

不均等分布定数回路

立 本 二 郎

Nonuniform Transmission Lines

By

Jiro Tatemoto

SYNOPSIS

In this paper, the author explained principally on the fundametal principle of the nonuniform transmission line at the stationary state. Accordingly, the ordinary distributed constant circuit becomes to the special case.

There have been a great number of papcrs on the nonuniform transmission line problems for the past forty years. For the purpose of the practical application on the Waveguides, i. e., the tapered matching section, distributed constant filers, broad band transmission, the basic principle is now inquiring. But, the starting point of these reports has an important mistake, therefore the solutions are obtained in series form or are expressed in terms of Bessel functions and the exact solution has not been obtained for the general nonuniform transmission line. The author modified the basic differential equations and attained to the simple general results in which he adopted a new notations of image parameters.

All of the items in the ordinary distributed constant circuit has been explored generally by the new stand point in which the theory of the image division is the principal conception. It can be applied to the solution of the distributed coupled circuit and extended to the multiterminal image network and the multiterminal, nonuniformly, distributed coupled circuit.

To conform the theory, a simple experiment has been tried.

目次		
内 容 梗 概.....	98	与える場合..... 104
ま え が き.....	98	2.4 送電端電流 I_A と受電端電流 I_B とを 与える場合..... 104
第1章 分布定数回路の基礎方程式		2.5 送電端電圧 V_A と、受電端負荷インピーダ ンス Z_B とを 与える場合..... 105
1.0 概 説.....	99	2.6 送電端電流 I_A と、受電端負荷 インピーダ ンス Z_B とを 与える場合..... 105
1.1 基礎方程式の誘導.....	99	第3章 特別な函数線路
1.2 影像パラメーターの表現について.....	100	3.0 概 説..... 105
1.3 影像パラメーターによる基礎方程式	101	3.1 線路定数が距離の n 乗に比例する場合..... 105
1.4 基礎方程式の解.....	102	3.2 正弦函数で表わされる場合..... 106
1.5 不均等、対称分布定数回路.....	103	3.3 指数函数で表わされる場合..... 106
第2章 端条件による積分定数の決定		第4章 特性インピーダンスおよび伝達定数
2.0 概 説.....	103	4.0 概 説..... 107
2.1 送電端の電圧 V_A 、電流 I_A を与える場合	103	4.1 両端が影像インピーダンスで終端接続 されている場合..... 107
2.2 受電端の電圧 V_B 、電流 I_B を与える場合	104	4.2 a 線路定数が距離に比例する場合..... 109 b 指数線路の場合..... 110
2.3 送電端電圧 V_A と、受電端電圧 V_B とを		

第5章 短かい線路に対する近似式	110	9.3 三種類の線路の接続点における反射	115
第6章 位置角		9.4 インピーダンス整合	117
6.1 位置角の定義	110	第10章 二つの分布定数回路の接続	
6.2 電圧分布の位置角による表示	111	10.1 位置角を用いる場合	117
6.3 電流分布の位置角による表示	111	10.2 四端子定数を用いる場合	118
6.4 インピーダンスの位置角による表示	111	第11章 線路の共振	
6.5 受電端短絡の場合	111	11.1 線路定数が距離に比例する場合	118
6.6 受電端開放の場合	112	11.2 指数線路の共振	121
6.7 受電端の負荷インピーダンスおよび送電端 の電源インピーダンスが、それぞれ特性イ ンピーダンスに等しい場合	112	11.3 反射係数と定在波比	123
第7章 分布直列インピーダンスおよび並列アド ミタンスの測定	112	第12章 影像分割の拡張	
第8章 等価四端子網の四端子定数		12.1 四端子網としての不均等分布定数回路	124
8.1 T型等価回路	113	12.2 八端子網としての均等分布結合回路	125
8.2 π 型等価回路	113	12.2 a 概 説	125
第9章 反射および透過		12.2 b 影像四端子網が対称網である場合	125
9.1 負荷インピーダンスによる反射現象	114	12.2 c 影像四端子網が非対称網である場合	127
9.2 異種の無限長線路の接続点における反射 および透過	115	第13章 実 験	128
		— 概 説 — 測定理論 — 実験結果の考察 —	
		結 言	131
		文 献	131

内 容 梗 概

本論文は、主として、不均等分布定数回路の、定常状態における基礎理論を論述したものである。従って通常の、均等分布定数回路は、この特例となる。不均等分布定数回路については、40年来の、おびただしい文献がある。現在も、マイクロウェーブ回線に、分布定数濾波器として、あるいは回路整合のために、あるいは広帯域伝送のために、基礎理論が探究されている。しかし、これらの基礎理論は、微分方程式の出発点に誤りがあるために、一般的な成果を得ていない。

本論文においては、微分方程式の出発点を修正し、新しい表現による影像パラメーターを用いることによって、簡明な一般解をみちびき、これを詳説した。従来、均等分布定数回路において説かれている内容は、すべて平行移動的に、一般的内容を与えて、これを再表現した。影像分割の理論は、本解式の基礎概念であって、これは分布結合回路にも適用され、美しい解が得られることを示した。この方法は、必然的に、影像2端子網から、影像四端子網の概念拡張にみちびかれる。これは、多端子の不均等分布結合回路に対しても解の手順を与えることとなろう。なお、レッヘル線による簡単な実験を試みて、理論の真否を検証した。

ま え が き

長距離送電線や、通信線路においては、回路定数としての抵抗、インダクタンスおよび容量が、線路に沿って一様に分布している。波長に比して非常に短い場合は、長い線路であっても、集中定数回路として取扱ってよいが、実際には短かい線路であっても、波長に比較し得る程度の長さ、またはそれ以上の長さの線路は、分布定数回路として取扱わなければならない。分布定数が、線路上の各位置において一定である場合、すなわち均等分布定数回路においては、定常状態における電圧電流を、場所の函数として微分方程式をつくり、種々の境界条件のもとに、その解を得ることができる。定常電圧、電流が、線路に波として伝播してゆく現象は、既に教科書にも詳述されているとおりである。この分布定数が、各場所で一定でなく、場所の函数である場合、すなわち不均等分布定数の場合の取扱いについては、40年来の、おびただしい文献^{(31) (38)}がある。1920 C. Ravut⁽¹⁶⁾氏は、無限級数の形式で解を試みた。

1927 Ballantine⁽¹⁸⁾氏は、線路定数 y , z が、距離 x に比列する場合、すなわち $y = Y_0 x$, $z = Z_0 x$ の場合、および $y = Y_0 x^2$, $z = Z_0 x^2$ の場合を取扱った。1932 Starr⁽²¹⁾氏は、 $z = Z_0 x^a$, $y = Y_0 x^b$ の場合を、1938 R. Burrow⁽²³⁾氏は、 $z = Z_0 e^x$, $y = Y_0 e^{-x}$ の場

合を、1943 黒川、吉田、平山⁽³⁾氏は、 $z=Z_0 e^{ax}$, $y=Y_0 e^{bx}$ の場合を取扱った。1958 Jacobs⁽³⁷⁾氏は、 z は一定で、 y のみが x の函数である場合を論じている。1960 Sugai⁽⁴¹⁾氏は、完全解の存在に疑問を持ち、計算機による数値解の近似を提唱している。

しかし、これらの文献を、筆者の観点から眺めると、微分方程式の出発点に誤りがあるために、解は一般的結果に到達することができないのである。筆者は、新しい表現による image parameter を使用することによって、簡明な一般解を得た⁽⁷⁾ので、次に、これを詳説する。なお、本論文には、次の仮定があることを初めに記しておく。

- (1) 本論文は、線形回路の定常状態について論述してある。
- (2) 不均等分布定数回路を微分割して得られる一箇の微分割四端子網は、一般に非対称の等価 T 型回路に、おきかえられるものとする。
- (3) 不均等分布定数回路の両端に、映像インピーダンスを接続した場合に、任意の分割点で左右をみたとき、その等価インピーダンスが相等しいように分割することができるものと仮定する。(これを映像分割と名づける。)
- (4) 回路は、レッヘル線で構成され、電磁波の主要姿態として TEM 波のみが存在するものとみなす。

第一章 分布定数回路の基礎方程式

1.0. 概 説

最も一般的には、Maxwell の方程式から出発すべきであるが、ここでは Lecher 線が実験の対象となる範囲で考察されている。その Lecher 線が平行線でない場合、すなわち、ある函数の曲線をなしている場合あるいは、ある函数で媒質が変化している場合等を想像しながら、基礎方程式の誘導を試みている。

1.1. 基礎方程式の誘導

いま、下図のような往復線路を考え、距離 x の函数

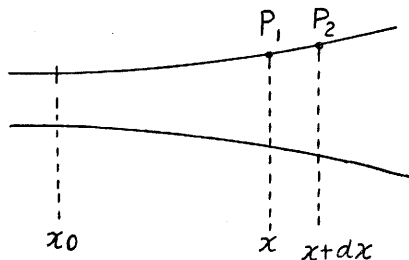


Fig. 1

として、回路定数が分布しているとする。

x 点において、毎 m についての抵抗、自己インダクタンス、容量、漏洩コンダクタンス等は、それぞれ x の函数であって、 $R(x)$ [Ω/m], $L(x)$ [H/m], $C(x)$ [F/m], $G(x)$ [v/m] とすれば、線路に沿って存在するインピーダンスおよび線間のアドミタンスは、それぞれ毎 m につき次のようになる。

$$\text{直列インピーダンス } z(x) = R(x) + j\omega L(x) \quad [\Omega/m] \quad (1)$$

$$\text{並列アドミタンス } y(x) = G(x) + j\omega C(x) \quad [v/m] \quad (2)$$

送電端 x_0 を起点として x なる距離の点を P_1 、それから dx だけ離れた点を P_2 とし、点 P_1 の電圧を V とすれば、点 P_2 の電圧は $V + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx$ で与えられる。

また、点 P_1 の電流を I とすれば、点 P_2 の電流は $I + \frac{\partial I}{\partial x} \cdot dx$ で与えられる。

それ故、電圧平衡、電流連続の原則から

$$dV = -Izdx \quad (3)$$

$$dI = -Vydx \quad (4)$$

この $IVyz$ は、みな x の函数であって、これを解くことが、従来の微分方程式の出発点であった。

y , z が場所 x の変化に対して一定である場合には、この出発は正しい。しかし yz が場所の函数である場合には、ある条件つきで正しいが、一般には正しくない。この dx の部分において、インピーダンス分布のほか、相互インダクタンス、あるいは微小変圧器が従続分布しているとすれば、変圧比的な電圧変化、電流変化も存在するはずである。平行レッヘル線を、整合用等価変圧器のように利用している事実も、あわせて想起しなければならない。

筆者は、より具体的な出発を試みる。

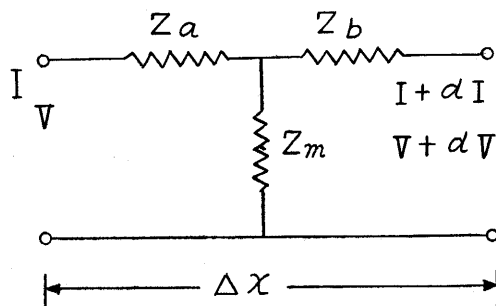


Fig. 2

いま、この線路を任意に微分割して、得られる 1 個の素子が、第 2 図に示すような等価 T 型の微小四端子

網であると考え、その電圧、電流平衡式は、下記の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} dV &= -IZ_a - (I + dI)Z_b \\ dI &= -\frac{(V - IZ_a)}{Z_m} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{直列インピーダンス} &= z(x) \cdot \Delta x = Z_a + Z_b \\ \text{並列アドミタンス} &= y(x) \cdot \Delta x = 1/Z_m \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

この微小四端子網を従続するには、影像パラメーターを使用した方が、式が簡明になる。

1.2. 影像パラメーターの表現について

四端子網の影像パラメーターとしては、三つのパラメーターで充分である。従来、伝達定数 θ と、両端の影像インピーダンス Z_{01} Z_{02} の3個を使用している。

筆者は、両端の影像インピーダンスの比を

$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \varepsilon^{2p}$$

とおき、 Z_{01} と p と θ の3箇を、パラメーターとして使用すべきであることを提案する。この方が、式も美しく、各パラメーターの意義も明確になる。

いま、四端子網における電圧比、電流比を求めると(電気学会大学講座、電気回路論、177頁より)

$$\frac{F_1}{E_2} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \varepsilon^{\theta} = \varepsilon^{\theta-p} = \varepsilon^{\theta_1} \quad (7)$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \varepsilon^{\theta} = \varepsilon^{\theta+p} = \varepsilon^{\theta_2} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \theta - p \\ \theta_2 &= \theta + p \end{aligned} \right\} \quad (9) \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (10)$$

従来、伝達定数 θ なるものは、 θ_1 と θ_2 の算術平均として定義されている。式の形からみれば、正しく θ_1 と θ_2 の算術平均にはちがいないが、そのような概念では p の役割が表面に表われない。算式の意味は、 p が消去されて、 θ が求められたものにすぎない。いまここに、 p と同列に提示した θ は、従来の θ と、その値は同じものであるが、 p の働きと関聯して理解し、 θ_1 θ_2 および算術平均の考えはすてる。 p は、パラメーターとして、本論文に重要な役割を持つものであるから、従来の四端子網との関係式を、新しい表現で書きなおして、その意義を更に鮮明にしておく。

四端子網の四端子定数を $ABCD$ とし、基礎方程式を

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= AE_2 + B I_2 \\ I_1 &= CE_2 + D I_2 \\ AD - BC &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

とすれば、前記電気回路論177頁を参照して

$$\left. \begin{aligned} \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \varepsilon^{2p} = \frac{D}{A}, \quad \cosh \theta &= \sqrt{AD} \\ Z_{01} Z_{02} = Z_{01}^2 \varepsilon^{2p} = \frac{B}{C}, \quad \sinh \theta &= \sqrt{BC} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \cosh \theta = \varepsilon^{-p} \cosh \theta \\ B &= \sqrt{Z_{01} Z_{02}} \sinh \theta = Z_{01} \varepsilon^p \sinh \theta \\ C &= \frac{1}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} \sinh \theta = \frac{\sinh \theta}{Z_{01} \varepsilon^p} \\ D &= \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \cosh \theta = \varepsilon^p \cosh \theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

影像インピーダンスの合った四端子網の縦続接続は

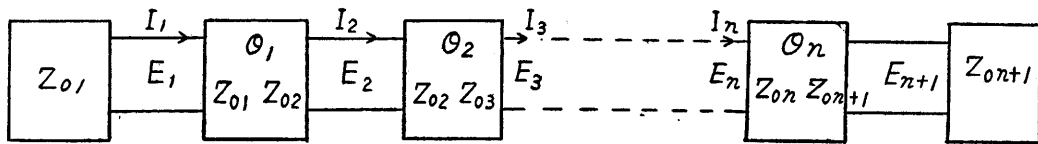


Fig. 3

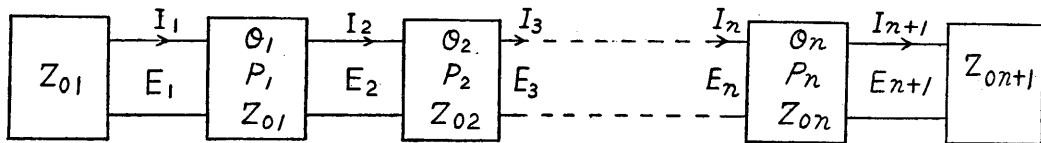


Fig. 4

$$\frac{F_1}{E_2} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \varepsilon^{\theta_1}, \quad \frac{E_2}{E_3} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} \varepsilon^{\theta_2}$$

$$\dots \dots \dots \frac{E_n}{E_{n+1}} = \sqrt{\frac{Z_{0n}}{Z_{0n+1}}} \varepsilon^{\theta_n}$$

辺乗じて

$$\frac{E_1}{E_{n+1}} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{0n+1}}} \cdot \varepsilon^{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n} \quad (14)$$

となるのは周知の通りであるが、これを p パラメーターで示すと

$$\frac{E_1}{E_2} = \varepsilon^{-p_1} \varepsilon^{\theta_1}, \quad \frac{E_2}{E_3} = \varepsilon^{-p_2} \varepsilon^{\theta_2}$$

$$\dots \dots \dots \frac{E_n}{E_{n+1}} = \varepsilon^{-p_n} \varepsilon^{\theta_n}$$

従って

$$\frac{E_1}{E_{n+1}} = \varepsilon^{-p_1 - p_2 - \dots - p_n} \cdot \varepsilon^{\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n} \quad (15)$$

1.3. 影像パラメーターによる基礎方程式

式(5)の基礎方程式を、上記の影像パラメーターで表現すれば、どのような形になるであろうか。

いま、影像インピーダンスの合った n 箇の四端子網を縦続する場合に、各四端子網の影像インピーダンスの比を、次の如く与える。

$$\text{第1番目の四端子網では} \quad \frac{Z_{01}}{Z_{00}} = \varepsilon^{2p_1}$$

$$\text{第2番目の四端子網では} \quad \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \varepsilon^{2p_2}$$

$$\text{第3番目の四端子網では} \quad \frac{Z_{03}}{Z_{02}} = \varepsilon^{2p_3}$$

したがって

$$\frac{Z_{0n}}{Z_{00}} = \frac{Z_{01}}{Z_{00}} \cdot \frac{Z_{02}}{Z_{01}} \cdot \frac{Z_{03}}{Z_{02}} \dots \dots \dots = \varepsilon^{2(p_1 + p_2 + p_3 + \dots)} \quad (16)$$

第2図に示したような、 Δx 部分の微小四端子網においては、

$$\frac{Z_{01}}{Z_{00}} = \frac{Z_b + Z_m}{Z_a + Z_m} = \varepsilon^{2\Delta p} \approx 1 + 2\Delta p \quad (17)$$

次に、(6)(17)両式より Z_a , Z_b を求めてみる。

(17)より

$$Z_b + Z_m = Z_a + Z_m + 2\Delta p(Z_a + Z_m)$$

(6)式より Z_b を求めて代入すると

$$Z_a = \frac{z(x) \cdot \Delta x - 2Z_m \Delta p}{2(1 + \Delta p)} \approx \frac{1}{2} z(x) \cdot \Delta x - Z_m \cdot \Delta p$$

同様に

$$Z_b = \frac{z(x) \cdot \Delta x + 2z(x) \cdot \Delta x \cdot \Delta p + 2\Delta p \cdot Z_m}{2(1 + \Delta p)}$$

$$\approx \frac{1}{2} z(x) \cdot \Delta x + Z_m \cdot \Delta p$$

すなわち

$$Z_a \approx \frac{1}{2} z(x) \Delta x - \frac{\Delta p}{y(x) \Delta x} \quad (18)$$

$$Z_b \approx \frac{1}{2} z(x) \Delta x + \frac{\Delta p}{y(x) \Delta x} \quad (19)$$

$$\cosh \Delta \theta = \sqrt{AD} = C \sqrt{Z_{11}' Z_{22}'} \\ = \sqrt{\frac{(Z_a + Z_m)(Z_b + Z_m)}{Z_m^2}} \quad (20)$$

ただし ACD は四端子定数

$Z_{11}' Z_{22}'$: 開放インピーダンス

(20)に(18)(19)式を代入すると

$$\cosh \Delta \theta = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} y \Delta x \cdot z \Delta x - \Delta p\right) \left(1 + \frac{1}{2} y \Delta x \cdot z \Delta x + \Delta p\right)}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2} y \Delta x \cdot z \Delta x\right)^2 - (\Delta p)^2} \\ \approx 1 + \frac{1}{2} y \cdot \Delta x \cdot z \Delta x = 1 + \frac{1}{2} (\sqrt{yz} \Delta x)^2 \\ \approx \cosh(\sqrt{yz} \Delta x) \\ \therefore d\theta = \sqrt{yz} dx \quad (21)$$

したがって、従統網の伝達定数は

$$\theta = \int_{x_0}^x d\theta = \int_{x_0}^x \sqrt{yz} dx \quad (22)$$

$x = x_0$ 点の影像インピーダンスを Z_{00}

$x = x_0 + \Delta x$ 点の影像インピーダンスを Z_{01} とする

と

$$\frac{Z_{01}}{Z_{00}} = \varepsilon^{2\Delta p} \quad (23)$$

$$Z_{00} \varepsilon^{2\Delta p} = Z_{01} \varepsilon^{-2\Delta p} = Z_m \sinh \Delta \theta$$

$$= \frac{1}{y(x_0) \cdot \Delta x} \cdot \Delta \theta = \frac{1}{y(x_0) \cdot \Delta x} \cdot \sqrt{yz} \Delta x \\ = \sqrt{\frac{z(x_0) \cdot \Delta x}{y(x_0) \Delta x}} \quad (24)$$

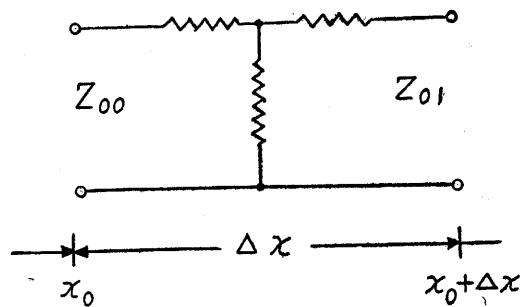


Fig. 5

$$Z_{00} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (Z_{00} \varepsilon^{2\Delta p}) = \sqrt{\frac{z(x_0)}{y(x_0)}} \quad (25)$$

同様に、 x 点の影像インピーダンスを Z_{0x} とすると

$$Z_{0x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (Z_{0x} \varepsilon^{2\Delta p}) = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}} \quad (26)$$

$$\frac{Z_{01}}{Z_{00}} = \varepsilon^{2\Delta p}, \quad \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \varepsilon^{2\Delta p}, \\ \dots \dots \dots \frac{Z_{0n}}{Z_{0n-1}} = \varepsilon^{2\Delta p} \quad (27)$$

辺乗じて

$$\frac{Z_{0x}}{Z_{00}} = \varepsilon^{2 \int \Delta p} = \varepsilon^{2p} \quad (28)$$

すなわち、(22)(28)式が示すように、線路定数が、距離の函数として一価連続であり、線路の任意点に p , θ の積分値が存在するということが、影像分割の意義である。

(5)式に(18)(19)式を代入すると

$$dI = -\frac{(V - IZ_a)}{Z_m} = -Vy(x)\Delta x + Iy(x) \cdot \Delta x \left\{ \right.$$

$$\left\{ \frac{1}{2} z(x) \cdot \Delta x - \frac{\Delta p}{y(x) \Delta x} \right\} = -V \cdot y(x) \Delta x - I \Delta p$$

$$\begin{aligned} dV &= -IZ_a - (I + dI)Z_b \\ &= -I(Z_a + Z_b) - dIZ_b \\ &= -Iz(x) \Delta x + \left\{ Vy(x) \Delta x + I \cdot \Delta p \right\} \end{aligned}$$

$$\left\{ \frac{1}{2} z(x) \Delta x + \frac{\Delta p}{y(x) \Delta x} \right\}$$

$$\equiv -Iz(x) \Delta x + V dp$$

すなわち

$$\left. \begin{aligned} dV &= -Iz dx + V dp \\ dI &= -Vy dx - Idp \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

(17) 式は、開放インピーダンスの比であるから、
(29) 式の dp の頃は、いわば微小変圧比的寄与であると考えてよい。従来の出発点である (3) (4) 式とは異なり、(29) 式が一般的な出発点となる。

(29) 式を変形して

$$\left. \begin{aligned} dV &= -I \sqrt{yz} \cdot \sqrt{\frac{z}{y}} \cdot dx + V dp \\ dI &= -V \sqrt{yz} \cdot \sqrt{\frac{y}{z}} \cdot dx - Idp \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

(21) ~ (28) 式の関係を代入すると

$$\left. \begin{aligned} dV &= -I Z_{00} \varepsilon^{2p} d\theta + V dp \\ dI &= -V (1/Z_{00}) \varepsilon^{-2p} d\theta - Idp \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

すなわち基礎方程式は、映像パラメーターで表現された。 V , I を、それぞれ θ と p の関数とみて、その全微分を求めたものが、この (31) 式で、これは後述の (331) 式と一致するものである。

1.4. 基礎方程式の解

(31) 式の両辺を dx で除し、 ε^{2p} を乗すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dx} \cdot \varepsilon^{-p} - V \cdot \frac{dp}{dx} \cdot \varepsilon^{-p} \\ &= -Z_{00} I \varepsilon^p \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{dI}{dx} \cdot \varepsilon^p + I \frac{dp}{dx} \cdot \varepsilon^p \\ &= -\frac{1}{Z_{00}} V \varepsilon^{-p} \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} (V \varepsilon^{-p}) &= -Z_{00} (I \varepsilon^p) \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{d}{dx} (I \varepsilon^p) &= -\frac{1}{Z_{00}} (V \varepsilon^{-p}) \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$V \varepsilon^{-p} = E, \quad I \varepsilon^p = J \quad (34)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{dx} &= -Z_{00} \cdot J \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ \frac{dJ}{dx} &= -\frac{1}{Z_{00}} E \frac{d\theta}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

従って

$$\left. \begin{aligned} \frac{dE}{d\theta} &= -Z_{00} J \\ \frac{dJ}{d\theta} &= -\frac{1}{Z_{00}} E \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 E}{d\theta^2} - E &= 0 \\ \frac{d^2 J}{d\theta^2} - J &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ゆえに、

$$\left. \begin{aligned} E &= A \cosh \theta + B \sinh \theta \\ &= A' \varepsilon^{-\theta} + B' \varepsilon^{\theta} = V \varepsilon^{-p} \\ J &= C \cosh \theta + D \sinh \theta \\ &= C' \varepsilon^{-\theta} + D' \varepsilon^{\theta} = I \varepsilon^p \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$\frac{dE}{d\theta} = A \sinh \theta + B \cosh \theta = -A' \varepsilon^{-\theta} + B' \varepsilon^{\theta}$$

(36) 式より

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{Z_{00}} \frac{dE}{d\theta} = -\frac{1}{Z_{00}} (A \sinh \theta \\ &\quad + B \cosh \theta) = -\frac{1}{Z_{00}} (-A' \varepsilon^{-\theta} \\ &\quad + B' \varepsilon^{\theta}) \end{aligned} \quad (39)$$

(38) 式と (39) 式の J を比較すると

$$\left. \begin{aligned} C &= -\frac{B}{Z_{00}} \\ D &= -\frac{A}{Z_{00}} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} C' &= \frac{A'}{Z_{00}} \\ D' &= -\frac{B'}{Z_{00}} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

(38) 式を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} E &= V \varepsilon^{-p} = A \cosh \theta + B \sinh \theta \\ J &= I \varepsilon^p = -\frac{B}{Z_{00}} \cosh \theta \\ &\quad - \frac{A}{Z_{00}} \sinh \theta \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\left. \begin{aligned} E &= V \varepsilon^{-p} = A' \varepsilon^{-\theta} + B' \varepsilon^{\theta} \\ J &= I \varepsilon^p = \frac{1}{Z_{00}} (A' \varepsilon^{-\theta} - B' \varepsilon^{\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \int d\theta = \int \sqrt{yz} dx \\ Z_{00} &= \sqrt{\frac{z(x_0)}{y(x_0)}}, \quad Z_{0x} = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}}, \\ \frac{Z_{0x}}{Z_{00}} &= \varepsilon^{2 \int dp} = \varepsilon^{2p} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

注意 1.

従来の文献に多くみられるように、線路定数を
 $y = Y \cdot f_1(x), \quad z = Z \cdot f_2(x)$

Y, Z は複素常数、 f_1, f_2 は実函数とおけば、 p は実函数となる。しかし、これは特例であって、一般には、(1) (2) 式に与えたようなものであるから、 θ, p は、それぞれ、複素函数となり

$$\theta = \alpha + j\beta$$

$$p = \gamma + j\delta$$

とおけば、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は、それぞれ G, C, L, R の関数となる。

注意 2.

通常の均等分布定数回路の伝播定数に相当するものは、(44) 式の θ を微分したもの、すなわち θ' である。均等分布定数回路の伝播定数に線路長を乗じたものが、(44) 式の θ に相当する。従って θ は「伝達函数」と称すべきであろうか。

1.5. 不均等、対称分布定数回路

この場合は、対称回路の条件によって

$$p=0 \quad (54)$$

となるから、基礎方程式は (3) (4) 式と同じく

$$\left. \begin{aligned} dV &= -Iz(x)dx \\ dI &= -Vy(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

となる。この形の微分方程式を解くに際して、「対称回路の制限条件」に言及した文献はない。 $p=0$ のときは対称網であると共に、(28) (26) 式に従って $y(x)/z(x)$ の比が、一定になるのであるが、それには二つの場合があって、第一の場合は、 y, z が一定な常数であるとき、すなわち通常の均等分布定数回路の場合、第2の場合は、 y, z が x の函数であっても、その変化する割合が等しいときである。いま、あとの条件を採用して、 $y=kz$ として、微分方程式をたてると、通常の二階線形微分方程式となって、容易に解が得られる。しかし、前述の特例として得られる解法は、さらに簡明である。

(46) 式より

$$\left. \begin{aligned} dV &= -I\sqrt{zy}\sqrt{\frac{z}{y}}dx \\ dI &= -V\sqrt{zy}\sqrt{\frac{y}{z}} \cdot dx \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

ここで

$$\sqrt{yz} = d\theta/dx \quad (48)$$

$$\sqrt{z(x_0)/y(x_0)} = Z_{00} = \sqrt{z(x)/y(x)} \quad (49)$$

を代入すると、

$$\theta = \int \sqrt{yz} dx \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} dV &= -IZ_{00} d\theta \\ dI &= -\frac{V}{Z_{00}} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{d\theta} &= -Z_{00} I \\ \frac{dI}{d\theta} &= -\frac{V}{Z_{00}} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

$$\left. \begin{aligned} V'' - V &= 0 \\ I'' - I &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= A \cosh \theta + B \sinh \theta \\ I &= C \cosh \theta + D \sinh \theta \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= A \cosh \theta + B \sinh \theta \\ I &= -\frac{1}{Z_{00}} (B \cosh \theta + A \sinh \theta) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned} V &= A' \varepsilon^\theta + B' \varepsilon^{-\theta} \\ I &= C' \varepsilon^\theta + D' \varepsilon^{-\theta} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

第2章 端条件による積分定数の決定

2.0. 概 説

送電端および受電端の、種々な境界条件を与えて、不均等分布定数回路の一般解の積分定数を決定する。これらの式の展開に際して、興味深く感ぜられる点がある。すなわち、求めるものは、電圧 (V) あるいは電流 (I) であるのに、($V \varepsilon^{-p}$) や ($I \varepsilon^p$) の形が、式の変換に、常に、ひとかたまりとなって存在するように取扱うことが、計算を簡明にすることは面白い。適当に命名すべきであろう。

2.1. 送電端の電圧 V_A 電流 I_A を与える場合

$$\left. \begin{aligned} x=x_0 \text{ のとき } \theta &= 0 \\ p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} V &= V_A \\ I &= I_A \end{aligned} \right\}$$

とすると (42) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_A &= A, \quad I_A = -\frac{B}{Z_{00}} \\ V \varepsilon^{-p} &= V_A \cosh \theta - I_A Z_{00} \sinh \theta \\ I \varepsilon^p &= (-1/Z_{00}) (-I_A Z_{00} \cosh \theta + V_A \sinh \theta) \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

(43) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_A &= A' + B' \\ Z_{00} I_A &= A' - B' \end{aligned} \right\}$$

故に

$$A' = \frac{1}{2} (V_A + Z_{00} I_A)$$

$$B' = \frac{1}{2} (V_A - Z_{00} I_A)$$

$$\left. \begin{aligned} V \varepsilon^{-p} &= \frac{1}{2} (V_A + Z_{00} I_A) \varepsilon^{-\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} (V_A - Z_{00} I_A) \varepsilon^{\theta} \\ I \varepsilon^p &= \frac{1}{2} \left(-\frac{V_A}{Z_{00}} + I_A \right) \varepsilon^{-\theta} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

$$\left. -\frac{1}{2} \left(-\frac{V_A}{Z_{00}} - I_A \right) \varepsilon^{\theta} \right\}$$

(57) (58) 式において、 $p=0$, $\theta=rx$ とおけば、通常の均等分布定数回路の場合となる。また、送電端で $x_0=0$ 、受電端で $x=l$ とし、 $x \rightarrow 0$ のとき $p \rightarrow 0$ $\theta \rightarrow 0$ とすれば、 $V=V_A$ $I=I_A$ となる。

$x \rightarrow l$ のとき $p \rightarrow p_l$ $\theta \rightarrow \theta_l$ $V \rightarrow V_B$ $I \rightarrow I_B$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} V_B \varepsilon^{-p_l} &= V_A \cosh \theta_l - I_A Z_{00} \sinh \theta_l \\ I_B \varepsilon^{p_l} &= I_A \cosh \theta_l - \frac{V_A}{Z_{00}} \sinh \theta_l \end{aligned} \right\}$$

image termination では $V_A = I_A Z_{00}$

$$\left. \begin{aligned} V_B \varepsilon^{-p_l} &= V_A (\cosh \theta_l - \sinh \theta_l) \\ I_B \varepsilon^{p_l} &= I_A (\cosh \theta_l - \sinh \theta_l) \end{aligned} \right\}$$

したがって

$$\frac{V_B}{I_B} \varepsilon^{-2p_l} = Z_{00}$$

ゆえに

$$\frac{V_B}{I_B} = Z_{00} \varepsilon^{2p_l} = Z_{00}$$

すなわち、送電端でも、受電端でも、image termination の条件を満足していることがわかる。

2.2. 受電端の電圧 V_B 、電流 I_B を与える場合

送電端から受電端までの距離を l とする。

$x=x_0+l$ のとき

$$\theta = \theta_l = \int_{x_0}^{x_0+l} d\theta, \quad p = p_l = \int_{x_0}^{x_0+l} dp$$

$V_x = V_B$, $I_x = I_B$ とすれば、

(42) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_B \varepsilon^{-p_l} &= A \cosh \theta_l + B \sinh \theta_l \\ I_B \varepsilon^{p_l} &= -\frac{1}{Z_{00}} (B \cosh \theta_l + A \sinh \theta_l) \end{aligned} \right\}$$

これを (42) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} V \varepsilon^{-p} &= V_B \varepsilon^{-p_l} \cdot \cosh(\theta_l - \theta) \\ &\quad + Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} \sinh(\theta_l - \theta) \\ I \varepsilon^p &= I_B \varepsilon^{p_l} \cdot \cosh(\theta_l - \theta) \\ &\quad + \frac{1}{Z_{00}} V_B \varepsilon^{-p_l} \sinh(\theta_l - \theta) \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

(43) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_B \varepsilon^{-p_l} &= A' \varepsilon^{-\theta_l} + B' \varepsilon^{\theta_l} \\ I_B \varepsilon^{p_l} &= \frac{A'}{Z_{00}} \varepsilon^{-\theta_l} - \frac{B'}{Z_{00}} \varepsilon^{\theta_l} \\ A' &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\theta_l} (V_B \varepsilon^{-p_l} \\ &\quad + Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l}) \\ B' &= \frac{1}{2} \varepsilon^{-\theta_l} (V_B \varepsilon^{-p_l} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

$$\left. \begin{aligned} &-Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l}) \\ V \varepsilon^{-p} &= A' \varepsilon^{-\theta} + B' \varepsilon^{\theta} \\ I \varepsilon^p &= \frac{A'}{Z_{00}} \varepsilon^{-\theta} - \frac{B'}{Z_{00}} \varepsilon^{\theta} \end{aligned} \right\}$$

(59) および (60) の両式において

$x \rightarrow x_0+l$ のとき $\theta \rightarrow \theta_l$ $p \rightarrow p_l$ $V \rightarrow V_B$ $I \rightarrow I_B$ となる。また $x \rightarrow x_0$ のときは $\theta \rightarrow 0$ $p \rightarrow 0$ とすれば $V \rightarrow V_A$ $I \rightarrow I_A$

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_B \varepsilon^{-p_l} \cosh \theta_l + Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} \sinh \theta_l \\ I_A &= I_B \varepsilon^{p_l} \cosh \theta_l + \frac{1}{Z_{00}} V_B \varepsilon^{-p_l} \sinh \theta_l \end{aligned} \right\}$$

2.3. 送電端電圧 V_A と受電端電圧 V_B とを与える場合

送電端 $x=x_0$ において $\theta=0$ $p=0$ $V=V_A$ とすれば、(42) 式より $A=V_A$

受電端 $x=x_0+l$ において $\theta=\theta_l$ $p=p_l$

$V=V_B$ とすれば、(42) 式より

$$\begin{aligned} V_B \varepsilon^{-p_l} &= A \cosh \theta_l + B \sinh \theta_l \\ &= V_A \cosh \theta_l + B \sinh \theta_l \end{aligned}$$

ゆえに $B = (V_B \varepsilon^{-p_l} - V_A \cosh \theta_l) / \sinh \theta_l$

$$\begin{aligned} V \varepsilon^{-p} &= V_A \cos \theta + \frac{1}{\sinh \theta_l} (V_B \varepsilon^{-p_l} \\ &\quad - V_A \cosh \theta_l) \sinh \theta \\ &= \frac{1}{\sinh \theta_l} \left\{ V_A \sinh(\theta_l - \theta) + V_B \varepsilon^{-p_l} \right. \\ &\quad \left. \sinh \theta \right\} \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} I \varepsilon^p &= -\frac{1}{Z_{00}} \left\{ \frac{1}{\sinh \theta_l} (V_B \varepsilon^{-p_l} \right. \\ &\quad \left. - V_A \cosh \theta_l) \cosh \theta + V_A \sinh \theta \right. \\ &= -\frac{1}{Z_{00} \sinh \theta_l} \left\{ V_A \cosh(\theta_l - \theta) \right. \\ &\quad \left. - V_B \varepsilon^{-p_l} \cosh \theta \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

2.4. 送電端電流 I_A と受電端電流 I_B とを与える場合

送電端 $x=x_0$ において $\theta=0$ $p=0$ $I=I_A$ とすると、(42) より $I_A = -B/Z_{00}$

受電端 $x=x_0+l$ において $\theta=\theta_l$ $p=p_l$ $I=I_B$ とすれば (42) 式より

$$I_B \varepsilon^{p_l} = -\frac{1}{Z_{00}} (B \cosh \theta_l + A \sinh \theta_l)$$

故に $-Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} = -Z_{00} I_A \cosh \theta_l + A \sinh \theta_l$

したがって $A = \frac{1}{\sinh \theta_l} (Z_{00} I_A \cosh \theta_l - Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l})$

これら A B の値を (42) 式に代入すると

$$V \varepsilon^{-p} = \frac{Z_{00}}{\sinh \theta_l} (I_A \cosh \theta_l \cosh \theta - I_B \varepsilon^{p_l} \cosh \theta - I_A \sinh \theta \sinh \theta_l) \\ = \frac{Z_{00}}{\sinh \theta_l} \{ I_A \cosh(\theta_l - \theta) - I_B \varepsilon^{p_l} \cosh \theta \} \quad (63)$$

$$I \varepsilon^p = -\frac{1}{Z_{00}} \left\{ -Z_{00} I_A \cosh \theta + \frac{1}{\sinh \theta_l} (Z_{00} I_A \cosh \theta_l - Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} \sinh \theta) \right\} \\ = \frac{1}{\sinh \theta_l} \{ I_A (\sinh \theta_l \cdot \cosh \theta - \cosh \theta_l \cdot \sinh \theta) + I_B \varepsilon^{p_l} \sinh \theta \} = \frac{1}{\sinh \theta_l} \{ I_A \sinh(\theta_l - \theta) + I_B \varepsilon^{p_l} \sinh \theta \} \quad (64)$$

2.5. 送電端電圧 V_A と受電端負荷インピーダンス Z_B とを与える場合

受電端で

$$Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{\varepsilon^{p_l} (A \cosh \theta_l + B \sinh \theta_l)}{-\frac{1}{Z_{00}} \varepsilon^{-p_l} (B \cosh \theta_l + A \sinh \theta_l)} \quad (65)$$

送電端で $x=x_0$ において $\theta=0$ $p=0$
 $V=V_A$ とすれば (42) 式より $A=V_A$
 これを Z_B の式に代入して B を求める。

$$Z_B \cdot B \cosh \theta_l + Z_B V_A \sinh \theta_l \\ = -Z_{00} \varepsilon^{2p_l} V_A \cosh \theta_l - Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cdot B \sinh \theta_l \\ \text{故に} \\ B = \frac{-V_A \{ Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh \theta_l + Z_B \sinh \theta_l \}}{Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l} \quad (66)$$

これら A, B の値を (42) 式に代入すると

$$V \varepsilon^{-p} = V_A \cosh \theta - V_A \left\{ Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh \theta_l + Z_B \sinh \theta_l \right\} \sinh \theta \\ + \frac{Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l}{Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l} \\ = V_A \frac{Z_B \cosh(\theta_l - \theta) + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh(\theta_l - \theta)}{Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l} \quad (67)$$

$$I \varepsilon^p = \frac{V_A}{Z_{00}} \left\{ \frac{Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh \theta_l + Z_B \sinh \theta_l}{Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l} \cdot \cosh \theta - \sinh \theta \right\} = \frac{V_A}{Z_{00}} \\ \cdot \frac{Z_B \sinh(\theta_l - \theta) + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh(\theta_l - \theta)}{Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l} \quad (68)$$

2.6. 送電端電流 I_A と受電端負荷インピー

ダンス Z_B とを与える場合

送電端 $x=x_0$ において、 $\theta=0$, $p=0$ $I=I_A$ とすれば (42) 式より $I_A = -B/Z_{00}$

この B の値を、前記 (65) 式に代入して A を求める。

$$A = \frac{Z_{00} I_A (Z_B \cosh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh \theta_l)}{Z_B \sinh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh \theta_l} \quad (69)$$

これらを (42) 式に代入すると

$$V \varepsilon^{-p} = Z_{00} I_A \frac{Z_B \cosh(\theta_l - \theta) + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \sinh(\theta_l - \theta)}{Z_B \sinh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh \theta_l} \quad (70)$$

$$I \varepsilon^p = I_A \frac{Z_B \sinh(\theta_l - \theta) + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh(\theta_l - \theta)}{Z_B \sinh \theta_l + Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \cosh \theta_l} \quad (71)$$

以上 (57) ~ (71) の各式において

$x=x_0$ のとき $\theta=0$ $p=0$ とすれば $V=V_A$ $I=I_A$ を与える。また $x=x_0+l$ のとき $\theta=\theta_l$ $p=p_l$ とすれば $V=V_B$ $I=I_B$ を与える。

第3章 特別な函数線路

3.0. 概 説

本章においては、線路定数が特別な函数形を与えられた場合の例題を示した。均等分布定数回路では、対称網であるから、常に $p=0$ であるが、不均等分布定数回路の場合は、 $p=0$ の場合と $p \neq 0$ の場合とがあることを例によって示した。

3.1. 線路定数が距離の n 乗、 m 乗に比例する場合

$$\left. \begin{aligned} z(x) &= Zx^n \\ y(x) &= Yx^m \end{aligned} \right\} \\ Z_{0x} = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}} = \sqrt{\frac{Zx^n}{Yx^m}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} x^{\frac{n-m}{2}} \\ \theta' = \sqrt{y(x) \cdot z(x)} = \sqrt{Zx^n Yx^m} \\ = \sqrt{YZ} x^{\frac{n+m}{2}} \\ \theta = \int_{x_0}^x \theta' dx = \int_{x_0}^x \sqrt{YZ} x^{\frac{n+m}{2}} dx \\ = \frac{2\sqrt{YZ}}{n+m+2} \left(x^{\frac{n+m+2}{2}} - x_0^{\frac{n+m+2}{2}} \right) \\ Z_{00} = \sqrt{\frac{z(x_0)}{y(x_0)}} = \sqrt{\frac{Zx_0^n}{Yx_0^m}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} x_0^{\frac{n-m}{2}}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_{00} Z_{0x}} &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} x_0^{\frac{n-m}{2}} \cdot x^{\frac{n-m}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} (x_0 x)^{\frac{n-m}{2}} \\ \varepsilon p &= \sqrt{\frac{Z_{0x}}{Z_{00}}} = \sqrt{\frac{x^{\frac{n-m}{2}}}{x_0^{\frac{n-m}{2}}}} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{n-m}{4}} \end{aligned}$$

従って (42) 式より

$$\left. \begin{aligned} V &= \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\frac{m-n}{4}} \cdot (A \cosh \theta + B \sinh \theta) \\ I &= -\sqrt{\frac{Y}{Z}} (x_0 \cdot x)^{\frac{m-n}{4}} \cdot (B \cosh \theta + A \sinh \theta) \\ \theta &= \frac{2\sqrt{YZ}}{n+m+2} (x - x_0)^{\frac{n+m+2}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

特に、 $n=m=1$ の場合は

$$\left. \begin{aligned} V &= A \cosh \theta + B \sinh \theta \\ I &= -\sqrt{\frac{Y}{Z}} \cdot (B \cosh \theta + A \sinh \theta) \\ \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{YZ} (x^2 - x_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

$n=m=1$ で、送端の電圧 V_A 、電流 I_A を与えた場合は

$$A = V_A, \quad I_A = -\sqrt{\frac{Y}{Z}} \cdot B$$

従って、

$$\left. \begin{aligned} V &= V_A \cosh \theta - \sqrt{\frac{Z}{Y}} I_A \sinh \theta \\ I &= I_A \cosh \theta - V_A \sqrt{\frac{Y}{Z}} \sinh \theta \\ \theta &= \frac{1}{2} \sqrt{YZ} (x^2 - x_0^2) \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

$n=m=0$ の場合は、通常の均等分布定数の場合となる。すなわち

$$\begin{aligned} z(x) &= Z, \quad y(x) = Y \\ \theta' &= \sqrt{YZ}, \quad \theta = \sqrt{YZ} (x - x_0) = rl \\ Z_{0x} &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} = Z_{00}, \quad p = 0 \end{aligned}$$

(42) 式より

$$\left. \begin{aligned} V &= A \cosh rl + B \sinh rl \\ I &= -\sqrt{YZ} (B \cosh rl + A \sinh rl) \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

3.2. 線路定数が、正弦関数で表わされる場合

$z(x) = Z \sin \omega x = 1/y(x)$ とすると、

$$\theta' = \sqrt{y(x) \cdot z(x)} = 1, \quad \theta = \int_{x_0}^x dx = x - x_0$$

$$Z_{00} = \sqrt{z(x_0)/y(x_0)} = Z \sin \omega x_0$$

$$Z_{0x} = \sqrt{z(x)/y(x)} = Z \sin \omega x$$

$$\sqrt{Z_{00} \cdot Z_{0x}} = Z \sqrt{\sin \omega x \cdot \sin \omega x_0}$$

$$\varepsilon p = \sqrt{\frac{Z_{0x}}{Z_{00}}} = \sqrt{\frac{\sin \omega x}{\sin \omega x_0}}$$

従って (42) 式より

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{\frac{\sin \omega x}{\sin \omega x_0}} \left\{ A \cosh(x - x_0) + B \sinh(x - x_0) \right\} \\ I &= \frac{-1}{Z \sqrt{\sin \omega x_0 \cdot \sin \omega x}} \left\{ B \cosh(x - x_0) + A \sinh(x - x_0) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

3.3. 線路定数が指数関数で表わされる場合

$$\left. \begin{aligned} z(x) &= Z \varepsilon^{4ax} \\ y(x) &= Y \varepsilon^{4bx} \end{aligned} \right\}$$

この場合を、一般の指数線路と称している。

$$Z_{0x} = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}} = \sqrt{\frac{Z \varepsilon^{4ax}}{Y \varepsilon^{4bx}}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} \varepsilon^{2(a-b)x}$$

$$Z_{00} = \sqrt{Z/Y} \varepsilon^{2(a-b)x_0}$$

$$\sqrt{Z_{00} Z_{0x}} = \sqrt{Z/Y} \varepsilon^{(a-b)(x+x_0)}$$

$$\varepsilon p = \sqrt{Z_{0x}/Z_{00}} = \varepsilon^{(a-b)(x-x_0)}$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{y(x) \cdot z(x)} = \sqrt{Y \varepsilon^{4bx} \cdot Z \varepsilon^{4ax}} \\ &= \sqrt{YZ} \varepsilon^{2(a+b)x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{x_0}^x \theta' dx = \sqrt{YZ} \int_{x_0}^x \varepsilon^{2(a+b)x} dx \\ &= \left(\sqrt{YZ} \frac{1}{2(a+b)} \varepsilon^{2(a+b)x} \right)_{x_0}^x \\ &= \frac{\sqrt{YZ}}{2(a+b)} \left(\varepsilon^{2(a+b)x} - \varepsilon^{2(a+b)x_0} \right) \end{aligned}$$

従って (42) 式より

$$\left. \begin{aligned} V &= \varepsilon^{(a-b)(x-x_0)} (A \cosh \theta + B \sinh \theta) \\ I &= -\sqrt{YZ} \varepsilon^{-(a-b)(x+x_0)} \cdot (B \cosh \theta + A \sinh \theta) \\ \theta &= \frac{\sqrt{YZ}}{2(a+b)} \left(\varepsilon^{2(a+b)x} - \varepsilon^{2(a+b)x_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

or

$$\left. \begin{aligned} V &= A' \varepsilon^{(a-b)(x-x_0)} - \theta \\ &\quad + B' \varepsilon^{(a-b)(x-x_0)} + \theta \\ I &= -\sqrt{YZ} (A' \varepsilon^{-(a-b)(x+x_0)} - \theta \\ &\quad - B' \varepsilon^{-(a-b)(x+x_0)} + \theta) \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

or

$$\left. \begin{aligned} V &= \varepsilon^{(a-b)(x-x_0)} (A' \varepsilon^{-\theta} + B' \varepsilon^{\theta}) \\ I &= -\sqrt{Y/Z} \varepsilon^{-(a-b)(x+x_0)} (A' \varepsilon^{-\theta} - B' \varepsilon^{\theta}) \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

送電端の電圧 V_A , 電流 I_A を与える場合は

$$\left. \begin{aligned} V &= V_A \varepsilon^{(a-b)(x-x_0) \cosh \theta} - I_A \sqrt{Z/Y} \varepsilon^{(a-b)(x+x_0) \sinh \theta} \\ I &= I_A \varepsilon^{-(a-b)(x-x_0) \cosh \theta} - V_A \sqrt{Y/Z} \varepsilon^{-(a-b)(x+x_0) \sinh \theta} \\ \theta &= \frac{\sqrt{YZ}}{2(a+b)} (\varepsilon^{2(a+b)x} - \varepsilon^{2(a+b)x_0}) \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

本例において、 $a=b \neq 0$ の場合は、 $p=0$ となって、不均等分布であるが、対称の条件がある。従って、この場合には、基礎微分方程式に (dp) の項は存在しない。しかし、一般には非対称となって、 $p \neq 0$ であって、 (dp) の項が存在することになる。すなわち、通常の均等分布定数線路では、常に対称四端子網であって、非対称にはならないが、不均等分布定数線路は、対称の場合と、非対称の場合とがあるということである。従来の微分方程式の出発点において、対称の条件を仮定することなく、 dp の項を無視して、一般解を得ようとする計算がなされているのは、上記の立場からみて誤りである。

(例題)

$$z = Z \varepsilon^{2ax} \quad y = Y \varepsilon^{-2ax} \quad \text{の場合}$$

(これは、電気学会、電気回路論 310 頁問題 1 であるが、同書の解は誤りである。)

(77) 式において、 a を $a/2$ 、 b を $-a/2$ とおけば

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \varepsilon^{ax} (A \sinh rx + B \cosh rx) \\ I_x &= -\frac{1}{Z_0} \varepsilon^{-ax} (A \cosh rx + B \sinh rx) \end{aligned} \right\}$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \varepsilon^{ax} (A' \varepsilon^{-rx} - B' \varepsilon^{rx}) \\ I_x &= \frac{1}{Z_0} \varepsilon^{-ax} (A' \varepsilon^{-rx} - B' \varepsilon^{rx}) \end{aligned} \right\}$$

ただし

$$\theta = \int_0^x \theta' dx = \int_0^x \sqrt{YZ} dx = \sqrt{YZ} x = rx$$

$$Z_{00} = \sqrt{Z/Y}, \quad Z_{0x} = Z_{00} \varepsilon^{2ax} = Z_{00} \varepsilon^{2p}$$

(2a) は、インピーダンス変換定数といわれている。

本解の結果から、逆に、開放、短絡インピーダンスを求め、線路定数を計算すると、はじめに与えられたものと一致するはずである。すなわち、

受電端の電圧、電流 V_B I_B を与えて、積分定数 A B を定めると

$$\left. \begin{aligned} V_x \varepsilon^{-ax} &= V_B \varepsilon^{-al} \cosh r(l-x) + I_B Z_0 \varepsilon^{al} \sinh r(l-x) \\ I_x \varepsilon^{ax} &= I_B \varepsilon^{al} \cosh r(l-x) + \frac{V_B}{Z_0} \varepsilon^{-al} \sinh r(l-x) \end{aligned} \right\}$$

 Z_{As} : 短絡インピーダンス Z_{Af} : 開放インピーダンスとすれば、上式で $V_B=0$ のとき

$$Z_{As} = V_x / I_x = \varepsilon^{2ax} Z_{00} \tanh r(l-x)$$

 $I_B=0$ のとき

$$Z_{Af} = V_x / I_x = \varepsilon^{2ax} Z_{00} \coth r(l-x)$$

$$\sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} = \tanh r(l-x), \quad \sqrt{Z_{Af} Z_{As}} = Z_{00} \varepsilon^{2ax}$$

$$\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} = \frac{-r}{\cosh^2 r(l-x)}$$

後記 (160) 式より

$$z(x) = Z_{00} \varepsilon^{2ax} \cdot \frac{-r}{\cosh^2 r(l-x)}$$

$$\cdot \frac{1}{\{\tanh^2 r(l-x)\} - 1}$$

$$= r Z_{00} \varepsilon^{2ax} = \sqrt{YZ} \sqrt{Z/Y} \varepsilon^{2ax} = Z \varepsilon^{2ax}$$

$$y(x) = \frac{-r \operatorname{sech}^2 r(l-x)}{(\tanh^2 r(l-x) - 1) Z_{00} \varepsilon^{2ax}}$$

$$= \frac{r}{Z_{00} \varepsilon^{ax}} = Y \varepsilon^{-2ax}$$

第4章 特性インピーダンスおよび伝達定数

4.0. 概 説

均等分布定数線路においては、特性インピーダンスおよび伝播定数は、線路の各位置において一定であった。が、不均等分布定数線路では、一般に x の函数となる。従って波長も、位相速度も x の函数となる。

4.1. 両端が映像インピーダンスで終端接続されている場合

送電端に Z_{00} 、受電端に Z_{0x} が接続されているとすると、 $V_A = Z_{00} I_A$

(58) 式より

$$\left. \begin{aligned} V \varepsilon^{-p} &= V_A \varepsilon^{-\theta} = Z_{00} I_A \varepsilon^{-\theta} \\ I \varepsilon^p &= I_A \varepsilon^{-\theta} = \frac{V_A}{Z_{00}} \varepsilon^{-\theta} \\ V &= V_A \varepsilon^{-(\theta-p)} \\ I &= I_A \varepsilon^{-(\theta+p)} \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{V_A}{I_A} &= \frac{V \varepsilon^{-p}}{I \varepsilon^p} = Z_{00} = Z_{0x} \varepsilon^{-2p} \\ \frac{V}{I} &= \frac{V_A \varepsilon^p}{I_A \varepsilon^{-p}} = Z_{0x} = Z_{00} \varepsilon^{2p} \\ \frac{V_A}{I} &= Z_{00} \varepsilon^{p+\theta} = Z_{t0} \left\{ \begin{aligned} \frac{Z_{te}}{Z_{t0}} &= \frac{V}{I_A} \\ \frac{V}{I_A} &= Z_{00} \varepsilon^{p-\theta} = Z_{te} \end{aligned} \right\} \cdot \frac{I}{V_A} = \varepsilon^{-2\theta} \\ \frac{Z_{0c}}{Z_{00}} &= \frac{V}{V_A} \cdot \frac{I_A}{I} = \varepsilon^{2p} \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

すなわち、波動インピーダンスの比が ε^{2p} となる。

もし、送電端と受電端の間に整合用変圧器ならば、 ε^p は変圧比に相当する。 Z_{00} 、 Z_{te} は伝達インピーダンスであるから、 $\varepsilon^{2\theta}$ は伝達インピーダンスの比となる。

以上は、送電端を線路の基準点と考えたが、線路中間の任意の点を基準とすれば、どのような表示になるであろうか。

特性インピーダンスは、 Z_{0A} Z_{0P} Z_{0B} Z_{0Q} Z_{0c} 等とする。 B 点の電圧、電流を V_B I_B とし、 P または Q 点の表示を求める。 B 点で p θ は零とする。

(42) 式より $A = V_B$, $B = -Z_{0B} I_B$, $V_B = Z_{0B} I_B$

$$\left. \begin{aligned} \text{ゆえに } V \varepsilon^{-p} &= V_B \cosh \theta \\ &\quad - Z_{0B} I_B \sinh \theta = V_B \varepsilon^{-\theta} \\ I \varepsilon^p &= I_B \cosh \theta \\ &\quad - \frac{V_B}{Z_{0B}} \sinh \theta = I_B \varepsilon^{-\theta} \end{aligned} \right\}$$

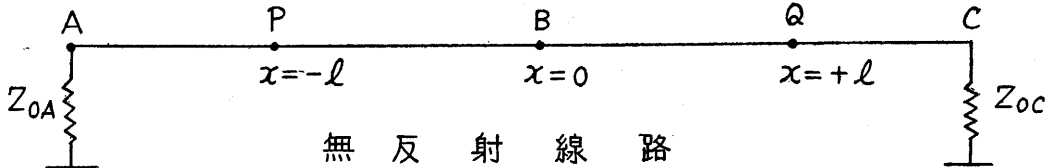


Fig. 6

この表示は、 P 点でも Q 点でもよい。また、この表示は、右方への進行波を表わすものとする、左方への進行波を表わすものは

$$\left. \begin{aligned} V \varepsilon^{-p} &= V_B \varepsilon^{\theta} \\ I \varepsilon^p &= I_B \varepsilon^{\theta} \end{aligned} \right\}$$

次に、任意点の電流表示は

$$\begin{aligned} I_A &= \frac{V_A}{Z_{0A}}, \quad I_P = \frac{Z_P}{Z_{0P}}, \quad I_B = \frac{V_B}{Z_{0B}}, \quad I_Q = \frac{V_Q}{Z_{0Q}} \\ I_Q &= \frac{V_Q}{Z_{0Q}} = \frac{V_B \varepsilon^{pQ} \varepsilon^{-\theta Q}}{Z_{0B} \varepsilon^{2pQ}} = I_B \varepsilon^{-pQ} \varepsilon^{-\theta Q} \\ I_P &= \frac{V_P}{Z_{0P}} = \frac{V_B \varepsilon^{pP} \varepsilon^{-\theta P}}{Z_{0B} \varepsilon^{2pP}} = I_B \varepsilon^{-pP} \varepsilon^{-\theta P} \end{aligned}$$

任意点の特性インピーダンスの関係は、

$$\left. \begin{aligned} Z_{0Q} &= Z_{0B} \varepsilon^{2pQ} \\ Z_{0c} &= Z_{0B} \varepsilon^{2p_c} = Z_{0Q} \varepsilon^{2(p_c - pQ)} \\ Z_{0P} &= Z_{0B} \varepsilon^{2pP} \\ Z_{0A} &= Z_{0B} \varepsilon^{2p_A} = Z_{0P} \varepsilon^{2(p_A - pP)} \end{aligned} \right\}$$

$\theta = \alpha + j\beta$ } とすると (81) 式より
 $p = r + j\delta$ }

$$\left. \begin{aligned} V &= V_A \varepsilon^{-(\theta-p)} \\ &= V_A \varepsilon^{-(\alpha-r)} \varepsilon^{-j(\beta-\delta)} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} I &= I_A \varepsilon^{-(\theta+p)} \\ &= I_A \varepsilon^{-(\alpha+r)} \varepsilon^{-j(\beta+\delta)} \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

故に、送電端で V_A I_A の電圧、電流は、 x 点において、大いさは $V_A \varepsilon^{-(\alpha-r)}$, $I_A \varepsilon^{-(\alpha+r)}$ となり電圧、電流いずれかの減衰を零にすることができる。それ以上に増大することもできる。また電圧の位相は $(\beta-\delta)$ 遅れ、電流の位相は $(\beta+\delta)$ 遅れとなる。これも条件によっては、何れかの位相遅れを零にすることもできることを示している。

Uniform Line や、Nonuniform でも対称回路の場合は、 $p=0$ となるから、電圧、電流は同形となるが、Nonuniform の非対称回路では同形とならないことがわかる。

(83) 式を瞬時値で表現すると

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{2} |V_A| \varepsilon^{-(\alpha-r)} \sin\{\omega t - (\beta-\delta) + \phi\} \\ i &= \sqrt{2} |I_A| \varepsilon^{-(\alpha+r)} \sin\{\omega t - (\beta+\delta) + \psi\} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \omega t - (\beta-\delta) + \phi \\ \theta_2 &= \omega t - (\beta+\delta) + \psi \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

$$\left. \begin{aligned} d\theta_1 &= \omega dt - \frac{\partial(\beta-\delta)}{\partial x} dx \\ d\theta_2 &= \omega dt - \frac{\partial(\beta+\delta)}{\partial x} dx \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

θ_1, θ_2 が一定な点に着目すると、位相速度は、

$$\left. \begin{aligned} v_v &= \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}(\beta-\delta)} \\ v_i &= \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\frac{\partial}{\partial x}(\beta+\delta)} \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

すなわち、無反射線路の送電端に V_A を与えて、右方向に波形が進行するとするならば

$$\frac{\partial}{\partial x}(\beta-\delta) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial x}(\beta+\delta) > 0 \quad (88)$$

となるから、 $(\beta-\delta)$ も、 $(\beta+\delta)$ も、共に、 x の増加と共に、単調に増大する曲線である。右方向を x の正方向とすると、これは右方に進行する波を表す。左方に増加する x を負量とすれば、(43) 式の第2項は、左方に進行する波形を表す。

(43) 式より

$$\left. \begin{aligned} V &= A' \varepsilon^{-(\theta-p)} + B' \varepsilon^{\theta+p} \\ I &= \frac{A'}{Z_{00}} \varepsilon^{-(\theta+p)} - \frac{B'}{Z_{00}} \varepsilon^{\theta-p} \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

右方 \rightarrow \leftarrow 左方

β, δ は共に x の実函数である。 $(\beta-\delta)$ が 2π となる x の値を1波長とするならば、電流波形では、 $(\beta+\delta)$ を 2π とする x の値が1波長となる。すなわち、一般に、電圧と電流で波長が異なることを示す。しかるに、周波数は同一であるから、位相速度が異なることは、 v_v, v_i に示したとおりである。

Vector Power を求めてみると

$$\begin{aligned} P &= V \bar{I} = V_A \varepsilon^{-(\alpha-r)} \varepsilon^{-j(\beta-\delta)} \\ &\quad \cdot I_A \varepsilon^{-(\alpha+r)} \varepsilon^{+j(\beta+\delta)} \\ &= I_A V_A \varepsilon^{-2\alpha} \cdot \varepsilon^{j2\delta} \\ &= I_A V_A \varepsilon^{-2\alpha} \cos(2\delta) \\ &\quad + j I_A V_A \varepsilon^{-2\alpha} \sin(2\delta) \end{aligned} \quad (90)$$

$\delta=0$ のときに力率 100% ということになる。

また、 $\delta = \frac{\pi}{4}$ のときに、有効電力は零となり、無効電力のみとなることがわかる。

4.2. (a) 線路定数が距離に比例する場合

$$\text{線路定数 } y(x) = Yx, \quad z(x) = Zx \quad (91)$$

$$Y = G + j\omega C, \quad Z = R + j\omega L \quad (92)$$

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{YZ} = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \\ &= \alpha_0 + j\beta_0 \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right.} \\ &\quad \left. + (RG - \omega^2 LC) \right\}} \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(G^2 + \omega^2 C^2)} \right.} \\ &\quad \left. - (RG - \omega^2 LC) \right\}} \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} Z_0 &= R_0 + jX_0 = \sqrt{Z/Y} \\ &= \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}} + \frac{RG + \omega^2 LC}{G^2 + \omega^2 C^2} \right\}} \\ &\quad + j \sqrt{\frac{1}{2} \left\{ \sqrt{\frac{R^2 + \omega^2 L^2}{G^2 + \omega^2 C^2}} - \frac{RG + \omega^2 LC}{G^2 + \omega^2 C^2} \right\}} \end{aligned} \quad (96)$$

$$\text{ただし } R/L < G/C \text{ のとき正号} \quad (97)$$

$$R/L > G/C \text{ のとき負号}$$

$$Z_{00} = \sqrt{(Zx_0)/(Yx_0)} = Z_0 = Z_{0e} = R_0 + jX_0 \quad (98)$$

$$\varepsilon^{2p} = Z_{0e}/Z_{00} = 1, \quad p=0 \quad (99)$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{y(x) \cdot z(x)} = \sqrt{YZ} x \\ &= r_0 x = (\alpha_0 + j\beta_0) x \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{x_0}^x \theta' dx = r_0 \int_{x_0}^x dx = r_0 \left[-\frac{1}{2} x^2 \right]_{x_0}^x \\ &= -\frac{1}{2} r_0 (x^2 - x_0^2) \\ &= -\frac{1}{2} (x^2 - x_0^2) (\alpha_0 + j\beta_0) \\ &= q(\alpha_0 + j\beta_0) = q r_0 \end{aligned} \quad (101)$$

(83) 式より

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{2} V_A \varepsilon^{-q\alpha_0} \sin(\omega t - q\beta_0 + \psi) \\ i &= \sqrt{2} I_A \varepsilon^{-q\alpha_0} \sin(\omega t - q\beta_0 + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

前と同様に位相速度を求めると

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{\beta_0 q'} = \frac{\omega}{\beta_0 x} \quad (103)$$

すなわち、位相速度は x の函数となる。

漏損失線路のときの特性インピーダンスも、均等分布定数回路の場合と同じく

$$Z_{00} = Z_{0e} = Z_0 = \sqrt{L/C} \quad (104)$$

$$v = 1/x \sqrt{LC} \quad (105)$$

Y, Z の L, R, G の間に $R/L = G/C$ の関係があるときは

$$r_0 = \alpha_0 + j\beta_0 = \sqrt{RG} + j\omega \sqrt{LC}$$

となるから

$$\left. \begin{aligned} q\alpha_0 &= -\frac{1}{2} (x^2 - x_0^2) \sqrt{RG} \\ q\beta_0 &= -\frac{1}{2} (x^2 - x_0^2) \omega \sqrt{LC} \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

となって、特性インピーダンス、減衰定数、位相速度

は、周波数に無関係となるが、それぞれ、 x の函数となる点が、均等分布定数回路と異なる。また位相定数は周波数に比例し、且 x の函数となる。

同様な方法で (60) 式の第2項から、反射波の位相速度を求めると $dx/dt = -\omega/\beta x$ を得る。

(b) 指数線路の場合

$$y(x) = Y e^{4bx}, \quad z(x) = Z e^{4ax} \quad (107)$$

$$Z_{00} = \sqrt{Z/Y} e^{2(a-b)x_0},$$

$$Z_{0x} = \sqrt{Z/Y} e^{2(a-b)x} \quad (108)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{Z_{00} Z_{0x}} &= \sqrt{Z/Y} e^{(a-b)(x+x_0)} \\ e^p &= \sqrt{Z_{0x}/Z_{00}} = e^{(a-b)(x-x_0)}, \\ p &= (a-b)(x-x_0) \end{aligned} \right\} \quad (109)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= \sqrt{YZ} e^{2(a+b)x} \\ \theta &= \frac{\sqrt{YZ}}{2(a+b)} \left(e^{2(a+b)x} - e^{2(a+b)x_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= q r_0 = q \alpha_0 + j q \beta_0 \\ \text{ただし} \\ q &= \frac{1}{2(a+b)} \left(e^{2(a+b)x} - e^{2(a+b)x_0} \right) \end{aligned} \right\} \quad (111)$$

$$v = \frac{\omega}{\beta_0 q'} = \frac{\omega}{\beta_0} e^{-2(a+b)x} \quad (112)$$

$$\text{無損失線路のときは } v = 1/\sqrt{LC} e^{2(a+b)x} \quad (113)$$

このときの特性インピーダンスは

$$Z_{00} = \sqrt{L/C} e^{2(a-b)x_0},$$

$$Z_{0x} = \sqrt{L/C} e^{2(a-b)x} \quad (114)$$

Y, Z の L, R, G の間に $R/L = G/C$ の関係があるときは $r_0 = \alpha_0 + j\beta_0 = \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC}$ となるから $q\alpha_0 \pm p = q\alpha_0 \pm (a-b)(x-x_0)$ となつて、周波数に無関係となる。

第5章 短い線路に対する近似式

(59) 式で $x = x_0$ とすれば V_A, I_A と V_B, I_B の関係が求められる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_B e^{-p l} \cosh \theta_l + Z_{00} I_B e^{p l} \sinh \theta_l \\ I_A &= I_B e^{p l} \cosh \theta_l + \frac{1}{Z_{00}} V_B e^{-p l} \sinh \theta_l \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

ここで

$$\begin{aligned} \cosh \theta_l &= 1 + \frac{\theta_l^2}{2!} + \frac{\theta_l^4}{4!} + \frac{\theta_l^6}{6!} + \dots \\ \sinh \theta_l &= \theta_l + \frac{\theta_l^3}{3!} + \frac{\theta_l^5}{5!} + \frac{\theta_l^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

を代入すれば

$$\begin{aligned} V_A &= V_B e^{-p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{2!} + \frac{\theta_l^4}{4!} + \dots \right) \\ &\quad + Z_{00} \theta_l I_B e^{p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{3!} + \frac{\theta_l^4}{5!} + \dots \right) \\ I_A &= I_B e^{p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{2!} + \frac{\theta_l^4}{4!} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{\theta_l}{Z_{00}} V_B e^{-p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{3!} + \frac{\theta_l^4}{5!} + \dots \right) \end{aligned}$$

θ_l が小なるときの近似式は

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_B e^{-p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{2} \right) + Z_{00} \theta_l I_B e^{p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{6} \right) \\ I_A &= I_B e^{p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{2} \right) + \frac{\theta_l}{Z_{00}} V_B e^{-p l} \left(1 + \frac{\theta_l^2}{6} \right) \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

例えば $y(x) = Yx, z(x) = Zx$ の場合には、 $p_l = 0, Z_{00} = \sqrt{Z/Y} = Z_0 = R_0 + jX_0$

$$\theta_l = \sqrt{YZ} \cdot \frac{1}{2} (2x_0 l + l^2)$$

$$Z_{00} \theta_l = \frac{1}{2} Z (2x_0 l + l^2)$$

$$\theta_l / Z_{00} = \frac{1}{2} Y (2x_0 l + l^2)$$

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_B \left\{ 1 + \frac{YZ}{8} (2x_0 l + l^2)^2 \right\} + I_B \frac{Z}{2} \\ &\quad (2x_0 l + l^2) \times \left\{ 1 + \frac{YZ}{24} (2x_0 l + l^2)^2 \right\} \\ I_A &= I_B \left\{ 1 + \frac{YZ}{8} (2x_0 l + l^2)^2 \right\} + V_B \frac{Y}{2} \\ &\quad (2x_0 l + l^2) \times \left\{ 1 + \frac{YZ}{24} (2x_0 l + l^2)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

第6章 位置角

6.1. 位置角の定義

受電端の V_B と I_B を与えて送電端から x なる位置

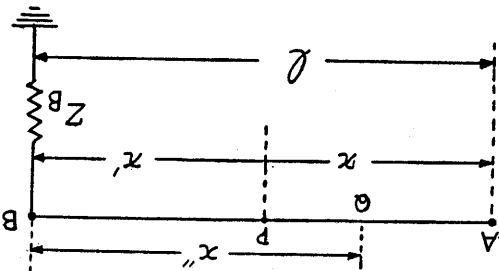


Fig. 7

の点 P の電圧、電流は (59) 式より

$$\left. \begin{aligned} V e^{-p} &= V_B e^{-p l} \cosh(\theta_l - \theta) \\ &\quad + Z_{00} I_B e^{p l} \sinh(\theta_l - \theta) \\ I e^p &= I_B e^{p l} \cosh(\theta_l - \theta) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{1}{Z_{00}} V_B \varepsilon^{-p_l} \sinh(\theta_l - \theta) \\
 & V \varepsilon^{-p} = V_B \varepsilon^{-p_l} \{ \cosh(\theta_l - \theta) \\
 & \quad + \frac{Z_{00}}{Z_B} \varepsilon^{2p_l} \sinh(\theta_l - \theta) \} \\
 & I \varepsilon^p = I_B \varepsilon^{p_l} \{ \cosh(\theta_l - \theta) \\
 & \quad + \frac{Z_B}{Z_{00}} \varepsilon^{-2p_l} \sinh(\theta_l - \theta) \}
 \end{aligned} \right\} \quad (117)$$

計算を簡単にするために

$$\tanh \theta_B = \frac{Z_B}{Z_{00} \varepsilon^{2p_l}} = \frac{Z_B}{Z_{0l}} \quad (118)$$

とおくと、

$$V \varepsilon^{-p} = V_B \varepsilon^{-p_l} \frac{\sinh \delta_{x'}}{\sinh \theta_B} \quad (119)$$

ただし $\delta_{x'} = \theta_l - \theta + \theta_B$

$\delta_{x'}$ を点 P の位置角という。

例 $y(x) = Yx$, $z(x) = Zx$ の場合には

$$\theta_l = \sqrt{YZ} \frac{1}{2} (2x_0 l + l^2), \quad l = x + x'$$

$$\theta = \sqrt{YZ} \frac{1}{2} (2x_0 x + x^2)$$

$$\begin{aligned}
 \delta_{x'} &= \sqrt{YZ} \frac{1}{2} (2x_0 l + l^2 - 2x_0 x - x^2) + \theta_B \\
 &= \sqrt{YZ} \frac{1}{2} (l - x)(2x_0 + l + x) + \theta_B
 \end{aligned}$$

6.2. 電圧分布の位置角による表示

(119) 式より P 点、 Q 点の表示を求めると

$$V_P \varepsilon^{-p_P} = V_B \varepsilon^{-p_l} \frac{\sinh \delta_{x'}}{\sinh \theta_B} \quad (120)$$

$$V_Q \varepsilon^{-p_Q} = V_B \varepsilon^{-p_l} \frac{\sinh \delta_{x''}}{\sinh \theta_B} \quad (121)$$

$$\frac{V_P \varepsilon^{-p_P}}{V_Q \varepsilon^{-p_Q}} = \frac{\sinh \delta_{x'}}{\sinh \delta_{x''}} \quad (122)$$

6.3. 電流分布の位置角による表示

(117) (118) 式より

$$I \varepsilon^p = I_B \varepsilon^{p_l} \frac{\cosh \delta_{x'}}{\cosh \theta_B} \quad (123)$$

より、 P 点、 Q 点の電流比を求めると

$$\frac{I_P \varepsilon^{p_P}}{I_Q \varepsilon^{p_Q}} = \frac{\cosh \delta_{x'}}{\cosh \delta_{x''}} \quad (124)$$

6.4. インピーダンスの位置角による表示

点 P において負荷の方向にみた インピーダンス Z_P は

$$Z_P = V_P / I_P \quad (125)$$

(120) 式より

$$V_P \varepsilon^{-p_P} = V_B \varepsilon^{-p_l} \frac{\sinh \delta_{x'}}{\sinh \theta_B} \quad (126)$$

(123) 式より

$$I_P \varepsilon^{p_P} = I_B \varepsilon^{p_l} \frac{\cosh \delta_{x'}}{\cosh \theta_B} \quad (127)$$

(125) 式に (126) (127) 式を代入すると

$$\begin{aligned}
 Z_P &= \frac{V_B \varepsilon^{p_P - p_l} \sinh \delta_{x'} \cosh \theta_B}{I_B \varepsilon^{-p_P + p_l} \cosh \delta_{x'} \sinh \theta_B} \\
 &= Z_B \varepsilon^{2(p_P - p_l)} \frac{\tanh \delta_{x'}}{\tanh \theta_B} \\
 &= Z_{00} \cdot \varepsilon^{2p_P} \cdot \tanh \delta_{x'} \quad (128)
 \end{aligned}$$

同様に、点 Q から負荷の方向にみた インピーダンスを Z_Q とすれば $Z_Q = Z_{00} \varepsilon^{2p_Q} \cdot \tanh \delta_{x''}$ (129)

となるから、点 P と点 Q とのインピーダンスの比は

$$\frac{Z_P}{Z_Q} = \frac{\varepsilon^{2p_P} \tanh \delta_{x'}}{\varepsilon^{2p_Q} \tanh \delta_{x''}} \quad (130)$$

6.5. 受電端短絡の場合

受電端を短絡すれば、 $Z_B = 0$ であるから、(118) 式より、 $\theta_B = 0$ となり、 P 点の位置角は $\delta_{x'} = \theta_l - \theta$ となる。点 P および点 Q の電圧、電流、インピーダンスを、それぞれ V_P I_P Z_P V_Q I_Q Z_Q とし、

P 点の位置角を $\delta_{x'} = \theta_l - \theta_P$

Q 点の位置角を $\delta_{x''} = \theta_l - \theta_Q$

とすると、(126) 式より

$$\begin{aligned}
 \frac{V_P}{V_Q} &= \left(\frac{V_B \varepsilon^{p_P - p_l} \sinh \delta_{x'} \sin \theta_B}{V_B \varepsilon^{p_Q - p_l} \sinh \delta_{x''} \sin \theta_B} \right)_{\theta_B \rightarrow 0} \\
 &= \frac{\varepsilon^{p_P} \sinh(\theta_l - \theta_P)}{\varepsilon^{p_Q} \sinh(\theta_l - \theta_Q)} \quad (131)
 \end{aligned}$$

$$\frac{I_P}{I_Q} = \frac{\varepsilon^{-p_P} \cosh(\theta_l - \theta_P)}{\varepsilon^{-p_Q} \cosh(\theta_l - \theta_Q)} \quad (132)$$

$$\frac{Z_P}{Z_Q} = \frac{\varepsilon^{2p_P} \tanh(\theta_l - \theta_P)}{\varepsilon^{2p_Q} \tanh(\theta_l - \theta_Q)} \quad (133)$$

送電端の電圧、電流、インピーダンスを V_A I_A Z_A とし、 Q 点の位置角を $\delta_{x''} = \theta_l - \theta_Q + \theta_B$ とする。いまの場合 $\theta_B = 0$ だから $\delta_{x''} = \theta_l - \theta_Q$ 、つぎに Q 点が、送電端まで移動したとすると、 $\theta_Q \rightarrow \theta_A = 0$ となるから、送電端の位置角は、 $\delta_{x''} = \theta_l$ となる。

(131) 式より

$$V_P = V_A \varepsilon^{p_P} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} \quad (134)$$

(132) 式より

$$I_P = I_A \varepsilon^{-p_P} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} \quad (135)$$

(128) 式より

$$\begin{aligned} Z_P &= Z_{00} \varepsilon^{2p_P} \tanh(\theta_l - \theta_P) \\ &= Z_{0P} \tanh(\theta_l - \theta_P) \end{aligned} \quad (136)$$

(129) 式より

$$Z_A = Z_{00} \tanh \theta_l \quad (137)$$

6.6. 受電端開放の場合

受電端を開放すれば、 $Z_B = \infty$ となり、点 B の位置角 θ_B は

$$\begin{aligned} \theta_B &= \tanh^{-1} \left(\frac{\infty}{Z_{00} \varepsilon^{2p_l}} \right) \\ &= \tanh^{-1} \left(\frac{\infty}{Z_{0l}} \right) = j \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (138)$$

それ故、点 P の位置角は

$$\delta x' = \theta_l - \theta_P + j \frac{\pi}{2} \quad (139)$$

しかるに

$$\sinh(\theta_l - \theta_P + j \frac{\pi}{2}) = j \cosh(\theta_l - \theta_P)$$

$$\cosh(\theta_l - \theta_P + j \frac{\pi}{2}) = j \sinh(\theta_l - \theta_P)$$

$$\tanh(\theta_l - \theta_P + j \frac{\pi}{2}) = \coth(\theta_l - \theta_P)$$

故に

$$\frac{V_P}{V_Q} = \frac{\varepsilon^{p_P} \cosh(\theta_l - \theta_P)}{\varepsilon^{p_Q} \cosh(\theta_l - \theta_Q)} \quad (140)$$

$$\frac{I_P}{I_Q} = \frac{\varepsilon^{-p_P} \sinh(\theta_l - \theta_P)}{\varepsilon^{-p_Q} \sinh(\theta_l - \theta_Q)} \quad (141)$$

$$\frac{Z_P}{Z_Q} = \frac{\varepsilon^{2p_P} \coth(\theta_l - \theta_P)}{\varepsilon^{2p_Q} \coth(\theta_l - \theta_Q)} \quad (142)$$

$$Z_P = Z_{00} \varepsilon^{2p_P} \coth(\theta_l - \theta_P) \quad (143)$$

$$Z_A = Z_{00} \coth \theta_l \quad (144)$$

6.7. 受電端の負荷インピーダンスおよび送電端の電源インピーダンスが、それぞれ特性インピーダンスに等しい場合

この場合は、(118) 式で、 $Z_B = Z_{0l}$ となるから $\theta_B = \tanh^{-1}(1) = \infty$

点 P のインピーダンス Z_P は (128) 式より

$$\begin{aligned} Z_P &= Z_{00} \varepsilon^{2p_P} \tanh(\theta_l - \theta_P + \theta_B) \\ &= Z_{00} \varepsilon^{2p_P} \tanh(\theta_l - \theta_P + \infty) = Z_{00} \varepsilon^{2p_P} \end{aligned} \quad (145)$$

となり、 Z_P は P 点の特性インピーダンスになる。

送電端の電圧、電流を V_A I_A とすれば、(122) 式より

$$\frac{V_P}{V_A} = \frac{\varepsilon^{p_P} \sinh(\theta_l - \theta_P + \infty)}{\sinh(\theta_l - 0 + \infty)} = \varepsilon^{p_P}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon^{\theta_l - \theta_P + \infty} - \varepsilon^{-\theta_l + \theta_P - \infty}}{\varepsilon^{\theta_l + \infty} - \varepsilon^{-\theta_l - \infty}} \\ &= \varepsilon^{p_P} \cdot \varepsilon^{-\theta_P} = \varepsilon^{p_P - \theta_P} \end{aligned} \quad (146)$$

ゆえに、 $V_P = V_A \varepsilon^{p_P - \theta_P}$

(124) 式より

$$\begin{aligned} \frac{I_P}{I_A} &= \frac{\varepsilon^{-p_P} \cosh(\theta_l - \theta_P + \infty)}{\cosh(\theta_l - 0 + \infty)} = \varepsilon^{-p_P} \\ & \frac{\varepsilon^{\theta_l - \theta_P + \infty} + \varepsilon^{-\theta_l + \theta_P - \infty}}{\varepsilon^{\theta_l + \infty} + \varepsilon^{-\theta_l - \infty}} \\ &= \varepsilon^{-p_P} \cdot \varepsilon^{-\theta_P} = \varepsilon^{-p_P - \theta_P} \\ \text{ゆえに } I_P &= I_A \varepsilon^{-p_P - \theta_P} = \frac{V_A}{Z_{00}} \varepsilon^{-p_P - \theta_P} \end{aligned} \quad (147)$$

(146)(147) 式は (81) 式に一致する。

第7章 分布直列インピーダンスおよび並列アドミタンスの測定

受電端を短絡および開放した場合の送電端インピーダンス Z_{As} および A_f を測定することによって、線路定数を求めることができる。

(59) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_x \varepsilon^{-p_x} &= V_B \varepsilon^{-p_l} \cosh(\theta_l - \theta_x) + Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} \sinh(\theta_l - \theta_x) \\ I_x \varepsilon^{p_x} &= I_B \varepsilon^{p_l} \cosh(\theta_l - \theta_x) + \frac{1}{Z_{00}} V_B \varepsilon^{-p_l} \sinh(\theta_l - \theta_x) \end{aligned} \right\} \quad (148)$$

$V_B = 0$ のとき

$$\begin{aligned} Z_{As} &= V_x / I_x = \varepsilon^{2p_x} Z_{00} \tanh(\theta_l - \theta_x) \\ &= Z_{0x} \tanh(\theta_l - \theta_x) \end{aligned} \quad (149)$$

$I_B = 0$ のとき

$$\begin{aligned} Z_{Af} &= V_x / I_x = \varepsilon^{2p_x} Z_{00} \coth(\theta_l - \theta_x) \\ &= Z_{0x} \coth(\theta_l - \theta_x) \end{aligned} \quad (150)$$

$$\theta_x = \int_0^x d\theta = \int_0^x \sqrt{yz} \, dx \quad (151)$$

$$\begin{aligned} Z_{00} &= \sqrt{\frac{z(x_0)}{y(x_0)}}, \quad Z_{0x} = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}}, \\ \varepsilon^{2p_x} &= \frac{Z_{0x}}{Z_{00}} \end{aligned} \quad (152)$$

$$\sqrt{Z_{Af} \cdot Z_{As}} = Z_{00} \varepsilon^{2p_x} = Z_{0x} = \sqrt{z(x)/y(x)} \quad (153)$$

$$\sqrt{Z_{As} / Z_{Af}} = \tanh(\theta_l - \theta_x) \quad (154)$$

$$\theta_l - \theta_x = \tanh^{-1} \sqrt{Z_{As} / Z_{Af}} \quad (155)$$

ゆえに、

$$\theta_x = \theta_l - \tanh^{-1} \sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} = \int_0^x \sqrt{y(x) \cdot z(x)} dx \quad (156)$$

$$\frac{d\theta_x}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} \right) / \left(1 - \frac{Z_{As}}{Z_{Af}} \right) = \sqrt{y(x) \cdot z(x)} \quad (157)$$

$$\sqrt{y(x) \cdot z(x)} = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} \right) / \left(\frac{Z_{As}}{Z_{Af}} - 1 \right) \quad (158)$$

$$\sqrt{z(x)/y(x)} = \sqrt{Z_{Af} \cdot Z_{As}} \quad (159)$$

$$Z(x) = \sqrt{Z_{Af} Z_{As}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} \right) / \left(\frac{Z_{As}}{Z_{Af}} - 1 \right) \quad (160)$$

$$y(x) = \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} \right) / \left\{ \left(\frac{Z_{As}}{Z_{Af}} - 1 \right) (\sqrt{Z_{Af} Z_{As}}) \right\} \quad (161)$$

すなわち、(160)(161)式によって線路定数を実測して計算することができる。

〔例〕 $y(x) = Yx$; $z(x) = Zx$ の場合

$$\left. \begin{aligned} \theta' &= \sqrt{YZ} x = r_0 x, \quad \theta_x = \int_{x_0}^x \theta' dx = \\ &\frac{1}{2} r_0 (x^2 - x_0^2) \\ \theta_l &= \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x_0^2), \\ \theta_l - \theta_x &= \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \end{aligned} \right\} \quad (162)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{As} &= Z_0 x \tanh(\theta_l - \theta_x) = Z_0 x \tanh \left\{ \frac{r_0}{2} (l^2 - x^2) \right\} \\ Z_{Af} &= Z_0 x \coth(\theta_l - \theta_x) = Z_0 x \coth \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (163)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{Z_{Af} \cdot Z_{As}} &= Z_0 x = \sqrt{Z/Y} \\ Z_{As}/Z_{Af} &= \tanh^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\} \\ \frac{d}{dx} \left(\sqrt{\frac{Z_{As}}{Z_{Af}}} \right) &= \frac{-r_0 x}{\cosh^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\}} \\ (Z_{As}/Z_{Af}) - 1 &= -\operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

$$\left. \begin{aligned} Z(x) &= \frac{Z_0 x \cdot (-r_0 x)}{\cosh^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\} \times [-\operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\}]} \\ &= Z_0 x \cdot r_0 x = Zx \\ y(x) &= \frac{-r_0 x}{\cosh^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\}} \cdot \\ &\quad \left[-\operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{2} r_0 (l^2 - x^2) \right\} \right] \frac{1}{Z_0 x} = Yx \end{aligned} \right\} \quad (165)$$

第8章 等価四端子網の四端子定数

送電端の電圧、電流を V_A , I_A とすると、 θ_A ; p_A は零となるから、(59) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_A &= V_B \varepsilon^{-p_l \cosh \theta_l} + Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l \sinh \theta_l} \\ I_A &= I_B \varepsilon^{p_l \cosh \theta_l} + \frac{1}{Z_{00}} V_B \varepsilon^{-p_l \sinh \theta_l} \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

あるいは

$$\left. \begin{aligned} V_A &= (\varepsilon^{-p_l \cosh \theta_l}) V_B + (Z_{00} \varepsilon^{p_l \sinh \theta_l}) I_B \\ I_A &= \left(\frac{1}{Z_{00}} \varepsilon^{-p_l \sinh \theta_l} \right) V_B + (\varepsilon^{p_l \cosh \theta_l}) I_B \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

したがって、四端子定数は

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon^{-p_l \cosh \theta_l} & B &= Z_{00} \varepsilon^{p_l \sinh \theta_l} \\ C &= \frac{1}{Z_{00}} \varepsilon^{-p_l \sinh \theta_l} & D &= \varepsilon^{p_l \cosh \theta_l} \end{aligned} \right\} \quad (168)$$

8.1 T 型等価回路

$$Z_1 = (A-1)/C, \quad Z_2 = 1/C, \quad Z_3 = (D-1)/C \quad (169)$$

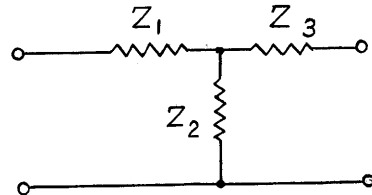


Fig. 8

$$\left. \begin{aligned} Z_2 &= Z_{00} \varepsilon^{p_l / \sinh \theta_l} \\ Z_1 &= (\varepsilon^{-p_l \cosh \theta_l} - 1) Z_{00} \varepsilon^{p_l (1/\sinh \theta_l)} \\ &= Z_{00} \coth \theta_l - Z_{00} \varepsilon^{p_l (1/\sinh \theta_l)} \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_3 &= (\varepsilon^{p_l \cosh \theta_l} - 1) Z_{00} \varepsilon^{p_l (1/\sinh \theta_l)} \\ &= Z_{00} \varepsilon^{2p_l \coth \theta_l} - Z_{00} \varepsilon^{p_l (1/\sinh \theta_l)} \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

8.2 π 型等価回路

$$Z_1 = B/(D-1), \quad Z_2 = B, \quad Z_3 = B/(A-1) \quad (172)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{00} \varepsilon^{p_l \sinh \theta_l}}{\varepsilon^{p_l \cosh \theta_l} - 1} \\ Z_2 &= Z_{00} \varepsilon^{p_l \sinh \theta_l} \\ Z_3 &= \frac{Z_{00} \varepsilon^{p_l \sinh \theta_l}}{\varepsilon^{-p_l \cosh \theta_l} - 1} \end{aligned} \right\} \quad (173)$$

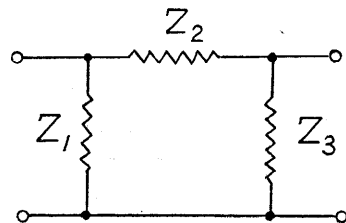


Fig. 9

第 9 章 反射および透過

9.1. 負荷インピーダンスによる反射現象

a. 電圧、電流の反射係数 (43) 式より

$$\left. \begin{aligned} V e^{-\rho} &= A e^{-\theta} + B e^{\theta} \\ I e^{\rho} &= \frac{A}{Z_{00}} e^{-\theta} - \frac{B}{Z_{00}} e^{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (174)$$

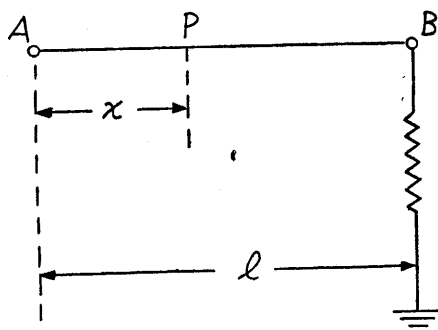


Fig. 10

両端が映像インピーダンスで、終端接続されているときは、(81) 式より

$$\left. \begin{aligned} V e^{-\rho} &= V_A e^{-\theta} \\ I e^{\rho} &= I_A e^{-\theta} \end{aligned} \right\} \quad (175)$$

となり、これは x の正の方向に伝播してゆく。

例えば (11) 図で右向き進行波を考える。

$$\begin{aligned} V_P e^{-\rho} &= A e^{-\theta} = V_A e^{-\theta} \\ I_P e^{\rho} &= A e^{-\theta} / Z_{00} = V_A e^{-\theta} / Z_{00} \\ V_P &= V_A e^{\rho} e^{-\theta} \\ I_P &= \frac{V_A e^{-\rho} e^{-\theta}}{Z_{00}} = \frac{V_A e^{\rho} e^{-\theta}}{Z_{00} e^{2\rho}} = \frac{V_P}{Z_{0P}} \end{aligned}$$

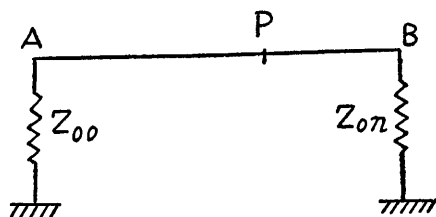


Fig. 11

これが、任意点の右向き電流であって、この形が、A 点では ρ, θ が零となるから V_A / Z_{00} となり、B 点では V_B / Z_{0n} となる。ただし $V_B = V_A e^{\rho l - \theta l}$

$$Z_{0n} = Z_{00} e^{2\rho l}$$

(174) 式は、 x の正方向に進行する波と、負方向に

進行する波との和を表している。先づ、電圧波が右方に進行して B 点に到着すれば (第10図)

$$V_B' = V_A e^{\rho l} \cdot e^{-\theta l}$$

となり、同時に、点 B において反射した V_B'' が現れる。

$V_B' V_B''$ に対応する電流を $I_B' I_B''$ とすれば、正の方向に伝播する波と、負の方向に伝播する波とでは、電圧、電流の関係において符号が異なり

$$I_B' = \frac{V_B'}{Z_{0n}} \quad I_B'' = -\frac{V_B''}{Z_{0n}}$$

また B 点の電圧平衡条件として

$$V_B' + V_B'' = Z_B (I_B' + I_B'')$$

$$\text{故に} \quad V_B' + V_B'' = Z_B \left(\frac{V_B'}{Z_{0n}} - \frac{V_B''}{Z_{0n}} \right)$$

あるいは

$$V_B'' \left(1 + \frac{Z_B}{Z_{0n}} \right) = V_B' \left(\frac{Z_B}{Z_{0n}} - 1 \right)$$

$$\text{故に} \quad \frac{V_B''}{V_B'} = \frac{Z_B - Z_{0n}}{Z_B + Z_{0n}} = m \quad (176)$$

$$\frac{I_B''}{I_B'} = \frac{Z_{0n} - Z_B}{Z_{0n} + Z_B} = -m \quad (177)$$

この m および $-m$ を、それぞれ、点 B における電圧および電流の反射係数という。

例えば $Z_B = \infty$ ならば $m = 1$

$Z_B = 0$ ならば $m = -1$

$Z_B = Z_{0n}$ ならば $m = 0$

9.1.b. 有限長線路の電圧分布

点 A から点 B に来た電圧は、 $V_B e^{\rho l - \theta l}$ 、これが B 点で反射するときは、 $m(V_A e^{\rho l - \theta l})$ 、これが A 点に達するときは $m V_A e^{-2\theta l}$ 、A 点は、インピーダンス零とすると、A 点の反射係数は (-1) であるから $-m V_A e^{-2\theta l}$ が B 点に向って反射する。これが B 点に達するときは、 $-m V_A e^{-3\theta l + \rho l}$ となる。このような反射波の往復を、わかりやすく示すと下記のようになる。

$$\begin{array}{lcl} \text{A} & & \text{B} \\ \oplus & V_A \longrightarrow & V_A e^{-\theta l + \rho l} \\ & m V_A e^{-2\theta l} \longleftarrow & m V_A e^{-\theta l + \rho l} \quad \ominus \\ \oplus & -m V_A e^{-2\theta l} \longrightarrow & -m V_A e^{-3\theta l + \rho l} \\ & -m^2 V_A e^{-4\theta l} \longleftarrow & -m^2 V_A e^{-3\theta l + \rho l} \quad \ominus \\ \oplus & m^2 V_A e^{-4\theta l} \longrightarrow & m^2 V_A e^{-5\theta l + \rho l} \end{array}$$

点 A から点 B に向う電圧の点 A における総和 V^+ は

$$\begin{aligned} V^+ &= V_A - m V_A e^{-2\theta l} + m^2 V_A e^{-4\theta l} - \dots \\ &= V_A (1 - m e^{-2\theta l} + m^2 e^{-4\theta l} - \dots) \end{aligned}$$

$$=V_A/(1+m\varepsilon^{-2\theta_l}) \quad (178)$$

この電圧による点Aから x の距離にある点Pの電圧 V_{P^+} は、

$$V_{P^+}=V^+\varepsilon^{-\theta_x+p_x}=\frac{V_A\varepsilon^{-\theta_x+p_x}}{1+m\varepsilon^{-2\theta_l}} \quad (179)$$

点Bから点Aに向う電圧の点Bにおける総和 V^- は

$$\begin{aligned} V^- &= mV_A\varepsilon^{-\theta_l+p_l} - m^2V_A\varepsilon^{-3\theta_l+p_l} + \dots \\ &= mV_A\varepsilon^{-\theta_l+p_l}(1-m\varepsilon^{-2\theta_l}+m^2\varepsilon^{-4\theta_l}-\dots) \\ &= \frac{mV_A\varepsilon^{-\theta_l}}{1+m\varepsilon^{-2\theta_l}} \cdot \varepsilon^{p_l} \quad (180) \end{aligned}$$

この電圧 V^- による点Aから x の距離にある点Pの電圧 V_{P^-} は、

$$V_{P^-}=V^-\varepsilon^{-(\theta_l-\theta_x)}-(p_l-p_x)$$

$$= \frac{mV_A\varepsilon^{-2\theta_l+\theta_x}}{1+m\varepsilon^{-2\theta_l}} \cdot \varepsilon^{p_x} \quad (181)$$

$$\begin{aligned} V_P &= V_{P^+} + V_{P^-} = \frac{\varepsilon^{-\theta_x+m\varepsilon^{-2\theta_l+\theta_x}}}{1+m\varepsilon^{-2\theta_l}} \cdot V_A\varepsilon^{p_x} \\ &= \frac{(Z_B+Z_{0n})\varepsilon^{\theta_l-\theta_x} + (Z_B-Z_{0n})\varepsilon^{-\theta_l+\theta_x}}{(Z_B+Z_{0n})\varepsilon^{\theta_l} + (Z_B-Z_{0n})\varepsilon^{-\theta_l}} V_A\varepsilon^{p_x} \\ &= \frac{Z_B(\varepsilon^{\theta_l-\theta_x} + \varepsilon^{-\theta_l+\theta_x}) + Z_{0n}(\varepsilon^{\theta_l-\theta_x} - \varepsilon^{-\theta_l+\theta_x})}{Z_B(\varepsilon^{\theta_l} + \varepsilon^{-\theta_l}) + Z_{0n}(\varepsilon^{\theta_l} - \varepsilon^{-\theta_l})} V_A\varepsilon^{p_x} \\ &= \frac{Z_B \cosh(\theta_l - \theta_x) + Z_{0n} \sinh(\theta_l - \theta_x)}{Z_B \cosh \theta_l + Z_{0n} \sinh \theta_l} V_A\varepsilon^{p_x} \\ &= V_x \quad (182) \end{aligned}$$

となつて、これは(67)式と一致する。

9.2. 異種の無限長線路の接続点における反射および透過

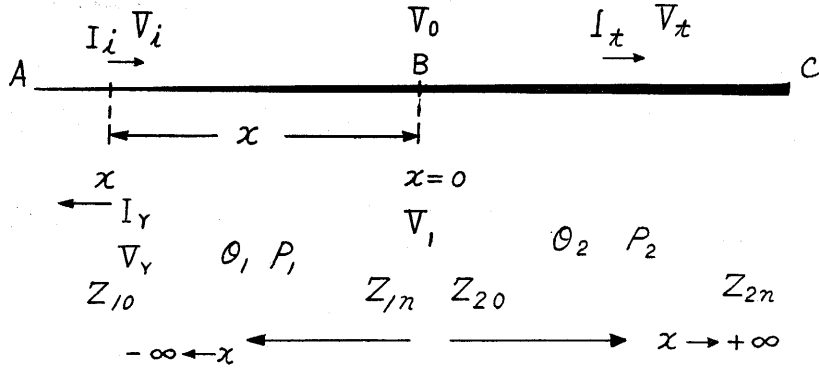


Fig. 12

特性インピーダンスおよび伝達定数を異にする二つの無限長線路が、点Bで接続されている場合、Aの方からBに向つて伝播してくる入射波の、任意の点 x における電圧を V_i 、電流を I_i とし、かつ $x=0$ の点(接続点)における入射波の電圧を V_0 とすれば、

$$\left. \begin{aligned} V_i &= V_0\varepsilon^{-(\theta_1-p_1)} \\ I_i &= \frac{V_0}{Z_{10}}\varepsilon^{-(\theta_1+p_1)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ただし } x=0 \text{ のとき} \\ &\theta_1=p_1=0 \\ &V_i=V_0, I_i=V_0/Z_{10} \end{aligned} \quad (183)$$

$$\left. \begin{aligned} V_r &= V_1\varepsilon^{\theta_1+p_1} \\ I_r &= -\frac{V_1}{Z_{10}}\varepsilon^{\theta_1-p_1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &V_1 \text{ は } x=0 \text{ 点の反射波} \\ &\text{で、この点では} \\ &\theta_1=p_1=0 \\ &V_r=V_1, I_r=-V_1/Z_{10} \end{aligned} \quad (184)$$

$$\left. \begin{aligned} V_t &= V_2\varepsilon^{-(\theta_2-p_2)} \\ I_t &= \frac{V_2}{Z_{20}}\varepsilon^{-(\theta_2+p_2)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &V_2 \text{ は } x=0 \text{ 点の透過} \\ &\text{電圧、このとき} \\ &V_t=V_2, I_t=V_2/Z_{20} \end{aligned} \quad (185)$$

B点すなわち $x=0$ の境界条件は、次式を満足しなければならない。

$$[V_i + V_r = V_t]_{x=0} \quad (186)$$

$$[I_i + I_r = I_t]_{x=0} \quad (187)$$

故に、 $V_0 + V_1 = V_2$

$$\frac{V_0}{Z_{10}} - \frac{V_1}{Z_{10}} = \frac{V_2}{Z_{20}}$$

したがってB点における電圧の反射係数 m_r および透過係数 m_t は

$$m_r = \frac{V_1}{V_0} = \frac{Z_{20} - Z_{10}}{Z_{10} + Z_{20}} \quad (188)$$

$$m_t = \frac{V_2}{V_0} = \frac{2Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}} = 1 + m_r \quad (189)$$

同じB点の、電流の反射係数 n_r 、透過係数 n_t は

$$n_r = \frac{(I_r)_{x=0}}{(I_i)_{x=0}} = -\frac{V_1}{V_0} = \frac{Z_{10} - Z_{20}}{Z_{10} + Z_{20}} = -m_r \quad (190)$$

$$n_t = \frac{(I_t)_{x=0}}{(I_i)_{x=0}} = \frac{Z_{10}V_2}{Z_{20}V_0} = \frac{2Z_{10}}{Z_{10} + Z_{20}} = 1 - m_r \quad (191)$$

9.3. 三種類の線路の接続点における反射

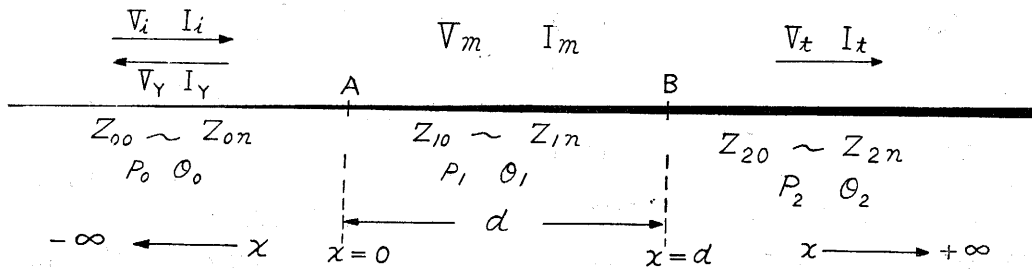


Fig. 13

半無限長線路と半無限長線路との間に、第3の d なる長さの有限長線路が接続されているとする。各部の特性インピーダンスおよび伝播定数を、それぞれ、第13図のように、 $Z_{00} \sim Z_{0n}$, p_0 , θ_0 , $Z_{10} \sim Z_{1n}$, p_1 , θ_1 , $Z_{20} \sim Z_{2n}$, p_2 , θ_2 とする。 $x=0$ の点Aに入射してくる電圧を V_i , 電流を I_i とし、点Aで反射する電圧を V_r , 電流を I_r とし、AからBまでの間の線路の電圧を V_m , 電流を I_m とし、点Bから透過してゆく波の電圧を V_t , 電流を I_t とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \text{入射波は } V_i &= V_0 \varepsilon^{-(\theta_0 - p_0)} \\ I_i &= \frac{V_i}{Z_{00}} = \frac{V_0}{Z_{0n}} \varepsilon^{-(\theta_0 + p_0)} \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

ただし、 $x=0$ のとき $\theta_0 = p_0 = 0$, $Z_{00} = Z_{0n} \varepsilon^{2p_0}$
このとき $V_i = V_0$, $I_i = V_0/Z_{0n}$, $V_i/I_i = Z_{00}$

$$\left. \begin{aligned} \text{反射波は } V_r &= V_1 \varepsilon^{\theta_0 + p_0} \\ I_r &= -\frac{V_r}{Z_{00}} = -\frac{V_1}{Z_{0n}} \varepsilon^{\theta_0 - p_0} \end{aligned} \right\} \quad (193)$$

ただし $x=0$ のとき $\theta_0 = p_0 = 0$ このとき

$$V_r = V_1, \quad I_r = -V_1/Z_{0n}$$

有限長線路 AB 間における波は

$$\left. \begin{aligned} V_m &= V^+ \varepsilon^{-(\theta_1 - p_1)} + V^- \varepsilon^{(\theta_1 + p_1)} \\ I_m &= \frac{V^+}{Z_{1n}} \varepsilon^{-(\theta_1 + p_1)} - \frac{V^-}{Z_{1m}} \varepsilon^{(\theta_1 - p_1)} \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

ただし Z_{1m} は AB 間の m 点における特性インピーダンスとする。

また、 $x=0$ の点では $\theta_1 = p_1 = 0$

$$V_m = V^+ + V^-, \quad Z_{10} \varepsilon^{2p_1} = Z_{1n}$$

$$I_m = \frac{V^+}{Z_{10}} - \frac{V^-}{Z_{10}}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{透過波は } V_t &= V_2 \varepsilon^{-(\theta_2 - p_2)} \\ I_t &= \frac{V_t}{Z_{2n}} = \frac{V_2}{Z_{20}} \varepsilon^{-(\theta_2 + p_2)} \end{aligned} \right\} \quad (195)$$

ただし、 $Z_{2n} = Z_{20} \varepsilon^{2p_2}$

また $x=d$ のとき $\theta_2 = 0$, $p_2 = 0$

$$V_t = V_2, \quad I_t = V_2/Z_{20}$$

いま、 $x=0$ なる点Aと、 $x=d$ なる点Bにおいて境

界条件を書けば

$$x=0 \text{ において } V_0 + V_1 = V^+ + V^-, \quad I_i + I_r = I_m$$

$$\text{故に、} (V_0 - V_1)/Z_{0n} = (V^+ - V^-)/Z_{10} \quad (196)$$

$x=d$ において

$$\left. \begin{aligned} V_m &= V_i \text{ より } V^+ \varepsilon^{-(\theta_1 - p_1)} + V^- \varepsilon^{(\theta_1 + p_1)} = V_2 \\ I_m &= I_i \text{ より } \frac{V^+}{Z_{10}} \varepsilon^{-(\theta_1 + p_1)} - \frac{V^-}{Z_{10}} \varepsilon^{(\theta_1 - p_1)} = \frac{V_2}{Z_{20}} \end{aligned} \right\} \quad (197)$$

(197) 式より

$$\left. \begin{aligned} (V^+ \varepsilon^{-(\theta_1 - p_1)} + V^- \varepsilon^{(\theta_1 + p_1)}) \\ = \frac{Z_{20}}{Z_{10}} (V^+ \varepsilon^{-(\theta_1 + p_1)} - V^- \varepsilon^{(\theta_1 - p_1)}) \end{aligned} \right\} \quad (198)$$

$$\varepsilon^{2p_1} Z_{10} (V^+ \varepsilon^{-\theta_1} + V^- \varepsilon^{\theta_1}) = Z_{20} (V^+ \varepsilon^{-\theta_1} - V^- \varepsilon^{\theta_1}) \quad (199)$$

$$\left(1 - \frac{Z_{20}}{Z_{10} \varepsilon^{2p_1}}\right) V^+ \varepsilon^{-\theta_1} + \left(1 + \frac{Z_{20}}{Z_{10} \varepsilon^{2p_1}}\right) V^- \varepsilon^{\theta_1} = 0 \quad (200)$$

$$\begin{aligned} V^- &= \frac{Z_{20} - Z_{10} \varepsilon^{2p_1}}{Z_{10} \varepsilon^{2p_1} + Z_{20}} V^+ \varepsilon^{-2\theta_1} \\ &= \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{1n} + Z_{20}} V^+ \varepsilon^{-2\theta_1} \end{aligned} \quad (201)$$

また、(196) 式より

$$V_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 + \frac{Z_{0n}}{Z_{10}}\right) V^+ + \left(1 - \frac{Z_{0n}}{Z_{10}}\right) V^- \right\} \quad (203)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{Z_{0n}}{Z_{10}}\right) V^+ + \left(1 + \frac{Z_{0n}}{Z_{10}}\right) V^- \right\} \quad (204)$$

$$\text{故に、} m_r = \frac{V_1}{V_0} = \frac{(Z_{10} - Z_{0n}) V^+ + (Z_{10} + Z_{0n}) V^-}{(Z_{10} + Z_{0n}) V^+ + (Z_{10} - Z_{0n}) V^-} \quad (205)$$

(201) 式を代入して

$$\begin{aligned} & \frac{(Z_{10} - Z_{0n}) + (Z_{10} + Z_{0n}) \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{1n} + Z_{20}} \varepsilon^{-2\theta_1}}{(Z_{10} + Z_{0n}) + (Z_{10} - Z_{0n}) \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{1n} + Z_{20}} \varepsilon^{-2\theta_1}} \\ &= \frac{\frac{Z_{10} - Z_{0n}}{Z_{10} + Z_{0n}} + \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{1n} + Z_{20}} \varepsilon^{-2\theta_1}}{1 + \frac{Z_{10} - Z_{0n}}{Z_{10} + Z_{0n}} \cdot \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{1n} + Z_{20}} \cdot \varepsilon^{-2\theta_1}} \end{aligned} \quad (206)$$

$$m_r' = \frac{Z_{10} - Z_{0n}}{Z_{10} + Z_{0n}} \quad (207), \quad m_r'' = \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{1n} + Z_{20}} \quad (208)$$

とおけば、反射係数 m_r は

$$m_r = \frac{m_r' + m_r'' \varepsilon^{-2\theta_1}}{1 + m_r' \cdot m_r'' \cdot \varepsilon^{-2\theta_1}} \quad (209)$$

ただし、 m_r' は、 $Z_{00} \sim Z_{0n}$ の線路と $Z_{10} \sim Z_{1n}$ の線路の接合点における反射係数、 m_r'' は、 $Z_{10} \sim Z_{1n}$ の線路と $Z_{20} \sim Z_{2n}$ の線路との接合点における反射係数で、前節で求められた反射係数に相当する意味のものである。

9.4. インピーダンス整合

いま、上記の三つの線路が何れも無損失線路であって、

$$Z_{20}Z_{0n} = Z_{10} \cdot Z_{1n} = Z_{10}^2 \varepsilon^{2p_1} = Z_{1n}^2 \varepsilon^{-2p_1} \quad (210)$$

であり、かつ、 $2\theta_1 = \pm j\pi$ となるような距離 d を求めることができるならば、すなわち

$$\left(\theta_1 = j \frac{1}{2} \pi \right) x = d \text{ のとき} \quad (211)$$

なる関係があるときは、点Aにおける反射係数は零となる。

証明

$$m_r' = \frac{Z_{10} - Z_{0n}}{Z_{10} + Z_{0n}} = \frac{\varepsilon^{-p_1} \sqrt{Z_{20}Z_{0n}} - Z_{0n}}{\varepsilon^{-p_1} \sqrt{Z_{20}Z_{0n}} + Z_{0n}} = \frac{\varepsilon^{-p_1} - \frac{\sqrt{Z_{0n}}}{\sqrt{Z_{20}}}}{\varepsilon^{-p_1} + \frac{\sqrt{Z_{0n}}}{\sqrt{Z_{20}}}} \quad (212)$$

$$m_r'' = \frac{Z_{20} - Z_{1n}}{Z_{20} + Z_{1n}} = \frac{Z_{20} - \varepsilon^{p_1} \sqrt{Z_{20}Z_{0n}}}{Z_{20} + \varepsilon^{p_1} \sqrt{Z_{20}Z_{0n}}} = \frac{\varepsilon^{-p_1} - \frac{\sqrt{Z_{0n}}}{\sqrt{Z_{20}}}}{\varepsilon^{-p_1} + \frac{\sqrt{Z_{0n}}}{\sqrt{Z_{20}}}} \quad (213)$$

$$\text{故に、} \quad m_r' = m_r'' \quad (214)$$

したがって m_r の分子は

$$m_r' (1 + \frac{m_r''}{m_r'} \cdot \varepsilon^{-2\theta_1}) = m_r' (1 + \varepsilon^{-j\pi}) = 0 \quad (215)$$

第10章 二つの分布定数回路の接続

10.1. 位置角を用いる場合

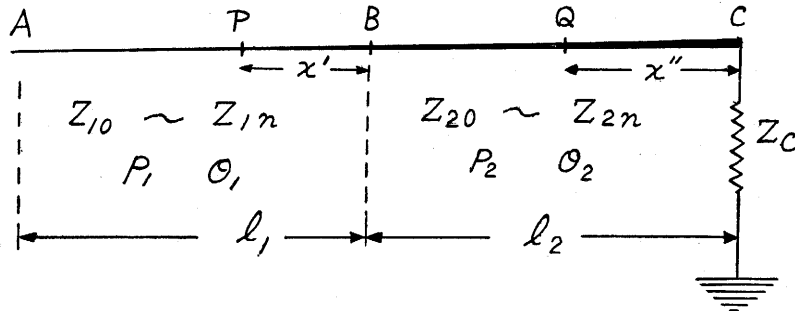


Fig. 14

$$V_{B\varepsilon} - p_1 = V_{A\varepsilon} - \theta_1 \quad V_B \rightarrow V_A \text{ のとき } p_1 \rightarrow 0 \quad \theta_1 \rightarrow 0$$

$$V_{C\varepsilon} - p_2 = V_{B\varepsilon} - \theta_2 \quad V_C \rightarrow V_B \text{ のとき } p_2 \rightarrow 0 \quad \theta_2 \rightarrow 0$$

$$\tanh \theta_c = \frac{Z_c}{Z_{2n}}, \quad \theta_c = \tanh^{-1} \frac{Z_c}{Z_{2n}} \quad (216)$$

$$\text{点Bの位置角: } \theta_B' = \theta_2 + \theta_c = \int_0^{l_2} d\theta_2 + \theta_c \quad (217)$$

従って点Bの送電端インピーダンス Z_B は

$$Z_B = Z_{20} \tanh \theta_B' = Z_{20} \tanh(\theta_2 + \theta_c) \quad (218)$$

すなわち線路ABの終点Bに Z_B なるインピーダンスが接続されたものと考えられる。しかし、この θ_B' は線路BCの始点としての値であって、線路ABの終点としての値は

$$\tanh \theta_B = \frac{Z_B}{Z_{1n}} = \frac{Z_{20}}{Z_{1n}} \tanh(\theta_2 + \theta_c) \quad (219)$$

$Z_{1n} = Z_{20}$ のときは $\theta_B = \theta_B'$ となるが、一般には、BCの始点としての位置角と、ABの終点としての位

置角とは異なる。送電端Aの位置角 θ_A は

$$\theta_A = \theta_1 + \theta_B \quad (220)$$

従って、A点の送電端インピーダンス Z_A は

$$Z_A = Z_{10} \tanh \theta_A \quad (221)$$

$$I_A = \frac{V_A}{Z_A} = \frac{V_A}{Z_{10} \tanh \theta_A} \quad (222)$$

線路AB上の任意の一点Pの位置角 θ_P は、点Bから点Pまでの距離を x' とすると

$$\theta_P = \theta_1 - \int_0^{l_1 - x'} d\theta_1 + \theta_B = \int_{l_1 - x'}^{l_1} d\theta_1 + \theta_B \quad (223)$$

P点の電圧 V_P 、電流 I_P は

$$\frac{V_{P\varepsilon} - p_P}{V_A} = \frac{\sinh \theta_P}{\sinh \theta_A}, \quad \frac{I_{P\varepsilon} p_P}{I_A} = \frac{\cosh \theta_P}{\cosh \theta_A} \quad (224)$$

B点の電圧 V_B 、電流 I_B は

$$\frac{V_{B\varepsilon} - p_1}{V_A} = \frac{\sinh \theta_B}{\sinh \theta_A}, \quad \frac{I_{B\varepsilon} p_1}{I_A} = \frac{\cosh \theta_B}{\cosh \theta_A} \quad (225)$$

次に、線路BC上の任意の一点Qにおける電圧 V_Q 、電

流 I_Q は、

$$\frac{V_Q \varepsilon - p_Q}{V_B} = \frac{\sinh(\theta_2 - \int_0^{l_2-x''} d\theta_2 + \theta_c)}{\sinh(\theta_2 + \theta_c)} = \frac{\sinh \theta_Q}{\sinh \theta_B'} \quad (226)$$

(225) を代入して

$$V_Q \varepsilon - p_Q = \frac{V_A \varepsilon^{p_1} \sinh \theta_B}{\sinh \theta_A} \cdot \frac{\sinh \theta_Q}{\sinh \theta_B'} \quad (226)'$$

$$I_Q \varepsilon^{p_Q} / I_B = \cosh \theta_Q / \cosh \theta_B' \quad (227)$$

故に、

$$I_Q \varepsilon^{p_Q} = \frac{I_A \varepsilon^{-p_1} \cosh \theta_B}{\cosh \theta_A} \cdot \frac{\cosh \theta_Q}{\cosh \theta_B'} \quad (227)'$$

受電端 c における電圧 V_c 電流 I_c は

$$V_c \varepsilon^{-p_2} / V_Q \varepsilon^{-p_Q} = \sinh \theta_c / \sinh \theta_Q \quad (228)$$

故に、

$$\begin{aligned} V_c \varepsilon^{-p_2} &= V_B \frac{\sinh \theta_Q}{\sinh \theta_B'} \cdot \frac{\sinh \theta_c}{\sinh \theta_Q} \\ &= V_A \varepsilon^{p_1} \frac{\sinh \theta_B}{\sinh \theta_A} \cdot \frac{\sinh \theta_c}{\sinh \theta_B'} \end{aligned} \quad (228)'$$

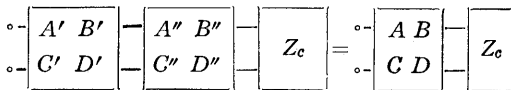
$$I_c \varepsilon^{p_2} / I_Q \varepsilon^{p_Q} = \cosh \theta_c / \cosh \theta_Q \quad (229)$$

従って

$$\begin{aligned} I_c \varepsilon^{p_2} &= I_Q \varepsilon^{p_Q} \frac{\cosh \theta_c}{\cosh \theta_Q} = I_B \frac{\cosh \theta_Q}{\cosh \theta_B'} \cdot \frac{\cosh \theta_c}{\cosh \theta_Q} \\ &= I_A \varepsilon^{-p_1} \frac{\cosh \theta_B}{\cosh \theta_A} \cdot \frac{\cosh \theta_c}{\cosh \theta_B'} \end{aligned} \quad (229)'$$

10.2. 4端子定数を用いる場合

前述第8章で4端子定数を求めたが、二つの分布定数回路を接続するときにも、二箇の四端子網の縦続として、等価四端子網定数を求めてもよい。



(Fig. 15)

$$\left. \begin{aligned} A' &= \varepsilon^{-p_1} \cosh \theta_1 & B' &= Z_{10} \varepsilon^{p_1} \sinh \theta_1 \\ C' &= \frac{1}{Z_{10}} \varepsilon^{-p_1} \sinh \theta_1 & D' &= \varepsilon^{p_1} \cosh \theta_1 \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

$$\left. \begin{aligned} A'' &= \varepsilon^{-p_2} \cosh \theta_2 & B'' &= Z_{20} \varepsilon^{p_2} \sinh \theta_2 \\ C'' &= \frac{1}{Z_{20}} \varepsilon^{-p_2} \sinh \theta_2 & D'' &= \varepsilon^{p_2} \cosh \theta_2 \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= A'A'' + B'C'' \\ B &= A'B'' + B'D'' \\ C &= C'A'' + D'C'' \\ D &= C'B'' + D'D'' \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

特に、インピーダンスの合った四端子網であるとき
は、 $Z_{20} = Z_{10} \varepsilon^{2p_1}$ となるから、

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon^{-p_1-p_2} \cdot \cosh(\theta_1+\theta_2) \\ B &= Z_{10} \cdot \varepsilon^{p_1+p_2} \cdot \sinh(\theta_1+\theta_2) \\ C &= \frac{1}{Z_{10}} \varepsilon^{-p_1-p_2} \cdot \sinh(\theta_1+\theta_2) \\ D &= \varepsilon^{p_1+p_2} \cosh(\theta_1+\theta_2) \end{aligned} \right\} \quad (232)'$$

$$\left. \begin{aligned} V_A &= AV_c + BI_c \\ I_A &= CV_c + DI_c \end{aligned} \right\} \quad (233)$$

点Aにおける送電端インピーダンス Z_A は

$$Z_A = \frac{AZ_c + B}{cZ_c + D} \quad (234) \quad I_A = \frac{V_A}{Z_A} \quad (235)$$

第11章 線路の共振

11.1. 線路定数が距離に比例する場合

均等分布定数回路において、 R, G を、 $\omega L, \omega C$ に
対して省略すれば

$$\left. \begin{aligned} Z_0 &= \sqrt{\frac{L}{C}}, & r &= j\omega\sqrt{LC} = j\beta = j\frac{2\pi}{\lambda} \\ f &= 1/\lambda\sqrt{LC} \end{aligned} \right\} \quad (236)$$

このような線路において、共振現象があることは、
周知の通りである。

不均等分布定数回路の共振現象は、どのようなもの
であろうか。最も簡単な例として、線路定数が距離に
比例する場合を考える。

$$z(x) = Zx, \quad y(x) = Yx \quad (237)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{0x} &= \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}} = \sqrt{\frac{Z}{Y}} = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{G+j\omega C}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_{00} \\ \text{従って、} & \quad p=0 \end{aligned} \right\} \quad (238)$$

$$\theta' = \sqrt{y(x)} \cdot z(x) = \sqrt{YZ} x = j\omega\sqrt{LC} x \quad (239)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \int_{x_0}^x \theta' dx = j\frac{1}{2} \omega\sqrt{LC} (x^2 - x_0^2) = j\beta = jq\beta_0 \\ \text{ただし、} & \quad q = \frac{1}{2} (x^2 - x_0^2), \quad \beta_0 = \omega\sqrt{LC} \end{aligned} \right\}$$

$$(240)$$

$$v = \frac{\omega}{\beta_0 x} = \frac{1}{x\sqrt{LC}} : \text{位相速度} \quad (241)$$

波長の定義として、 $q\beta_0 = 2\pi$ になるときの $(x-x_0)$
を一波長とすれば

$$q\beta_0 = \frac{1}{2} (x^2 - x_0^2) \beta_0 = \frac{1}{2} (\lambda^2 + 2\lambda x_0) \beta_0 = 2\pi \quad (242)$$

$$\text{故に} \quad \lambda^2 + 2\lambda x_0 - 4\pi/\beta_0 = 0 \quad (243)$$

$x_0 = 0$ のときの λ を λ_1 とすれば

$$\lambda_1 = \sqrt{4\pi/\beta_0} \quad (244)$$

$$\text{従って} \quad \lambda^2 + 2\lambda x_0 - \lambda_1^2 = 0 \quad (245)$$

$$\lambda = -x_0 + \sqrt{x_0^2 + \lambda_1^2}$$

$$\left. \begin{aligned} x_0=0 \text{ のときの } \lambda \text{ を } \lambda_1 \text{ として,} & \lambda_1 \\ x_0=\lambda_1 \text{ のときの } \lambda \text{ を } \lambda_2=\lambda_1(-1+\sqrt{2})=(0.414)\lambda_1 \\ x_0=\lambda_1+\lambda_2 \text{ のときの } \lambda \text{ を } \lambda_3=\lambda_1(-\sqrt{2}+\sqrt{3})=(0.318)\lambda_1 \\ x_0=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \text{ のときの } \lambda \text{ を } \lambda_4=\lambda_1(-\sqrt{3}+2)=(0.268)\lambda_1 \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

すなわち、波長は次第に短くなる。

11.1.a. 受電端短絡の場合

送電端からみたインピーダンス Z_A は、(137) より

$$Z_A = Z_{00} \tanh \theta_l$$

$$\theta_l = j\beta \frac{1}{2} \{(x_0 + l)^2 - x_0^2\} = j\omega \sqrt{LC} (x_0 l + \frac{l^2}{2}) \quad (247)$$

$$\text{故に } Z_A = j \frac{L}{C} \tan \{ \omega \sqrt{LC} (x_0 l + \frac{l^2}{2}) \} \quad (248)$$

Z_A は純リアクタンスで、

$$\{ \omega \sqrt{LC} (x_0 l + \frac{l^2}{2}) \} = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

ならば、 $Z_A = \pm j\infty$ となり、これは、集中定数回路の並列共振の場合に相当する。

$$x_0=0 \text{ として } \omega \sqrt{LC} \cdot \frac{l^2}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi$$

$$l^2 = \frac{(n + \frac{1}{2})}{f \sqrt{LC}} = \lambda^2 (\frac{n}{2} + \frac{1}{4})$$

$$l = \lambda \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (249)$$

$$(134) \text{ より } V_P = V_A \epsilon^{pP} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l}$$

$$(135) \text{ より } I_P = I_A \epsilon^{-pP} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l}$$

$$S \rightarrow 0 \text{ のとき } \theta_P \rightarrow 0 \quad pP \rightarrow 0 \quad V_P \rightarrow V_A$$

$$S \rightarrow l \text{ のとき } \theta_P \rightarrow \theta_l \quad V_P \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{aligned} \theta_l &= j\omega \sqrt{LC} \left(\frac{l^2}{2} \right) \\ \theta_P &= j\omega \sqrt{LC} \left(\frac{S^2}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

とすると

$$\begin{aligned} V_P &= V_A \epsilon^{pP} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} = V_A \frac{\sin |\theta_l - \theta_P|}{\sin |\theta_l|} \\ &= V_A \frac{\sin \{ (n + \frac{1}{2})\pi - \frac{2}{l^2} (n + \frac{1}{2})\pi \cdot \frac{S^2}{2} \}}{\sin (n + \frac{1}{2})\pi} \\ &= \pm V_A \sin \{ (n + \frac{1}{2})\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \} \end{aligned} \quad (251)$$

ただし、 n が偶数のときは+をとり奇数のときは-をとる。

$$\begin{aligned} I_P &= I_A \epsilon^{-pP} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} = \frac{V_A}{Z_A} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} \\ &= \frac{V_A \cosh(\theta_l - \theta_P)}{Z_{00} \tanh \theta_l \cosh \theta_l} = \frac{V_A}{Z_{00}} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} \\ &= \frac{V_A}{jZ_{00}} \frac{\cos \{ (n + \frac{1}{2})\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \}}{\sin (n + \frac{1}{2})\pi} \\ &= \pm \frac{V_A}{jZ_{00}} \cos \{ (n + \frac{1}{2})\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \} \end{aligned} \quad (252)$$

ただし、 n が偶数のとき+、奇数のとき-

次に、 $\theta_l = jn\pi$ ($n=1, 2, \dots$)

のときは、 $Z_A = Z_{00} \tanh \theta_l = 0$ となり、これは集中定数回路の直列共振の場合に相当する。

$$x_0=0 \text{ として } \omega \sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2} l^2 = n\pi$$

$$\begin{aligned} \text{故に } l^2 &= \frac{2n\pi}{\omega \sqrt{LC}} = \frac{n}{2} \lambda^2 \\ l &= \lambda \sqrt{n/2}, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (253)$$

(135) 式より

$$\begin{aligned} I_P &= I_A \epsilon^{-pP} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} \\ &= I_A \frac{\cos \{ n\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \}}{\cos n\pi} = \pm I_A \cos \{ n\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \} \end{aligned} \quad (254)$$

ただし、 n が偶数のとき+、奇数のとき-

(134) 式より

$$\begin{aligned} V_P &= V_A \epsilon^{pP} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} \\ &= \frac{Z_A I_A \sin(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} = \frac{jZ_{00} \tan \theta_l \cdot I_A \sin(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} \\ &= jZ_{00} I_A \frac{\sin(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} = jZ_{00} I_A \frac{\sin \{ n\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \}}{\cos n\pi} \\ &= \pm jZ_{00} I_A \sin \{ n\pi (1 - \frac{S^2}{l^2}) \} \end{aligned} \quad (255)$$

ただし、 n が偶数のとき+、奇数のとき-

11.1.b. 受電端開放の場合

(144) 式より

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_{00} \coth \theta_l = Z_{00} \coth (j\omega \sqrt{LC} \frac{1}{2} l^2) \\ &= -j \cot (\omega \sqrt{LC} \frac{1}{2} l^2) \end{aligned} \quad (256)$$

$$\omega \sqrt{LC} \frac{1}{2} l^2 = (n + \frac{1}{2})\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{の場合は、 } Z_A = Z_{00} \coth \theta_l = 0 \quad (257)$$

これは、集中定数回路の直列共振の場合に相当する。

$$l^2 = 2(n + \frac{1}{2})\pi / (\omega \sqrt{LC}) = \lambda^2 (n + \frac{1}{2})/2 \quad (258)$$

$$l = \lambda \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} = \lambda \sqrt{\frac{2n+1}{2}}, \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

(141) 式より

$$I_P = I_A \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} = \pm I_A \sin \left\{ \omega \sqrt{LC} \frac{l^2}{2} - \omega \sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2} S^2 \right\} = \pm I_A \sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi - \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \frac{S^2}{l^2} \right\}$$

$$= \pm I_A \sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left(1 - \frac{S^2}{l^2} \right) \right\} \quad (259)$$

ただし、 n が偶数のとき +、奇数のとき -

(140) 式より

$$V_P = V_A \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} = Z_A I_A \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l}$$

$$= -jZ_{00} I_A \frac{\cot \theta_l \cdot \cos(\theta_l - \theta_P)}{\cos \theta_l} = -jZ_{00} I_A \frac{\cos(\theta_l - \theta_P)}{\sin \theta_l}$$

$$= \pm jZ_{00} I_A \cos \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \pi \left(1 - \frac{S^2}{l^2} \right) \right\} \quad (260)$$

ただし、 n が偶数のとき -、奇数のとき +、

$$\text{次に、} \omega \sqrt{LC} \frac{1}{2} l^2 = n\pi \quad (261)$$

$$\text{の場合は、} Z_A = Z_{00} \coth \theta_l = \pm j\infty \quad (262)$$

これは、集中定数回路の並列共振の場合に相当する。

$$l^2 = 2n\pi / (\omega \sqrt{LC}) = \frac{1}{2} \lambda^2 n$$

$$l = \lambda \sqrt{n/2} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (263)$$

(140) 式より

$$V_P = V_A \cosh(\theta_l - \theta_P) / \cosh \theta_l = V_A \cos(n\pi - n\pi \frac{S^2}{l^2})$$

$$= \pm V_A \cos \left\{ n\pi \left(1 - \frac{S^2}{l^2} \right) \right\} \quad (264)$$

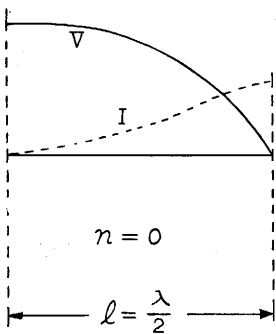
$$I_P = I_A \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} = \frac{V_A}{Z_A} \frac{\sin(\theta_l - \theta_P)}{\sin \theta_l}$$

$$= -\frac{V_A \sin(\theta_l - \theta_P)}{jZ_{00} \cot \theta_l \sin \theta_l} = -\frac{V_A}{jZ_{00}} \frac{\sin(\theta_l - \theta_P)}{\cos \theta_l}$$

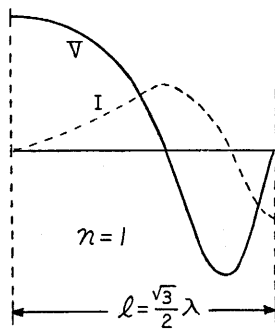
$$= \pm \frac{V_A}{jZ_{00}} \sin \left\{ n\pi \left(1 - \frac{S^2}{l^2} \right) \right\} \quad (265)$$

ただし、 n が偶数のとき +、奇数のとき -

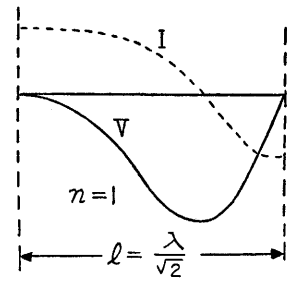
電圧、電流分布状況の一例を、第16図に示す。

第 16 図 線 路 の 共 振 [$z(x) = Z_0 x$, $y(x) = Y_0 x$]

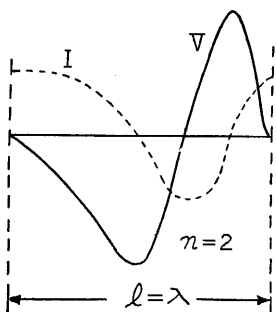
短 絡 反 共 振



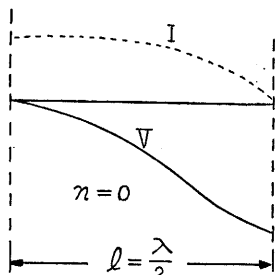
短 絡 反 共 振



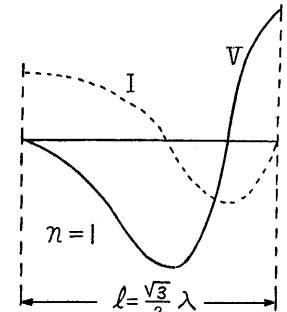
短 絡 共 振



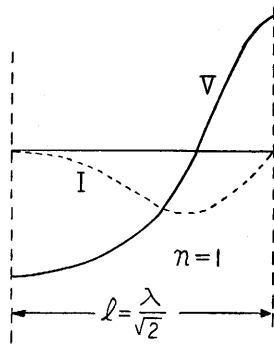
短 絡 共 振



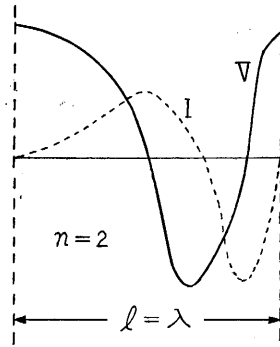
開 放 共 振



開 放 共 振



開放反共振



開放反共振

11.1.c 受電端負荷がリアクタンスなる場合

受電端負荷インピーダンスが、純リアクタンス jX_B の場合、受電端における位置角 θ_B は、

$$\theta_B = \tanh^{-1}(jX_B/Z_{0l}) = j \tan^{-1}(X_B/Z_{0l}) \quad (266)$$

従って送電端からみたインピーダンス Z_A は、

$$Z_A = Z_{00} \tanh\{\theta_l + j \tan^{-1}(X_B/Z_{0l})\} \quad (267)$$

$$\begin{aligned} &= Z_{00} \tanh\left\{j\omega\sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2}l^2\right. \\ &\quad \left.+ j \tan^{-1}(\sqrt{C/L}X_B)\right\} \\ &= jZ_{00} \tan\left\{\omega\sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2}l^2\right. \\ &\quad \left.+ \tan^{-1}(\sqrt{C/L}X_B)\right\} \end{aligned} \quad (268)$$

それ故、並列共振条件は

$$\begin{aligned} &\omega\sqrt{LC} \cdot \frac{1}{2}l^2 + \tan^{-1}(\sqrt{C/L}X_B) \\ &= (n + \frac{1}{2})\pi \\ &(n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (269)$$

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{2}{\omega\sqrt{LC}} \left\{ (n + \frac{1}{2})\pi - \tan^{-1}(\sqrt{C/L}X_B) \right\} \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \left\{ (n + \frac{1}{2})\pi - \tan^{-1}(\sqrt{C/L}X_B) \right\} \\ l &= \lambda \sqrt{\frac{n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(X_B \sqrt{C/L})} \\ &(n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (270)$$

直列共振条件は

$$\omega\sqrt{LC} \frac{l^2}{2} + \tan^{-1}(\sqrt{C/L}X_B) = n\pi \quad (271)$$

$$\begin{aligned} l^2 &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \left\{ n\pi - \tan^{-1}(X_B \sqrt{C/L}) \right\} \\ l &= \lambda \sqrt{\frac{n}{2} - \frac{1}{2\pi} \tan^{-1}(X_B \sqrt{C/L})} \end{aligned} \quad (272)$$

11.2. 指数線路の共振

$$z(x) = Z \epsilon^{4ax}, \quad y(x) = Y \epsilon^{4bx} \quad (273)$$

$$Z_{0x} = \sqrt{Z/Y} \epsilon^{2(a-b)x} \quad (274)$$

無損失で、また、 $x_0=0$ すると

$$Z_{00} = \sqrt{Z/Y} = \sqrt{L/C} \quad (275)$$

$$\sqrt{Z_{00} Z_{0x}} = \sqrt{C/L} \epsilon^{(a-b)x} \quad (276)$$

$$\epsilon^p = \sqrt{Z_{0x}/Z_{00}} = \epsilon^{(a-b)x} \quad (277)$$

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{y(x) \cdot z(x)} = \sqrt{YZ} \epsilon^{2(a+b)x} \\ &= j\omega\sqrt{LC} \epsilon^{2(a+b)x} \end{aligned} \quad (278)$$

$$\theta = j\beta = j\frac{\omega\sqrt{LC}}{2(a+b)} (\epsilon^{2(a+b)x} - 1) \quad (279)$$

(77) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \epsilon^{(a-b)x} (A \cos \beta + jB \sin \beta) \\ I_x &= -\sqrt{C/L} \epsilon^{-(a-b)x} (B \cos \beta \\ &\quad + jA \sin \beta) \end{aligned} \right\} \quad (280)$$

(79) 式より

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \epsilon^{(a-b)x} (A' \epsilon^{-j\beta} + B' \epsilon^{j\beta}) \\ I_x &= -\sqrt{C/L} \epsilon^{-(a-b)x} (A' \epsilon^{-j\beta} \\ &\quad - B' \epsilon^{j\beta}) \end{aligned} \right\} \quad (281)$$

無損失線路のときの位相速度は、(113) 式より

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} \epsilon^{-2(a+b)x} \quad (282)$$

(281) 式で、右方向の進行波を考えると

$$\left. \begin{aligned} V_x &= \epsilon^{(a-b)x} A' \epsilon^{-j\beta} \\ I_x &= -\sqrt{C/L} \epsilon^{-(a-b)x} A' \epsilon^{-j\beta} \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

$x \rightarrow 0$ のとき、 $V_x \rightarrow V_A$, $I_x \rightarrow I_A$ とすると

$$V_A = A' \quad I_A = -\sqrt{C/L} V_A$$

従って

$$V_x = \epsilon^{(a-b)x} V_A \epsilon^{-j\beta} \quad (284)$$

$$I_x = \varepsilon^{-(a-b)x} \quad I_A \varepsilon^{-j\beta} \quad]$$

瞬時値で表わすと

$$\left. \begin{aligned} v &= \sqrt{2} V_A \varepsilon^{-(a-b)x} \sin(\omega t - \beta + \psi) \\ i &= \sqrt{2} I_A \varepsilon^{-(a-b)x} \sin(\omega t - \beta + \phi) \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

β が 2π になるときの x の値を一波長とし、 λ_1 で表わすと、

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\omega \sqrt{LC}}{2(a+b)} \left(\varepsilon^{2(a+b)\lambda_1} - 1 \right) = 2\pi \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2(a+b)} \log \left(1 + \frac{2(a+b)}{f\sqrt{LC}} \right) \end{aligned} \quad (286)$$

11.2.a 受電端短絡の場合

送電端からみたインピーダンス Z_A は、(137) 式より

$$Z_A = Z_{00} \tanh \theta_l = j\sqrt{LC} \tan \beta_l \quad (287)$$

Z_A は純リアクタンスで、 $\beta_l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$

($n=0, 1, 2, \dots$) ならば $Z_A = \pm j\infty$ 、集中定数回路の並列共振に相当する。

$$\beta_l = \frac{\omega \sqrt{LC}}{2(a+b)} (\varepsilon^{2(a+b)l} - 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (288)$$

(134) 式より

$$\begin{aligned} V_P &= V_A \varepsilon^{pP} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} = \pm V_A \varepsilon^{(a-b)s} \sin \\ &\left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (289)$$

ただし、 n が偶数のとき+、奇数のとき-

$$\begin{aligned} I_P &= \pm \frac{V_A \varepsilon^{-(a-b)s}}{jZ_{00}} \cos \\ &\left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (290)$$

ただし n が偶数のとき+、奇数のとき-

次に、 $\beta_l = n\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$) のときは $Z_A = Z_{00} \tanh \theta_l = 0$ となり、集中定数回路の直列共振に相当する。

$$\begin{aligned} \beta_l &= \frac{\omega \sqrt{LC}}{2(a+b)} (\varepsilon^{2(a+b)l} - 1) = n\pi \\ (135) \text{ 式より} \\ I_P &= I_A \varepsilon^{-pP} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l} \\ &= \pm I_A \varepsilon^{-(a-b)s} \cos \\ &\left\{ n\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (292)$$

ただし、 n が偶数のとき+、奇数のとき-

(134) 式より

$$V_P = V_A \varepsilon^{pP} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l}$$

$$\begin{aligned} &= \pm jZ_{00} I_A \varepsilon^{(a-b)s} \sin \\ &\left\{ n\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (293)$$

受電端開放の場合

$$\beta_l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \text{ の場合は、}$$

$$Z_A = Z_{00} \coth \theta_l = -j\sqrt{LC} \cot \beta_l \quad (294)$$

の $Z_A = 0$ 、となって、これは集中定数回路の直列共振に相当する。

$$\beta_l = \frac{\omega \sqrt{LC}}{2(a+b)} (\varepsilon^{2(a+b)l} - 1) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (295)$$

(141) 式より

$$I_P = I_A \varepsilon^{-pP} \frac{\sinh(\theta_l - \theta_P)}{\sinh \theta_l} \quad (296)$$

$$\begin{aligned} &= \pm I_A \varepsilon^{-(a-b)s} \sin \\ &\left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (297)$$

ただし $n=0, 1, 2, \dots$ 偶数のとき+、奇数のとき-
(140) 式より

$$V_P = V_A \varepsilon^{pP} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l}$$

$$\begin{aligned} &= \pm j\sqrt{\frac{C}{L}} I_A \varepsilon^{(a-b)s} \cos \\ &\left\{ \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (299)$$

ただし、 $n=0, 1, 2, \dots$ 、偶数+、奇数+

次に、 $\beta_l = n\pi$ の場合は

$$Z_A = Z_{00} \coth \theta_l = \pm j\infty \quad (300)$$

これは集中定数回路の並列共振に相当する。

$$\beta_l = \frac{\omega \sqrt{LC}}{2(a+b)} (\varepsilon^{2(a+b)l} - 1) = n\pi \quad (301)$$

(140) 式より

$$V_P = V_A \varepsilon^{pP} \frac{\cosh(\theta_l - \theta_P)}{\cosh \theta_l}$$

$$\begin{aligned} &= \pm V_A \varepsilon^{(a-b)s} \cos \\ &\left\{ n\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (302)$$

$$\begin{aligned} I_P &= \pm \frac{V_A}{j} \sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{-(a-b)s} \sin \\ &\left\{ n\pi \left(1 - \frac{\varepsilon^{2(a+b)s-1}}{\varepsilon^{2(a+b)l-1}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (303)$$

ただし、 $n=1, 2, 3, \dots$ 偶数+、奇数-

11.2.c. 受電端負荷がリアクタンスなる場合

受電端負荷インピーダンスが、純リアクタンス jX_B の場合、受電端における位置角 θ_B は

$$\theta_B = \tan^{-1} \frac{jX_B}{Z_{0l}} = j \tan^{-1} \frac{X_B}{Z_{0l}} \quad (304)$$

従って送電端からみたインピーダンス Z_A は、

$$\begin{aligned} Z_A &= Z_{00} \tanh \{ \theta_l + j \tan^{-1} (X_B/Z_{0l}) \} \\ &= j\sqrt{L/C} \tan \left\{ \beta_l + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{-2(a-b)l} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot X_B \right) \right\} \end{aligned} \quad (305)$$

それ故、並列共振条件は

$$\begin{aligned} \beta_l + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{-2(a-b)l} X_B \right) \\ = (n + \frac{1}{2})\pi \end{aligned} \quad (306)$$

($n=0, 1, 2, \dots$)

直列共振条件は

$$\beta_l + \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{C}{L}} \varepsilon^{-2(a-b)l} X_B \right) = n\pi \quad (307)$$

($n=1, 2, 3, \dots$)

ただし $\beta_l = \frac{\omega\sqrt{LC}}{2(a+b)} \left(\varepsilon^{2(a+b)l} - 1 \right)$

11.3. 反射係数と定在波比

(60) 式において、 $V_B = Z_B I_B$ の条件を与えると、

$$\begin{aligned} A' &= \frac{1}{2} \varepsilon^{\theta_l} Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} \left(\frac{Z_B}{Z_{00}} \varepsilon^{-2p_l+1} \right) \\ B' &= \frac{1}{2} \varepsilon^{-\theta_l} Z_{00} I_B \varepsilon^{p_l} \left(\frac{Z_B}{Z_{00}} \varepsilon^{-2p_l-1} \right) \\ Z_{0n} &= Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \end{aligned} \quad (308)$$

これらを代入して

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} V_B \varepsilon^{\theta_l - p_l} \left(1 + \frac{Z_{0n}}{Z_B} \right) \varepsilon^{p-\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} V_B \varepsilon^{-\theta_l - p_l} \left(1 - \frac{Z_{0n}}{Z_B} \right) \varepsilon^{p+\theta} \\ &\equiv V_1 + V_2 \quad (309) \\ I &= \frac{1}{2} I_B \varepsilon^{\theta_l + p_l} \left(1 + \frac{Z_B}{Z_{0n}} \right) \varepsilon^{-p-\theta} \\ &\quad - \frac{1}{2} I_B \varepsilon^{-\theta_l + p_l} \left(1 - \frac{Z_B}{Z_{0n}} \right) \varepsilon^{-p+\theta} \\ &\equiv I_1 + I_2 \quad (309)' \end{aligned}$$

送電端からの距離 x において、負荷に向う電圧 V_1 と、電源に向う電圧 V_2 との比を m_x とすると

$$m_x = \frac{V_2}{V_1} = \frac{Z_B - Z_{0n}}{Z_B + Z_{0n}} \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)} = m \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)} \quad (310)$$

受電端では、 $p \rightarrow p_l$, $\theta \rightarrow \theta_l$, $m_x \rightarrow m$ とすると、

$$m = \frac{Z_B - Z_{0n}}{Z_B + Z_{0n}} \quad (311)$$

は、(176) 式に述べたように、電圧波の反射係数を表わす。この m を用いて、(309) 式を書き直すと

$$\left. \begin{aligned} V &= V_1 (1 + m \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)}) \\ I &= I_1 (1 - m \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)}) \end{aligned} \right\} \quad (312)$$

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} V_B \varepsilon^{\theta_l - p_l} (1 + Z_{0n}/Z_B) \varepsilon^{p-\theta} \\ I_1 &= \frac{1}{2} I_B \varepsilon^{\theta_l + p_l} (1 + Z_B/Z_{0n}) \varepsilon^{-p-\theta} \\ \frac{V_1}{I_1} &= \frac{\frac{1}{2} V_B \varepsilon^{\theta_l - p_l} (1 + Z_{0n}/Z_B) \varepsilon^{p-\theta}}{\frac{1}{2} (V_B/Z_{0n}) \varepsilon^{\theta_l + p_l} (1 + Z_{0n}/Z_B) \varepsilon^{-p-\theta}} = Z_{00} \varepsilon^{2p} \end{aligned} \right\} \quad (313)$$

したがって、送電端より x の点におけるインピーダンスは、

$$Z = \frac{V}{I} = Z_{00} \varepsilon^{2p} \frac{1 + m \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)}}{1 - m \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)}} \quad (314)$$

受電端では、 $p \rightarrow p_l$, $\theta \rightarrow \theta_l$ となるから

$$Z_B = Z_{00} \varepsilon^{2p_l} \frac{1+m}{1-m} = Z_{0n} \frac{1+m}{1-m} \quad (315)$$

送電端では $p \rightarrow 0$, $\theta \rightarrow 0$ となるから

$$Z_A = Z_{00} \frac{1 + m \varepsilon^{-2\theta_l}}{1 - m \varepsilon^{-2\theta_l}} \quad (316)$$

受電端で反射が起ると、行きと帰りの波が干渉して、定在波を生ずる。

$$\text{電圧定在波比: } S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} \quad (317)$$

(315) 式より

$$m = \frac{Z_B - Z_{0n}}{Z_B + Z_{0n}} = \varepsilon^{-2(t_0 + ju_0)} \quad (318)$$

$$m \varepsilon^{2(\theta - \theta_l)} = \varepsilon^{-2(t + ju)} \quad (319)$$

として、(312) の V の式に代入すると

$$V = V_1' \varepsilon^{p-\theta} (1 + \varepsilon^{-2t} \varepsilon^{-2ju}) \quad (320)$$

ただし $V_1' = \frac{1}{2} V_B \varepsilon^{\theta_l - p_l} (1 + Z_{0n}/Z_B)$ (321)

損失がないとすると、 $t=t_0$ となり、 $\varepsilon^{-2ju}=1$ のとき、 V は最大となる。故に

$$\left. \begin{aligned} |V_{\max}| &= |V_1'| \cdot |\varepsilon^{p-\theta}| \cdot (1 + \varepsilon^{-2t_0}) \\ |V_{\min}| &= |V_1'| \cdot |\varepsilon^{p-\theta}| \cdot (1 - \varepsilon^{-2t_0}) \end{aligned} \right\} \quad (322)$$

したがって

$$S = \frac{|V_{\max}|}{|V_{\min}|} = \frac{1 + \varepsilon^{-2t_0}}{1 - \varepsilon^{-2t_0}} = \frac{1 + |m|}{1 - |m|} \quad (323)$$

あるいは、 $|m| = \frac{S-1}{S+1}$ (324)

$Z_B = R_B$ とすれば

$$\left. \begin{aligned} R_B > Z_{0n} \text{ のときは } S &= R_B/Z_{0n} \\ R_B < Z_{0n} \text{ のときは } S &= Z_{0n}/R_B \end{aligned} \right\} \quad (325)$$

第12章 影像分割の拡張

12.1. 四端子網としての不均等分布定数回路

与えられた不均等分布定数回路は、これを両端に着目してみると、一箇の四端子網と考えることができる。これを影像パラメーターで表わすと、次のような形となるのは、周知の通りである。(文献(5)77頁、55, 56式)

$$\left. \begin{aligned} V &= \sqrt{Z_{0n}/Z_{00}} V_0 \cosh \theta - \sqrt{Z_{00}/Z_{0n}} I_0 \sinh \theta \\ I &= \sqrt{Z_{00}/Z_{0n}} I_0 \cosh \theta - V_0 \sinh \theta / \sqrt{Z_{00}/Z_{0n}} \end{aligned} \right\} \quad (326)$$

ただし、 V_0, I_0, Z_{00} は四端子網の入力端子側、 V, I, Z_{0n} は出力端子側の、それぞれ、電圧、電流、影像インピーダンスである。 θ はこの四端子網の伝達定数である。

$$Z_{0n}/Z_{00} = \epsilon^{2p} \quad (327)$$

とおくと

$$\left. \begin{aligned} V \epsilon^{-p} &= V_0 \cosh \theta - Z_{00} I_0 \sinh \theta \\ I \epsilon^p &= I_0 \cosh \theta - \frac{1}{Z_{00}} V_0 \sinh \theta \end{aligned} \right\} \quad (328)$$

いま、この線路を微分割する。すなわち、両端に影像インピーダンスを接続した場合には、任意の分割点で左右をみたとき、その等価インピーダンスが相等しいように分割することができるものと仮定する。これを影像分割と名づける。

(328) 式において、両端が影像インピーダンスで終端接続されているときは、(81) 式で導いたように、

$$\left. \begin{aligned} V \epsilon^{-p_l} &= V_A \epsilon^{-\theta_l} = Z_{00} I_A \epsilon^{-\theta_l} \\ I \epsilon^{p_l} &= I_A \epsilon^{-\theta_l} = \frac{V_A}{Z_{00}} \epsilon^{-\theta_l} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし} \quad \theta_l &= \int_0^l d\theta = \int_0^l \sqrt{yz} dx, \\ Z_{00} &= \left(\sqrt{\frac{z}{y}} \right)_{x=0}, \quad Z_{0l} = \left(\sqrt{\frac{z}{y}} \right)_{x=l}, \\ \frac{Z_{0l}}{Z_{00}} &= \epsilon^{2p_l}, \quad p_l = \int_0^l dp, \quad V_0 = V_A, \quad I_0 = I_A \end{aligned} \right\}$$

いま、0 から l までの線路を、任意点 x で分割して、左方をみたインピーダンスを Z_x 、右方をみたインピーダンスを Z_y とすれば

$$V_x \epsilon^{-p_x} = V_A \epsilon^{-\theta_x}, \quad I_x \epsilon^{p_x} = I_A \epsilon^{-\theta_x} \quad \text{より}$$

$$Z_x = \frac{V_x}{I_x} = \frac{V_A \epsilon^{p_x - \theta_x}}{I_A \epsilon^{-p_x - \theta_x}} = Z_{00} \epsilon^{2p_x}$$

次に、 Z_y を求める。

$$\left. \begin{aligned} V_l \epsilon^{-(p_l - p_x)} &= V_x \epsilon^{-(\theta_l - \theta_x)} \\ I_l \epsilon^{p_l - p_x} &= I_x \epsilon^{-\theta_l + \theta_x} \end{aligned} \right\} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} Z_y &= \frac{V_x}{I_x} = \frac{V_l \epsilon^{-(p_l - p_x)} \cdot \epsilon^{\theta_l - \theta_x}}{I_l \epsilon^{p_l - p_x} \cdot \epsilon^{\theta_l - \theta_x}} = Z_{0l} \cdot \epsilon^{-2(p_l - p_x)} \\ &= Z_{00} \epsilon^{2p_l} \cdot \epsilon^{-2p_l + 2p_x} = Z_{00} \epsilon^{2p_x} \end{aligned}$$

すなわち、 $Z_x = Z_y$ となり、これは影像分割の意義を示すものである。

この分割点は任意であり、無限箇數に微分割することもできる。この分割された各素子を、また元のとおりに継続する。境界条件として、送電端の定数 Z_{00}, V_0, I_0 を与え、受電端の電圧、電流 V, I を眺めると、 V, I は、 θ と p の函数である。したがって、これらの全微分は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial V}{\partial p} \cdot dp \\ dI &= \frac{\partial I}{\partial \theta} \cdot d\theta + \frac{\partial I}{\partial p} \cdot dp \end{aligned} \right\} \quad (329)$$

これらの偏微係数を(328)式より求めると

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \epsilon^p V_0 \sinh \theta - \epsilon^p Z_{00} I_0 \cosh \theta \\ &= Z_{00} \epsilon^{2p} \frac{\epsilon^{-p}}{Z_{00}} V_0 \sinh \theta - Z_{00} \epsilon^{2p} \cdot \epsilon^{-p} I_0 \cosh \theta \\ &= -Z_{00} \epsilon^{2p} (\epsilon^{-p} I_0 \cosh \theta - \epsilon^{-p} \cdot \frac{1}{Z_{00}} V_0 \sinh \theta) \\ &= -Z_{0n} I \\ \frac{\partial V}{\partial p} &= \epsilon^p V_0 \cosh \theta - \epsilon^p Z_{00} I_0 \sinh \theta = V \\ \frac{\partial I}{\partial \theta} &= I_0 \epsilon^{-p} \sinh \theta - \frac{1}{Z_{00}} V_0 \epsilon^{-p} \cosh \theta \\ &= \frac{\epsilon^p Z_{00} I_0 \sinh \theta}{Z_{00} \epsilon^{2p}} - \frac{\epsilon^p V_0 \cosh \theta}{Z_{00} \epsilon^{2p}} = -\frac{V}{Z_{0n}} \\ \frac{\partial I}{\partial p} &= -\epsilon^{-p} I_0 \cosh \theta + \epsilon^{-p} \\ &\quad \cdot \frac{1}{Z_{00}} V_0 \sinh \theta = -I \end{aligned}$$

これらを(329)の全微分の式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} dV &= -Z_{0n} I d\theta + V dp \\ dI &= -\frac{V}{Z_{0n}} d\theta - I dp \end{aligned} \right\} \quad (330)$$

あるいは、(327)式を代入して、

$$\left. \begin{aligned} dV &= -I Z_{00} \epsilon^{2p} d\theta + V dp \\ dI &= -V \cdot \frac{1}{Z_{00}} \cdot \epsilon^{-2p} d\theta - I dp \end{aligned} \right\} \quad (331)$$

これは(31)式と一致する。影像分割が可能であるという条件によって、線路上の任意の点に反射がない。すなわち、線路上の任意の点に、 p, θ の積分値が求められる。これは、(13)(16)式において説明したから、ここでは省略する。

基礎微分方程式に、 dp の項が存在しなければならぬということは、上述の所論によっても、明白であ

ろう。

12.2. 八端子網としての均等分布結合回路

12.2.a 概 説

分布結合回路の取扱いは、既に多くの発表がある^{(8)~(15)}。電磁界方程式を理論の出発点とする方法、あるいは、対称座標法の考え方を拡張適用したもの、あるいは多端子網としての微分方程式をたてて、その一般解を求め求めるもの等いろいろある。ここに述べるんとするものも、この最後の場合に属するものであるが、筆者は、これに影像分割の概念を適用することによって、簡明な解が得られることを次に示す。

いま、分布結合回路を任意点で分割して左右をみたとき、同じ定数の四端子網が得られるようにするために、この分布結合回路の両端に、特定の四端子網を接続したとき、両端の四端子網を影像四端子網と名づけ

る。

影像四端子網が対称四端子網であるときの解を次節に示した。これより一般的な分布結合回路に対しては、4階微分方程式を取扱うことになる⁽⁸⁾⁽¹⁵⁾。筆者は、2階微分方程式としての解を次節に示す。

以上は、均等分布結合回路について述べたが、不均等分布結合回路では、左右の影像四端子網定数が異なることになるので、一層、複雑になろう。

12.2.b 影像四端子網が対称四端子網である場合

まず、最も簡単な場合の、均等分布結合回路の解を示す。線路定数は

$$\left. \begin{aligned} Z &= R + j\omega L, & Y &= G + j\omega C \\ Z_m &= R_m + j\omega L_m, & Y_m &= G_m + j\omega C_m \end{aligned} \right\} \quad (332)$$

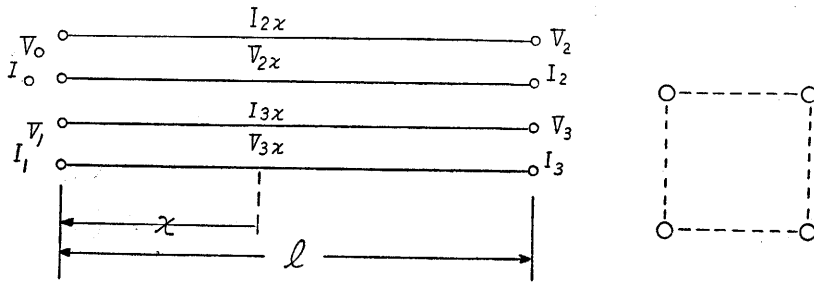


Fig. 15

電流方向および長さ x を左から右にとると、電圧電流の間に次の微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} V_{2x}' &= dV_{2x}/dx = -Z I_{2x} - Z_m I_{3x} \\ V_{3x}' &= dV_{3x}/dx = -Z I_{3x} - Z_m I_{2x} \\ I_{2x}' &= dI_{2x}/dx = -Y V_{2x} - Y_m V_{3x} \\ I_{3x}' &= dI_{3x}/dx = -Y V_{3x} - Y_m V_{2x} \end{aligned} \right\} \quad (333)$$

$$\left. \begin{aligned} V_{2x}'' &= Y_{2x}(YZ + Y_m Z_m) + V_{3x}(YZ_m + Y_m Z) \\ V_{3x}'' &= V_{2x}(YZ_m + Y_m Z) + V_{3x}(YZ + Y_m Z_m) \\ I_{2x}'' &= I_{2x}(YZ + Y_m Z_m) + I_{3x}(YZ_m + Y_m Z) \\ I_{3x}'' &= I_{2x}(YZ_m + Y_m Z) + I_{3x}(YZ + Y_m Z_m) \end{aligned} \right\} \quad (334)$$

いま、これらの線路定数を、パラメータ θ , φ を用いて、次式の関係におく。

$$\left. \begin{aligned} YZ + Y_m Z_m &= \frac{1}{2}(\theta^2 + \varphi^2) \\ YZ_m + Y_m Z &= \frac{1}{2}(\theta^2 - \varphi^2) \end{aligned} \right\} \quad (335)$$

あるいは、 $\theta^2 = (Y + Y_m)(Z + Z_m)$
 $\varphi^2 = (Y - Y_m)(Z - Z_m)$

(334) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} V_{2x}'' + V_{3x}'' - \theta^2(V_{2x} + V_{3x}) &= 0 \\ V_{2x}'' - V_{3x}'' - \varphi^2(V_{2x} - V_{3x}) &= 0 \\ I_{2x}'' + I_{3x}'' - \theta^2(I_{2x} + I_{3x}) &= 0 \\ I_{2x}'' - I_{3x}'' - \varphi^2(I_{2x} - I_{3x}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (336)$$

従って、

$$\left. \begin{aligned} V_{2x} + V_{3x} &= A \sinh x\theta + B \cosh x\theta \\ V_{2x} - V_{3x} &= C \sinh x\varphi + D \cosh x\varphi \\ I_{2x} + I_{3x} &= A' \sinh x\theta + B' \cosh x\theta \\ I_{2x} - I_{3x} &= C' \sinh x\varphi + D' \cosh x\varphi \end{aligned} \right\} \quad (337)$$

境界条件として左端の電圧、電流を与える

$$\left. \begin{aligned} A &= -(I_0 + I_1)Z_0, & A' &= -(V_0 + V_1)Y_0 \\ B &= V_0 + V_1, & B' &= I_0 + I_1 \\ C &= -(I_0 - I_1)Z_0, & C' &= -(V_0 - V_1)Y_0 \\ D &= V_0 - V_1, & D' &= I_0 - I_1 \end{aligned} \right\} \quad (338)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } Z_0 &= \sqrt{(Z + Z_m)/(Y + Y_m)} = 1/Y_0 \\ Z_{00} &= \sqrt{(Z - Z_m)/(Y - Y_m)} = 1/Y_{00} \end{aligned} \right\} \quad (339)$$

(337) 式より、右端の電流を求めると

$$\left. \begin{aligned} I_2 + I_3 &= -(V_0 + V_1)Y_0 \sinh l\theta + (I_0 + I_1) \cosh l\theta \\ I_2 - I_3 &= -(V_0 - V_1)Y_{00} \sinh l\varphi + (I_0 - I_1) \cosh l\varphi \end{aligned} \right\} \quad (340)$$

電源が右端にあると考え、電流方向を右から左にと

ると、上式右辺の符号を変えて、

$$\left. \begin{aligned} I_2 + I_3 &= (V_0 + V_1) Y_{f0} \sinh l\theta - (I_0 + I_1) \cosh l\theta \\ I_2 - I_3 &= (V_0 - V_1) Y_{s0} \sinh l\varphi - (I_0 - I_1) \cosh l\varphi \end{aligned} \right\} \quad (341)$$

いま、この分布結合回路を八端子網と考え、電圧平衡式の開放インピーダンス表示を示すと

$$\left. \begin{aligned} Z_f I_0 + Z_{ma} I_1 + Z_{mb} I_2 + Z_{mc} I_3 &= V_0 \\ Z_{ma} I_0 + Z_f I_1 + Z_{mc} I_2 + Z_{mb} I_3 &= V_1 \\ Z_{mb} I_0 + Z_{mc} I_1 + Z_f I_2 + Z_{ma} I_3 &= V_2 \\ Z_{mc} I_0 + Z_{mb} I_1 + Z_{ma} I_2 + Z_f I_3 &= V_3 \end{aligned} \right\} \quad (342)$$

短絡アドミタンス表示では

$$\left. \begin{aligned} Y_s V_0 + Y_{ta} V_1 + Y_{tb} V_2 + Y_{tr} V_3 &= I_0 \\ Y_{ta} V_0 + Y_s V_1 + Y_{tr} V_2 + Y_{tb} V_3 &= I_1 \\ Y_{tb} V_0 + Y_{tr} V_1 + Y_s V_2 + Y_{ta} V_3 &= I_2 \\ Y_{tr} V_0 + Y_{tb} V_1 + Y_{ta} V_2 + Y_s V_3 &= I_3 \end{aligned} \right\} \quad (343)$$

(342) 式より

$$\left. \begin{aligned} I_2 + I_3 &= \{V_0 + V_1 - (Z_f + Z_{ma})(I_0 + I_1)\} / Z_{mb} + Z_{mc} \\ I_2 - I_3 &= \{V_0 - V_1 - (Z_f - Z_{ma})(I_0 - I_1)\} / Z_{mb} - Z_{mc} \end{aligned} \right\} \quad (344)$$

(344)=(341) において Z_f , Z_{ma} 等を求める。

$$\left. \begin{aligned} Z_f &= \frac{1}{2} (Z_{f0} \coth l\theta + Z_{s0} \coth l\varphi) \\ Z_{ma} &= \frac{1}{2} (Z_{f0} \coth l\theta - Z_{s0} \coth l\varphi) \\ Z_{mb} &= \frac{1}{2} (Z_{f0} \operatorname{cosech} l\theta + Z_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi) \\ Z_{mc} &= \frac{1}{2} (Z_{f0} \operatorname{cosech} l\theta - Z_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (345)$$

同様な方法で

$$\left. \begin{aligned} Y_s &= \frac{1}{2} (Y_{f0} \coth l\theta + Y_{s0} \coth l\varphi) \\ Y_{ta} &= \frac{1}{2} (Y_{f0} \coth l\theta - Y_{s0} \coth l\varphi) \\ Y_{tb} &= \frac{1}{2} (-Y_{f0} \operatorname{cosech} l\theta - Y_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi) \\ Y_{tr} &= \frac{1}{2} (-Y_{f0} \operatorname{cosech} l\theta + Y_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi) \end{aligned} \right\} \quad (346)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} Z_{f0}^2 &= 1/Y_{f0}^2 = (Z_f + Z_{ma})^2 - (Z_{mb} + Z_{mc})^2 \\ &= (Z + Z_m)/(Y + Y_m) \\ Z_{s0}^2 &= 1/Y_{s0}^2 = (Z_f - Z_{ma})^2 - (Z_{mb} - Z_{mc})^2 \\ &= (Z - Z_m)/(Y - Y_m) \\ \cosh l\theta &= (Z_f + Z_{ma})/(Z_{mb} + Z_{mc}) \\ &= \cosh(l\sqrt{(Y + Y_m)(Z + Z_m)}) \\ \cosh l\varphi &= (Z_f - Z_{ma})/(Z_{mb} - Z_{mc}) \\ &= \cosh(l\sqrt{(Y - Y_m)(Z - Z_m)}) \end{aligned} \right\} \quad (347)$$

Z_{f0} , Z_{s0} は、二等分影像四端子網の開放インピーダンス、短絡インピーダンスに相当する。

本解式において、最も興味のある点は、(335) 式で

ある。結果の正誤については無損失の場合の文献⁽¹⁰⁾と比較すると、一致することを確認することができる。それを次の3例題によって示す。

〔例解1〕

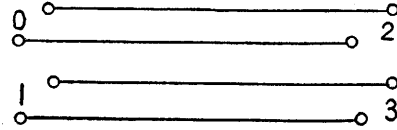


Fig. 16

16図の場合は、(342) 式で、 $V_0/I_0 = Z_f$ を求めるには、 $I_1 = I_2 = I_3 = 0$ において

$$V_0/I_0 = Z_f = \frac{1}{2} (Z_{f0} \coth l\theta + Z_{s0} \coth l\varphi) \quad (348)$$

損失がないときは

$$\theta = \varphi = j\omega\sqrt{LC + L_m C_m} = j\omega/v_0$$

故に、 $Z_f = \frac{1}{2} (Z_{f0} + Z_{s0}) \coth l\theta$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{L + L_m}{C + C_m}} + \sqrt{\frac{L - L_m}{C - C_m}} \right) \coth \\ &\quad (j\omega l \sqrt{LC + L_m C_m}) \\ &= \frac{C}{v_0(C^2 - C_m^2)} \coth \left(\frac{j\omega l}{v_0} \right) \\ &= v_0 L \coth \left(\frac{j\omega l}{v_0} \right) \end{aligned}$$

〔例解2〕

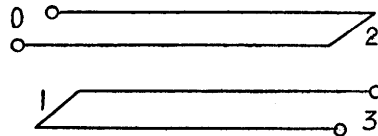


Fig. 17

17図の場合の送端インピーダンスは、 $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $I_3 = 0$ として、(343) 式より求めてもよいが、四端子網の基礎式から直ちに

$$\begin{aligned} Y_f &= I_0/V_0 = Y_s(1 - r^2) = (Y_s^2 - r^2 Y_s^2)/Y_s \\ &= \{Y_{f0}^2 + Y_{s0}^2 + 2Y_{f0} Y_{s0} (\coth l\theta \cdot \coth l\varphi \\ &\quad + \operatorname{cosech} l\theta \\ &\quad \times \operatorname{cosech} l\varphi)\} / 2(Y_{f0} \coth l\theta + Y_{s0} \coth l\varphi) \quad (349) \end{aligned}$$

損失がない場合は、 $\varphi = \theta$ において

$$\begin{aligned} \text{分子} &= \frac{1}{2} \{(Y_{f0} + Y_{s0})^2 + 4Y_{f0} Y_{s0} \operatorname{cosech}^2 l\theta\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{4L^2}{v_0^2(L^2 - L_m^2)^2} + \sqrt{\frac{C^2 - C_m^2}{L^2 - L_m^2}} \frac{4}{\sinh^2 l\theta} \right) \end{aligned}$$

分母 $= (2L \coth l\theta)/v_0(L^2 - L_m^2)$

故に

$$\frac{I_0}{V_0} = \frac{L \cdot \tanh l\theta}{v_0(L^2 - L_m^2)} + \frac{1}{v_0 L \coth l\theta \cdot \sinh^2 l\theta}$$

$$= j \{ L_m^2 - L^2 \cos^2(\omega l / v_0) \} / L v_0 (L^2 - L_m^2) \sin(\omega l / v_0) \times \cos(\omega l / v_0) \quad (350)$$

【例解 3】

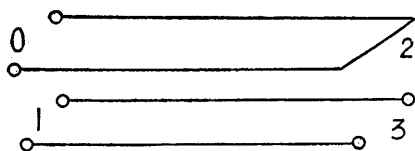


Fig. 18

(18図)で送端インピーダンスを求めるには (342)

式で $I_1=0$, $I_3=0$; $V_2=0$ において

$$\frac{V_0}{I_0} = Z_f - \frac{Z_m^2}{Z_f} = \frac{Z_{f0}^2 + Z_{s0}^2 + 2Z_{f0}Z_{s0}(\coth l\theta \cdot \coth l\varphi - \operatorname{cosech} l\theta \cdot \operatorname{cosech} l\varphi)}{2(Z_{f0} \coth l\theta + Z_{s0} \coth l\varphi)} \quad (351)$$

損失がないときは、 $\theta = \varphi$ において

$$\begin{aligned} \frac{V_0}{I_0} &= \frac{1}{2} (Z_{f0} + Z_{s0}) \tanh l\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{Z + Z_m}{Y + Y_m}} + \sqrt{\frac{Z - Z_m}{Y - Y_m}} \right) \\ &\quad \times \tanh(j\omega l \sqrt{LC + L_m C_m}) \\ &= \frac{C}{v_0(c^2 - c_m^2)} \tanh \frac{j\omega l}{v_0} = v_0 L \tanh \left(\frac{j\omega l}{v_0} \right) \quad (352) \end{aligned}$$

次に、影像四端子網定数との関係を与えておく。影像四端子網の開放インピーダンスを Z_r 、開放伝インピーダンス（相互インピーダンス）を Z_{mr} とすると、

$$\left. \begin{aligned} Z_r + Z_{mr} &= Z_{f0}, \quad Z_r - Z_{mr} = Z_{s0} \\ Z_r &= \frac{1}{2} (Z_{f0} + Z_{s0}), \quad Z_{mr} = \frac{1}{2} (Z_{f0} - Z_{s0}) \end{aligned} \right\} \quad (353)$$

$$\left. \begin{aligned} I_0 Z_r + I_1 Z_{mr} &= V_0, & I_0 Z_{mr} + I_1 Z_r &= V_1 \\ I_2 Z_r + I_3 Z_{mr} &= V_2, & I_2 Z_{mr} + I_3 Z_r &= V_3 \end{aligned} \right\} \quad (354)$$

12.2.c. 影像四端子網が非対称の場合

前述の (333) 式と同様に、次の基礎方程式が得られ

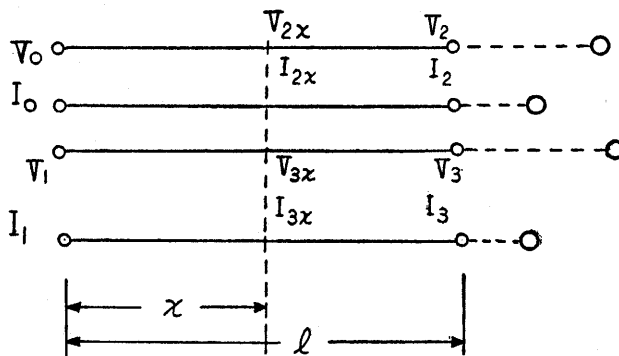


Fig. 19

る。

$$\left. \begin{aligned} V_{2x}' &= -Z_0 I_{2x} - Z_m I_{3x} \\ V_{3x}' &= -Z_1 I_{3x} - Z_m I_{2x} \\ I_{2x}' &= -Y_0 V_{2x} - Y_m V_{3x} \\ I_{3x}' &= -Y_1 V_{3x} - Y_m V_{2x} \end{aligned} \right\} \quad (355)$$

従って、

$$\left. \begin{aligned} V_{2x}'' &= V_{2x} (Y_0 Z_0 + Y_m Z_m) + V_{3x} (Y_1 Z_m + Y_m Z_0) \\ V_{3x}'' &= V_{2x} (Y_0 Z_m + Y_m Z_1) + V_{3x} (Y_1 Z_1 + Y_m Z_m) \\ I_{2x}'' &= I_{2x} (Y_0 Z_0 + Y_m Z_m) + I_{3x} (Y_0 Z_m + Y_m Z_1) \\ I_{3x}'' &= I_{2x} (Y_1 Z_m + Y_m Z_0) + I_{3x} (Y_1 Z_1 + Y_m Z_m) \end{aligned} \right\} \quad (356)$$

いま、(356) 式の定数間の関係を、 θ , φ , h , g なるパラメーターを使用して、(357) 式あるいは (358) 式のようにおくことができる。

$$\left. \begin{aligned} \theta^2 &= (h Y_1 + Y_m)(g Z_0 + Z_m) \\ \varphi^2 &= (g Y_1 - Y_m)(h Z_0 - Z_m) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{g Y_m - Y_0}{Y_m - g Y_1} = \frac{Z_1 + g Z_m}{g Z_0 + Z_m} \end{aligned} \right\} \quad (357)$$

$$\left. \begin{aligned} g &= \frac{h Y_m + Y_0}{Y_m + h Y_1} = \frac{Z_1 - h Z_m}{h Z_0 - Z_m} \\ Y_0 Z_0 + Y_m Z_m &= (g \theta^2 + h \varphi^2) / (h + g) \\ Y_0 Z_m + Y_m Z_1 &= (\theta^2 - \varphi^2) h g / (h + g) \\ Y_1 Z_m + Y_m Z_0 &= (\theta^2 - \varphi^2) / (h + g) \\ Y_1 Z_1 + Y_m Z_m &= (h \theta^2 + g \varphi^2) / (h + g) \end{aligned} \right\} \quad (358)$$

これらを (356) 式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} g V_{2x}'' + V_{3x}'' - \theta^2 (g V_{2x} + V_{3x}) &= 0 \\ h V_{2x}'' - V_{3x}'' - \varphi^2 (h V_{2x} - V_{3x}) &= 0 \\ I_{2x}'' + h I_{3x}'' - \theta^2 (I_{2x} + h I_{3x}) &= 0 \\ I_{3x}'' - g I_{3x}'' - \varphi^2 (I_{2x} - g I_{3x}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (359)$$

これは容易に解ける形で、次の如くなる。

$$\left. \begin{aligned} g V_{2x} + V_{3x} &= A \sinh x \theta + B \cosh x \theta \\ h V_{2x} - V_{3x} &= C \sinh x \varphi + D \cosh x \varphi \\ I_{2x} + h I_{3x} &= A' \sinh x \theta + B' \cosh x \theta \\ I_{2x} - g I_{3x} &= C' \sinh x \varphi + D' \cosh x \varphi \end{aligned} \right\} \quad (360)$$

境界条件として左端の電圧、電流を与えると

$$\left. \begin{aligned} A &= -(I_0 + hI_1)Z_{f0} & A' &= -(gV_0 + V_1)Y_{f0} \\ B &= gV_0 + V_1 & B' &= I_0 + hI_1 \\ C &= -(I_0 - gI_1)Z_{s0} & C' &= -(hV_0 - V_1)Y_{s0} \\ D &= hV_0 - V_1 & D' &= I_0 - gI_1 \end{aligned} \right\} \quad (361)$$

$$\left. \begin{aligned} Z_{f0} &= \frac{1}{Y_{f0}} = \frac{gZ_0 + Z_m}{\theta} = \frac{\theta}{Y_m + hY_1} = \sqrt{\frac{gZ_0 + Z_m}{hY_1 + Y_m}} \\ Z_{s0} &= \frac{1}{Y_{s0}} = \frac{gZ_0 - Z_m}{\varphi} = \frac{\varphi}{gY_1 - Y_m} = \sqrt{\frac{hZ_0 - Z_m}{gY_1 - Y_m}} \end{aligned} \right\} \quad (362)$$

いま、これを両端に着目して、(363)式の如き、八端子網と考え、その映像四端子網を(364)式で与える

$$\left. \begin{aligned} Z_{f1}I_0 + Z_{ma}I_1 + Z_{mb}I_2 + Z_{mc}I_3 &= V_0 \\ Z_{ma}I_0 + Z_{f2}I_1 + Z_{mc}I_2 + Z_{mb}I_3 &= V_1 \\ Z_{mb}I_0 + Z_{mc}I_1 + Z_{f1}I_2 + Z_{ma}I_3 &= V_2 \\ Z_{mc}I_0 + Z_{ma}I_1 + Z_{ma}I_2 + Z_{f2}I_3 &= V_3 \end{aligned} \right\} \quad (363)$$

$$\left. \begin{aligned} I_0 Z_{r1} + I_1 Z_{mr} &= V_0 \\ I_1 Z_{r2} + I_0 Z_{mr} &= V_1 \\ I_2 Z_{r1} + I_3 Z_{mr} &= V_2 \\ I_3 Z_{r2} + I_2 Z_{mr} &= V_3 \end{aligned} \right\} \quad (364)$$

これらの係数間に、次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} Z_{f1} &= (Z_{f0} \coth l\theta + Z_{s0} \coth l\varphi)/(h+g) \\ Z_{f2} &= (h^2 Z_{f0} \coth l\theta + g^2 Z_{s0} \coth l\varphi)/(h+g) \\ Z_{ma} &= (h Z_{f0} \coth l\theta - g Z_{s0} \coth l\varphi)/(h+g) \\ Z_{mb} &= (Z_{f0} \operatorname{cosech} l\theta + Z_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi)/(h+g) \\ Z_{mc} &= (h Z_{f0} \operatorname{cosech} l\theta - g Z_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi)/(h+g) \\ Z_{ma} &= (h^2 Z_{f0} \operatorname{cosech} l\theta + g^2 Z_{s0} \operatorname{cosech} l\varphi)/(h+g) \\ Z_{f0}^2 &= (g Z_{r1} + Z_{mr})^2 = (g Z_{f1} + Z_{ma})^2 - \\ &\quad (Z_{mc} + g Z_{mb})^2 = (g Z_0 + Z_m)/(h Y_1 + Y_m) \\ Z_{s0}^2 &= (h Z_{r1} - Z_{mr})^2 = (h Z_{f1} - Z_{ma})^2 - \\ &\quad (h Z_{mb} - Z_{mc})^2 = (h Z_0 - Z_m)/(g Y_1 - Y_m) \end{aligned} \right\} \quad (365)$$

$$\left. \begin{aligned} h \frac{Z_{r2} + g Z_{mr}}{g Z_{r1} + Z_{mr}} &= \frac{g Z_{ma} + Z_{f2}}{g Z_{f1} + Z_{ma}} = \frac{Z_{ma} + g Z_{mc}}{Z_{mc} + g Z_{mb}} \\ \frac{Z_1 + g Z_m}{g Z_0 + Z_m} &= \frac{g Y_m - Y_0}{Y_m - g Y_1} \end{aligned} \right\} \quad (366)$$

$$\left. \begin{aligned} g \frac{Z_{r2} - h Z_{mr}}{h Z_{r1} - Z_{mr}} &= \frac{Z_{f2} - h Z_{ma}}{h Z_{f1} - Z_{ma}} = \frac{Z_{ma} - h Z_{mc}}{h Z_{mb} - Z_{mc}} \\ \frac{Z_1 - h Z_m}{h Z_0 - Z_m} &= \frac{Y_0 + h Y_m}{Y_m + h Y_1} \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

$$\cosh l\theta = \frac{g Z_{r1} + Z_{ma}}{Z_{mc} + g Z_{mb}}, \quad \cosh l\varphi = \frac{h Z_{r1} - Z_{ma}}{h Z_{mb} - Z_{mc}} \quad (368)$$

この場合の解の要点は、(357)(358)式である。このような、巧妙なパラメータは、基礎微分方程式の正面から取組んでも、容易に着想されるものではない。

第13章 実験

13.1. 概説

レッヘル線を用いて、簡単な実験を試み、理論の真否を検証した。レッヘル線による実験は、疎結合における定在波の波長を測定することが、最も安定、容易な測定ができるので、不均等分布定数回路においてもその定在波の波長の変化を実験したいと思ったが、それは困難であることがわかった。

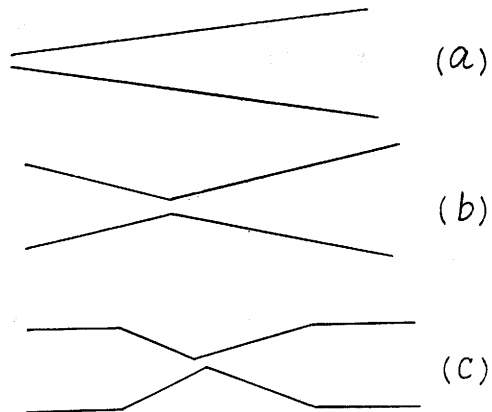


Fig. 20

たとえば、平行なレッヘル線を、(20)図の如く、いろいろな形で不平行にしても、定在波の波長は、平行な場合とほとんど同じく、変化がみとめられないことがわかった。

直径6mmの銅棒の場合も、直径0.2mmの銅線の場合も、同様に、大して変化は認められなかった。波長を決定する θ は $\theta = \int \sqrt{y z} dx$ で与えられる。この y, z は、大略、次の如きものである。

$$y = \frac{j \omega k_e}{\log(D/r)}, \quad z = j \omega k_L \cdot \log(D/r) \quad (369)$$

ただし、 D はレッヘル線の間隔、 r はその半径、 k_e, k_L は定数

この式で D が x の関数であるとしても、その特性は yz の積には表われないからである。

定在波に所望の波長変化を生ずるような不均等分布定数回路を設計するには、レッヘル線の外形を変えるのではなく、媒質を変化したり、分布装荷を施したりすることが必要であるとすれば、これは容易な実験ではなくなる。

13.2. 測定理論および実験法

実験は(21)図のように、直径6.3mm、長さ2mの真鍮棒を使用した。松葉型に一端を開き、一端を短

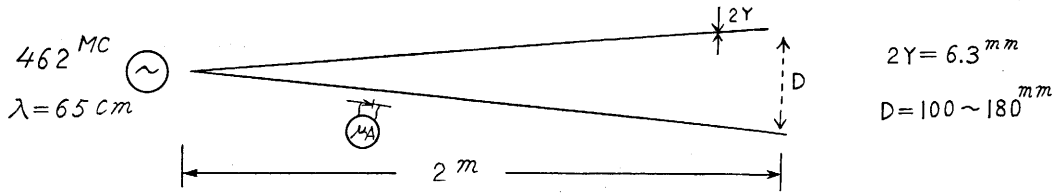


Fig. 21

絡し、短絡側を高周波電源に疎結合した。この不均等分布定数回路は、前述のように、平行なレベル線の場合と比較して、定在波の波長には、変化を認めることができなかった。そこで $\theta = j\beta = j\gamma l$ とおけば、 γ は殆んど、一定であると考えてよい。

また、表皮作用を考慮した抵抗は、材質を銅であるとする⁽¹⁵⁾、

$$R_f = 0.74 / (r_{mm} \sqrt{\lambda_m}) \Omega/m \quad (370)$$

輻射抵抗は

$$R_p = 120(\pi D/\lambda)^2 \Omega \quad (371)$$

いま、 $r = 3.2 \text{ mm}$, $\lambda = 65 \text{ cm}$, $D = 5 \text{ cm}$

とすると、 $R_f + R_p = 7.3 \Omega/m$ の程度であるから、損失は考慮しないことにした。また分布定数の C や L の値は

$$\left. \begin{aligned} C &= 12.1 / \log_{10}(D/r) \text{ pF/m} \\ L &= 0.921 \log_{10}(D/r) \mu\text{H/m} \end{aligned} \right\} \quad (372)$$

D は x の函数であるが、このように簡単に表わされるためには、 $(D/r) < 10$ となるような点を測定するように注意した。このような仮定で (59) 式より

$$I_p \varepsilon^{p_p} = I_B \varepsilon^{p_l} \cosh(\theta_l - \theta_p) + \frac{V_B}{Z_{00}} \varepsilon - p_l \sinh(\theta_l - \theta_p)$$

いまの場合、 $\theta_l = jrl$ とすれば

$$\begin{aligned} I_p \varepsilon^{p_p} &= I_B \varepsilon^{p_l} \cos\{r(l-x)\} + j \frac{V_B}{Z_{00}} \varepsilon - p_l \sin\{r(l-x)\} \\ I_p \varepsilon^{p_p} - p_l &= I_B \left\{ \cos r x' + j \frac{Z_B}{Z_{0n}} \sin r x' \right\} \end{aligned} \quad (373)$$

ただし $l-x = x'$

同様に Q 点においては

$$I_Q \varepsilon^{p_q} - p_l = I_B \left\{ \cos r x'' + j \frac{Z_B}{Z_{0n}} \sin r x'' \right\} \quad (374)$$

いま、 $\cos r x' = \cos r x'' = 0$ のときは

$$\frac{I_p \varepsilon^{p_p} - p_l}{I_Q \varepsilon^{p_q} - p_l} = 1 \quad \text{or} \quad \frac{I_p}{I_Q} = \frac{\varepsilon^{p_q}}{\varepsilon^{p_p}} \quad (375)$$

$$y(x) = j\omega k_c / \log(D_x/r), \quad z(x) = j\omega k_L \log(D_x/r)$$

とすると

$$Z_{0x} = \sqrt{\frac{z(x)}{y(x)}} = \sqrt{\frac{k_L}{k_c}} \log \frac{D_x}{r} = k \log \frac{D_x}{r}$$

同様に

$$Z_{0y} = k \log \frac{D_y}{r};$$

ただし k_c k_L k は定数

また、

$$\varepsilon^{2p_x} = \frac{Z_{0x}}{Z_{00}}, \quad \varepsilon^{2p_y} = \frac{Z_{0y}}{Z_{00}}$$

従って

$$\frac{I_y^2}{I_x^2} = \frac{\varepsilon^{2p_x}}{\varepsilon^{2p_y}} = \frac{Z_{0x}}{Z_{0y}} = \frac{\log(D_x/r)}{\log(D_y/r)} \quad (376)$$

すなわち、電流最大値の自乗の比は、その点の特性インピーダンスの逆比に等しい。あるいは、 x 点における電力と、 y 点における電力とは相等しいことを示す。

このような関係は、定在波の最大値、あるいは最小値において成立する。

$$\frac{I_y}{I_x} = \sqrt{\frac{\log(D_x/r)}{\log(D_y/r)}} \quad (377)$$

実験によって、 I_x と I_y の最大値の比を求め、その点の D_x と D_y を測定し、(377) 式に代入して、等式が成立するか、どうかということをもって、本実験の目的とする。この場合、電流比が解ればよいので、電流の絶対値を知る必要はないから、ゲルマニウムダイオードの検波器に接続されたマイクロアンメーターの読みを測定すればよいことになる。使用周波数は、高周波損失（表皮作用、輻射抵抗）を少なくするためには、波長数 m 前後のものが適当であろうが、定在波を数箇のせると設備が大きくなって困るので、丁度、ありあわせの (955) エーコン管のプシプル発振器によって、 $\lambda = 65 \text{ cm}$, $f = 462 \text{ MC}$ を使用した。

実験上の注意

(1) 開放端を、あまり開くと、輻射抵抗が増大したり、周囲条件の不整が、はやり易くなるので、 D を余り大きくすることは避けた。

(2) 電流最大値は、開放端から数えて、2~5 番目までを測定値とした。

(3) レッヘル線と検波器の間隔は、1 mm の誤差

もないように摺動することが大切である。そのためには、あらかじめ、平行レッヘル線で検査するようにした。

すなわち、平行レッヘル線の場合には、最大値は皆ひとしいはずであるから、そのように検波器と一本のレッヘル線の相互位置を定め、次に、そのレッヘル線は固定したまま、他方のレッヘル線を移動して松葉型

とした。

(4) 高周波電源は銅板で遮蔽し、これに穴をあけてレッヘル線を挿入し、結合した。

(5) 電源として、直流定電圧装置、および、交流定電圧装置を併用した。

13.3. 実験結果

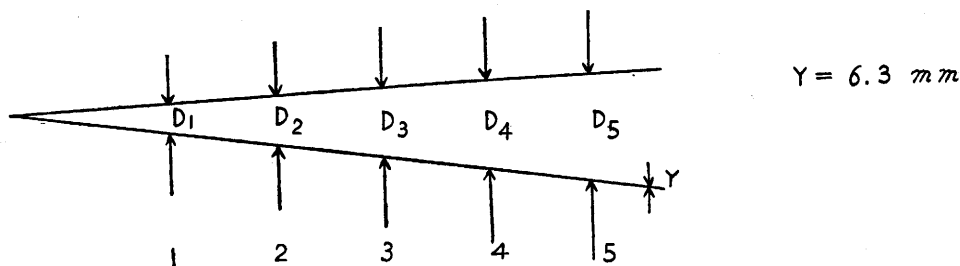


Fig. 22

$$a = (\log \frac{D_n}{r}) / (\log \frac{D_m}{r})$$

第 1 表

測定点	1	2	3	4	5
mm 間 隔 D	35	51	66	83	100
D/r	5,556	8,095	10,48	13,17	15,87
log ₁₀ (D/r)	0,7448	0,9082	1,0204	1,1296	1,2006
隣接の比 a	1,220	1,124	1,107	1,063	
√a	1,10	1,06	1,05	1,03	

第 1 表は、次の実験 1, 2 の測定点に対応する。

第 2 表

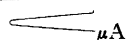
測定点	1	2	3	4	5
mm D=80 μA	55	50	41	40	42
40μAに対する修正量 μA	-15	-10	-1	0	-2
μA	43	34	24	22	22
修正値 μA	31.3	27.2	23.4	22.0	20.9
電 流 比	1.15	1.16	1.06	1.05	
誤 差*	+0.05	+0.10	+0.01	+0.02	
mm D=80 μA	58	58	47	45	45
45μAに対する修正量 μA	-13	-13	-2	0	0
μA	51	43	32	28	27

実験 2	修正値 μA	39.6	33.4	30.6	28	27
	電 流 比	1.18	1.14	1.10	1.04	
	誤 差*	+0.08	+0.08	+0.04	+0.01	

* 上記の誤差とは、第一表の√a を基準値としたときの誤差である。

第 3 表

測定点	1	2	3	4	5
間 隔 D mm	43	70	100	131	160
D/r	6.825	11.11	15.87	20.79	25.40
log ₁₀ (D/r)	0.8341	1.0457	1.2006	1.3178	1.4048
a (隣接の比)	1.254	1.148	1.098	1.066	
√a	1.12	1.07	1.05	1.03	
mm D=80 μA	55	50	41	40	42
40μAに対する修正量 μA	-15	-10	-1	0	-2
μA	40	34	22	20	18
修正値 μA	29.1	27.2	21.5	20.0	17.2
電 流 比	1.07	1.27	1.08	1.16	
誤 差	-0.05	+0.20	+0.03	+0.13	
mm D=80 μA	53	51	52	51	50
51μAに対する修正量 μA	-2	0	-1	0	+1

実験 4		34	30	27	25	23
	修正値 μA	32.8	30.0	26.5	25.0	23.5
	電 流 比	1.09	1.13	1.06	1.06	
	誤 差	-0.03	+0.06	+0.01	+0.03	

13.4. 実験結果の考察

(21) 図の右から左に検波器を移動すると、測定値からも解るように、電流は次第に増大することが解る。これは、右から左方に向って、Step down transformer を縦続したものと等価的に考えられる。松葉形の開放端に向って電流が減少する傾向は、(376) 式から当然、推定されたとおりである。

また、測定の精度をあげるために、あらかじめ、平行なレッヘル線で電流最大値を測定し、これが皆、等しい値であることを仮定して、修正量を求めておいた。

(373) 式で、 $p_p = p_l = 0$ とおけば、平行なレッヘル線の場合となるが、その最大値は、皆、等しいことがわかる。しかるに、実測値において等しくないのは、右半分では、線の空間的不均一のためと考えられる。左半分では、電源との結合端から不整振動の波及が大きく利いているように考えられる。ともかく、真値としては、皆、等しいはずであるから、平行レッヘル線の真値を仮定することによって、不平行の場合の修正量を定めた。

次に、電流を測定している方のレッヘル線の位置をそのまま動かさないようにして、他の一本を松葉形におきかえ、不平行状態の電流最大値を測定し、前の修正量と電流の大いさに比例して修正した。誤差の大きいものもあるが、与えられた実験装置では、この程度は止むを得なかった。

\sqrt{a} を基準値と仮定すると、±の誤差が分布する。誤差の平均値は 0.0487、標準偏差=0.0593 信頼係数を 0.99 とすれば、基準値 \sqrt{a} に対して、±0.038 の信頼区間をもって、本実験の結果を信頼することができる。

結 言

以上のように、分布定数回路の基礎理論は、一般的に書き改められた。第1章においては、従来の不均等分布定数回路の取扱いが、その出発点に誤りがあることを示した。影像パラメーターの新しい表現形式は、今後、一般的に採用されるであろう。第2章から第11章においては、従来の均等分布定数回路において取り

扱われている理論を、一般的内容を与えて、これを再表現した。第12章においては、第1章の主張が、更に別の面からも確認されることを述べた。また影像分割の概念を拡張し、影像四端子網、分布結合回路に言及した。これら理論の信頼性は、第13章の実験によって確認された。また、Tapered Matching Section は、影像分割の基礎概念によって、その理論的意義を推進することができた。影像分割の理論を、分布結合回路に適用して得られる解は、最も簡明であるが、この方法は、さらに、多端子の不均等分布結合回路に対しても一般化されるであろう。なお、分布定数濾波器、整合回路、広帯域伝送路等の設計に対しても、基礎的出发点を与えるであろう。

筆者は、現富山大学教授、森光三先生に、親しく、御指導を戴いた。本理論の基礎は、森先生の御指導、てほどきによるところが大きい。ここに更めて、深く感謝の意を表する次第である。なお、実験器具を貸与され、御助言を戴いた押山教授、中沢章君、石田哲雄先生、重永先生に御礼申上げる。また、終始、御後援を戴いた中村教授、金丸春雄先生、ほか諸先生方に厚く感謝の意を表する。(昭和36.9.1.)

文 献

- (1) 電気工学ハンドブック：173 (昭26)
- (2) 黒川・吉田・平山：信学誌 27, 555 (昭18)
- (3) 無線工学ハンドブック：189 (昭29)
- (4) 立本：分布結合回路，山梨大工学部研究報告 3, 4, 5, (昭27, 28, 29)
- (5) 永井・神谷：伝送回路網学：80 (昭22)
- (6) 電気学会大学講座：電気回路論：279~312 (昭27)
- (7) 立本：不均等分布定数回路，電気誌 79 531 (昭34)
- (8) 松本：多端子結線網の伝送特性について，電通誌 571 (昭10.7)
- (9) 小田：平行四線条の一解法について，電通誌 216, 182 (昭13.3)
- (10) 薄井：結合線回路網の理論，電学誌，60, 62 (昭15.2)
- (11) 広田：四端子回路とみた平行2線路系について，電通誌，577 (昭16.9)
- (12) 内田：分布結合回路の理論（その一，その二）電通誌別冊論文集，36, 50 (昭23.3)
- (13) 黒田：分布結合回路の取扱いについて，電通誌，348号，10 (昭28.1)
- (14) 超短波(上)：三木・安田・高橋：日本放送

- 協会編, 58 (昭30.2)
- (15) 森脇・猪瀬 : 分布結合回路の帯域濾波特性 : 電通誌, 465 (昭34.8)
- (16) C. Ravut : Propagation des courants sinusoïdaux sur des lignes quelconques, R. G. May 8 (1920) pp 611~615
- (17) J. R. Carson : Propagation of Periodic currents over Nonuniform Lines. The Electrician March 4 (1921) pp 272~273
- (18) S. Ballantine : Non-Uniform Lumped Electric Lines. J.F.I. April (1927) pp 561~582
- (19) F. Thomas : Propagation du courant sur les lignes quelconques. R.G. Oct. (1929) pp 567~569
- (20) J.W. Arnold & P.F. Bechberger: Sinusoidal Currents in Linearly Tapered Loaded Transmission Lines. I.R.E Feb (1931) pp 304~310
- (21) A.T. Starr : The Nonuniform Transmission Line. I.R.E. June (1932) pp 1052~1063
- (22) J. W. Arnold & B. C. Taylor : Linearly Tapered Loaded Transmission Lines. IRE Nov (1932) pp 1811~1817
- (23) C.R. Burrow : The Exponential Transmission Line. BSTJ Oct (1938) pp 555~573
- (24) H.A. Wheeler : Transmission Lines with Exponential Taper. IRE June (1939) pp 65~71
- (25) J.R. Pierce : A Note on the Transmission Line Equations in Terms of Impedances. B.S.T. J. Vol 22, July (1943) pp 263~265
- (26) L.R. Walker & N. Wax : Nonuniform Transmission Lines and Reflection Coefficients. J. Appl. Phys. 17 (1946) pp 1043
- (27) G.J. Clemens : A Tapered Line Termination at Microwaves. Quart. appl. Math. 7 Jan (1950) pp 432
- (28) L.A. Pipes : The Reversion Method for Solving Nonlinear Differential Equation, Journal of Applied Physics, New York, N.Y. Vol 23. No. 2 Feb 1952 pp 202~207
- (29) H. J. Scott : The Hyperbolic Transmission Line as a Matching Section. Proc. I.R.E. Vol 41 Nov. 1953. pp 1654~1657
- (30) R. F. H. Yang : Parabolic Transmission Line. Proc. Inst. Radio Engrs. 43. 1010 (1955)
- (31) H. Kaufman : Bibliography of Nonuniform Transmission Lines. Trans. IRE, AP-3, October 1955, pp 218~220
- (32) L.A. Pipes : Computation of the Impedances of Nonuniform Lines by a Direct Method. AI EE. November 1956, pp 551
- (33) J. Willis & N.K. Sinha : Nonuniform Transmission Lines as Impedance Matching Sections Proc IRE. 43. December 1955, pp 1975
- (34) R.W. Klopfenstein; A Transmission Line Taper of Improved Design. Proc. IRE Vol 44. January 1956 pp 31~35
- (35) E.F. Bolinder : Fourier Transforms and Tapered Transmission Lines. Proc. IRE. 44 1956. pp 557
- (36) L. Solymar : On Higher Order Approximations to the Solutions of Nonuniform Transmission Lines. IRE. November 1957 pp 1547
- (37) I.R.A. Jacobs : The Nonuniform Transmission Line as a Broadband Termination. BSTJ. Vol. 37. July 1958 pp 913~924
- (38) G.G. Kazansky : Outline of a theory of non-uniform transmission Line. Proc. IEE Vol 105. pt C, March, 1958, pp 126~138
- (39) I.R.A. Jacobs : A Generalization of the Exponential Transmission Line. IRE Jan. 1959 pp 97~98
- (40) H. Kurss & W.K. Kahn : A System of Non-uniform Transmission Lines. IRE. February 1960, pp 250
- (41) I. Sugai : The Solutions for Nonuniform Transmission Line Problems. IRE August 1960. pp 1489