpha f^2 - 1} m + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} \zeta \quad (11)$$

更に、水面形計算区間を構造物の近辺のみにすると

$$\xi = \frac{f^2 \mu}{\alpha f^2 - 1} l - \frac{\alpha f^2}{\alpha f^2 - 1} m + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} \zeta \quad (12)$$

又水深について書き改めると

$$h = \frac{f^2 \mu}{\alpha f^2 - 1} x - \frac{\alpha f^2}{\alpha f^2 - 1} \frac{H_0}{B_0} b + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z \quad (13)$$

$$H = H_0 + h = H_0 + \frac{f^2 \mu}{\alpha f^2 - 1} x - \frac{\alpha f^2}{\alpha f^2 - 1} \frac{H_0}{B_0} b + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z \quad (14)$$

これらの式を用いて計算することになる。この計算式は計算の途中で高次の微小項を省略しているので非常に簡単な式であるが、それだけ精度が落ちるので、この点について実験によって確かめることにした。

又水路床および水路壁を変化せしめる構造物の形状は任意で良いが、構造物によって水流がはく離したりして平均流的な取扱いが出来ない場合にはこの式を使うことはできない⁽³⁾。

3 実験設備

実験は前節で説明した簡易式を確かめる目的で行ない、水路床に構造物のある場合と、水路壁に構造物のある場合の2種類に分けて実験した。水路床に構造物を作成した水路は、水路巾50cm、長さ7.0m、壁高40cmのガラス張り水路であって、勾配は連続的に変えることができる。又流量調節は高水槽とバルブにより、流量の測定は直角三角堰によった。水路床に取付

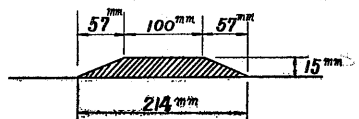


図-2 水路床構造物(断面)

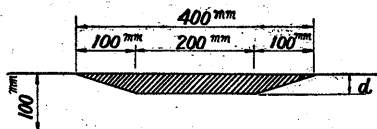


図-3 水路壁構造物(平面)
d=6. 9. 15. 20mm

けた構造物の寸法は図-2のとおりである。

又水路壁に構造物を取付けた水路の寸法は、水路巾が10cm、長さ2m40cm、壁高40cm、勾配1/100のガラス張り水路である。流量調節と測定は高水槽、バルブ、直角三角堰によった。又水路壁に取付けた構造物の寸法は、図-3のとおりであって、これを水路壁の片面のみに取付けた。

4 実験方法

水路床又は水路壁に図-2、3の構造物を取付けて、流量を段階的に変化させてその時の水面形をポイントゲージによって測定した。多くの水面形は図-4のように構造物のところに支配断面を生じて常流から射流に流れが変化するのであるが、構造物の小さい場合とか水深が他の個所で支配されている場合にはこの構造物のところが支配断面となることがなく常流又は射流の一種類で図-5のように流下することになる。この図-5のような流れに対する計算をするのが本研究の目的であって、この計算式(12)(13)(14)を図-4の流れに用いることはできない。

したがって実験の方法も上流又は下流にgateを設置して流れをControlして図-5の流れを生じせしめて水面形を測定した。その測定値と計算式を比較することになる。

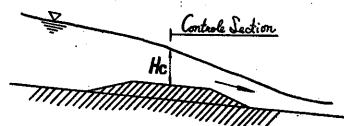


図-4 支配断面を生ずる流れ

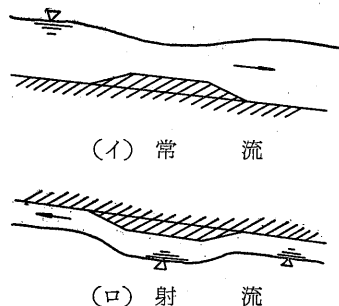


図-5 支配断面を生じない流れ

5 実験結果

(1) 水路床に構造物を設置した場合の水面形
水路床の勾配は1/400と1/100の2種類に分けて実

験した。この水路の粗度係数は勾配 $1/400$ の時 $n = 0.013$ 、 $1/100$ のとき 0.010 であった。又水面形の測定例は図-6 に示すとおりである。図-6-1 に示す水面形は構造物の上で限界水深を横切るために、一部分射流ができて計算値と一致することができない。図-6-2 のように構造物の上で限界水深をとらない場合には計算値と実験値とが良く一致することになる。図-6-3 は射流の場合であるが、この場合には計算値と実験値が合はない。射流の場合にはこのような傾向が強い。

次に式 (13) (14) による水面形の計算式を我々の行った実験値 (66個) と比較して計算式を修正することにする。図-7 に示すように、構造物の中心における計算値と実測値との差を E_D 、下流において E_M としてこれらの値の計算水深に対する割合を調べて図

図-6 水面形測定例

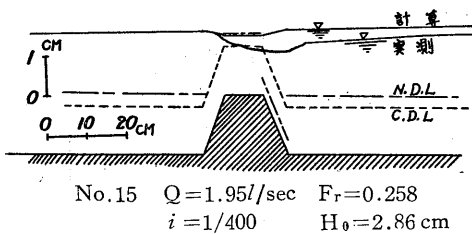


図-6-1

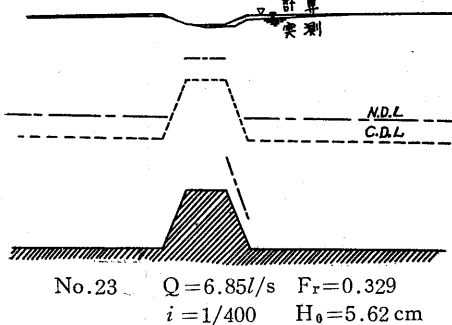


図-6-2

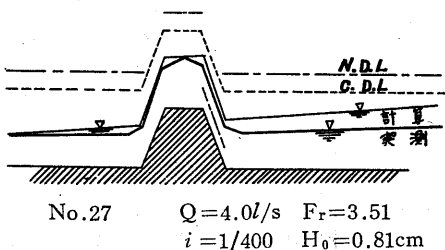


図-6-3

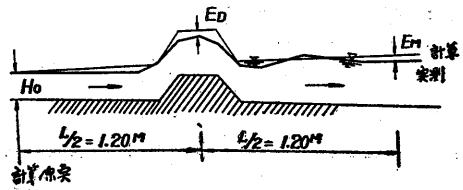


図-7 実測値と計算値との差

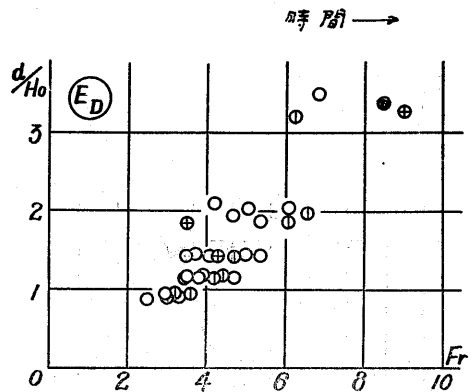
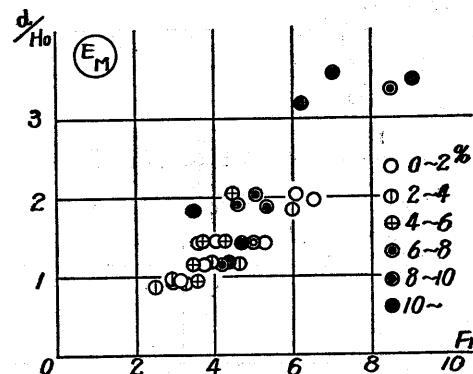

 図-8 構造物の上における計算水深と実測水深の誤差
(d : 構造物の高さ)


図-9 下流点における計算水深と実測水深の誤差

示すると射流の場合 図-8 (E_D)、図-9 (E_M) のようになる。又常流の場合には誤差は非常に小さくて水深の 5% 以下に入るので計算式を修正する必要はない。

(2) 実験結果による計算式の修正

常流については修正の必要はない (誤差 5% 以内) ので式 (13) (14) がそのまま使える。一方射流については相当誤差が大きい場合もあるのでその誤差の生ずる法則を発見して修正式を作る必要がある。

式 (14) において $z = -ix + z_0$ (z_0 : 構造物の関

数、 i ：水路床勾配)とおくと

$$H = H_0 + \frac{-i + f^2 \mu}{\alpha f^2 - 1} x + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z_0 \quad (15)$$

ただし水路巾は変化しないものとする。

式(15)の右辺の第一項は、計算原点の水深で定常量である。又第二項は下流誤差 E_M に関する重要な項であるので、この項を修正して E_M を最小にするようにすればよい。又第三項は構造物の中心の誤差 E_D に関係の深いものである。

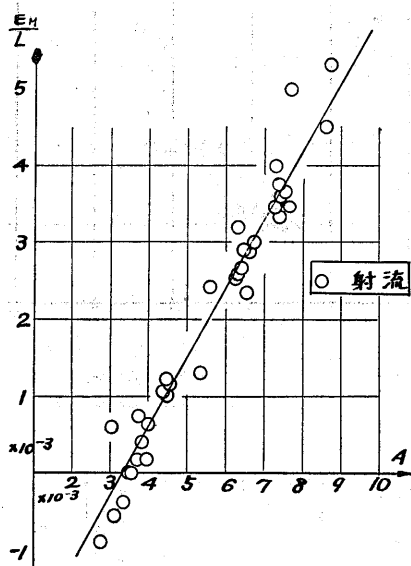


図-10 計算式の修正図

そこで横軸に $(-i + f^2 \mu)/(\alpha f^2 - 1) = A$

縦軸に E_M/L

をとって E_M と、 A との関係を最小自乗法により求めることにする。 L を計算原点より E_M の点までの距離とする。 $A-E_M/L$ のグラフを図-10に示す。その結果

$$E_M/L = 0.909 A - 3.08 \times 10^{-3} \quad (16)$$

なる結果が得られて $E_M = (\text{計算値} - \text{実測値})$ を考えに入れて式(16)による E_M を式(15)より引いて修正計算式が次のように求まる。

$$H = H_0 + (0.091 \frac{f^2 \mu - i}{\alpha f^2 - 1} + 0.0031) x - \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z_0 \quad (17)$$

この修正をほどこすと、 E_D も同時に修正されて、式(17)の z_0 の項を修正する必要性がなくなる。 (E_D) の誤差は1.5%以内になる。図-11参照

従って水路床に構造物の存在する場合の水面形の計算式は

$$\left. \begin{array}{l} \text{常流} \quad H = H_0 + \frac{f^2 \mu - i}{\alpha f^2 - 1} x + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z_0 \\ \text{射流} \quad H = H_0 + (0.091 \frac{f^2 \mu - i}{\alpha f^2 - 1} + 0.0031) x + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z_0 \end{array} \right\} \quad (18)$$

によって計算すればよい。

(3) 水路巾の変る場合の水面形

水路巾の変る構造物を設置した場合の水面形について

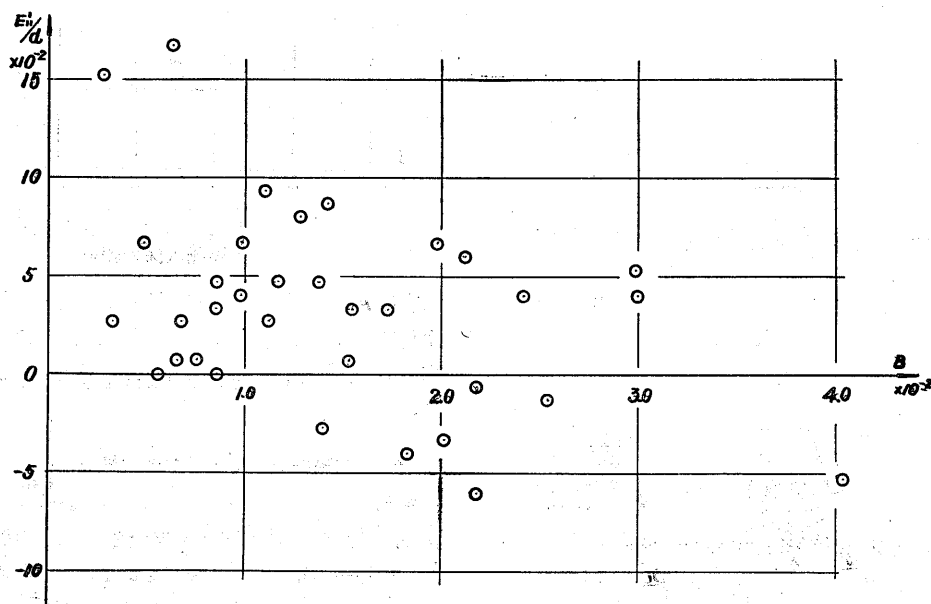


図-11 構造物上の計算水深の誤差 $(B = \frac{1}{\alpha f^2 - 1})$

ては一部の実験結果を土木学会年次講演会(昭和39)に発表してあるので参考にされたい。

6 数値計算例

ここに示した水面形の計算式は次の諸点に注意しなければならない。

- i) 水路構造物の高さは水深に比較して小さく水深の $1/2$ 以下であること。
- ii) 流れがはく離して渦などの生じないことが大切で構造物の形もなるべくこの条件を満足するようでなければならない。
- iii) 構造物の近辺で限界流を生ずる場合には計算することができない。

(1) 背水計算例の1

図-12に示す例を計算しよう。

流量	$Q=20\text{ m}^3/\text{sec}$
水路巾	$B=10\text{ m}$
下流水深	5 m
水路勾配	$i=1/100$
粗度係数	$n=0.025$
構造物	図-12のとおり

と仮定すると

$$\begin{aligned}\text{限界水深 } H_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^3}} = \sqrt[3]{\frac{20^2}{9.8 \times 10^3}} \\ &= \sqrt[3]{0.408} = 0.74\text{ m}\end{aligned}$$

流れは当然常流となるので式(18)の常流の式を用いる。水深5mのダム上流地点より上流100mの地点において床勾配1/100を考えると水深は約4mと思われる。

従って $H_0=4.00\text{ m}$ とすると

$$R_0 = \frac{BH_0}{B+2H_0} = \frac{10 \times 4}{10+2 \times 4} = \frac{40}{18} = 2.22\text{ m}$$

$$U_0 = Q/BH_0 = 20/10 \times 4 = 0.50\text{ m/sec}$$

$$f = \frac{U_0}{\sqrt{gH_0}} = \frac{0.5}{\sqrt{9.8 \times 4}} = \frac{0.5}{\sqrt{39.2}} = 0.080$$

$$\mu = \frac{n^2 H_0}{R_0^{4/3} g} = \frac{0.025^2 \times 4}{2.22^{4/3} \times 9.8} = 0.00845$$

エネルギー補正係数 $\alpha=1.1$ とすると

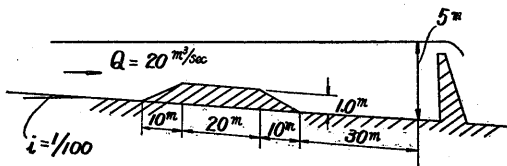


図-12 計算例の1(水路巾10M)

$$\alpha f^2 - 1 = 1.1 \times 0.080^2 - 1 = -0.9929$$

$$\frac{1}{\alpha f^2 - 1} = -\frac{1}{0.9929} = -1.007$$

$$f^2 \mu - i = 0.08^2 \times 0.00845 - 0.01 = -0.009946$$

$$\frac{f^2 \mu - i}{\alpha f^2 - 1} = \frac{-0.009946}{-0.9929} = 0.0100$$

従って水面計算式は

$$H = H_0 + 0.0100 x - 1.007 z_0$$

$H_0=4.00\text{ m}$ と仮定したので、 x の原点はダム地点より上流100mのところとなる。ここを原点にとると

$$H = 4.00 + \frac{1}{100} x - 1.007 z_0$$

となって、水面はほぼ水平であるが、構造物の上で構造物の高さの0.7%水面が下る(約7mm)

(2) 計算例の2

図-13に示す例を計算しよう。

流量	$Q=10.0\text{ m}^3/\text{sec}$
水路巾	$B=10\text{ m}$
上流水深	$H_0=0.1\text{ m}$
水路勾配	$1/100$
粗度係数	$n=0.020$
構造物	図-13の通り

と仮定すると、

$$\begin{aligned}\text{限界水深 } H_c &= \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gB^3}} = \sqrt[3]{\frac{10.0^2}{9.8 \times 10^3}} \\ &= \sqrt[3]{0.102} = 0.467\text{ m}\end{aligned}$$

流れは射流となると考えられるので式(18)の射流の式を用いる。

$$H_0 = 0.10\text{ m}$$

$$R_0 = H_0 B_0 / (B_0 + 2H_0)$$

$$= 0.10 \times 10.0 / (10.0 + 2 \times 0.10) = 0.10\text{ m}$$

$$U_0 = Q/BH_0 = 10/(10 \times 0.10)$$

$$= 10\text{ m/sec}$$

$$f = \frac{U_0}{\sqrt{gH_0}} = 10/\sqrt{9.8 \times 0.1} = 10/0.99 = 10.1$$

$$\mu = \frac{n^2 H_0}{R_0^{4/3} g} = n^2 g / H_0^{1/3} = \frac{0.020^2 \times 9.8}{0.10^{1/3}}$$

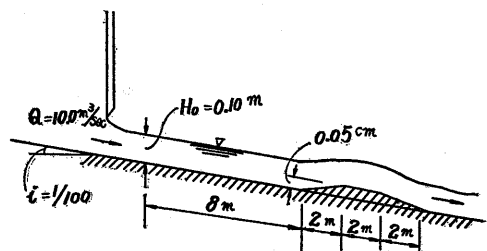


図-13 計算例の2(水路巾10m)

$$=0.00846$$

$\alpha=1.1$ とすると

$$\alpha f^2 - 1 = 1.1 \times 10.1^2 - 1 = 111.2$$

$$\frac{1}{\alpha f^2 - 1} = \frac{1}{111.2} = 0.00899$$

$$f^2 \mu - i = 10.1^2 \times 0.00846 - 0.01 = 0.853$$

$$\frac{f^2 \mu - i}{\alpha f^2 - 1} = \frac{0.853}{111.2} = 0.00768$$

したがって水面形の計算式は

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \left(0.091 \frac{f^2 \mu - i}{\alpha f^2 - 1} + 0.0031 \right) x \\ &\quad + \frac{1}{\alpha f^2 - 1} z_0 \\ &= 0.10 (0.091 \times 0.00768 + 0.0031) x \\ &\quad + 0.00899 z_0 \\ &\doteq 0.10 + 0.0038 x + 0.009 z_0 \end{aligned}$$

この結果、構造物のために生ずる水深変化は構造物の高さの約 1/100 であって、この場合には無視される。計算結果を図-14に示した。

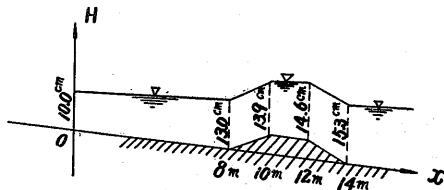


図-14 計算結果 (計算例の2)

7 結 論

筆者等は、水路に不連続の構造物を設置した場合の

水面形の簡易計算法を示し、これを実験によって確かめ、更にその計算方法を計算例によって例示しておいた。

しかしながらこの計算式を用いるときには前にも説明したとおり流れのはく離現象がないこと。構造物が小さくて水面変化が少いこと、流れは常流又は射流のいずれか一種類のみで二つが混合することがないこと等に注意しなければならない。

この式により、流れに影響を与えない構造物の大きさの算定をすることができる。又構造物はどのようなものであっても同一に取扱えるので便利である。現地の各方面の方々のご利用とご批判とをお願いします。

計算、実験にご協力頂いた中込武史氏 (水資源開発公団) と武井由勝氏 (大林組) に謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) 例えば 土木学会論文集 第59号 別冊 (3-1)
岩佐義朗 著 巾の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究
- (2) 山梨大学工学部研究報告 第11号 昭35
佐々木・荻原 著 不定流の一解析法
- (3) 京都大学防災研究所年報 第5号 昭36
芦田和男 著 開水路断面急拡部の水理とその適用に関する研究