

# 固体ホーンの等価四端子回路とその伝送特性

杉 長 介

## Four Terminal Equivalent Circuit of Solid Horn and its Transmissoin Character

Chōsuke Sugi

Summary—Solid horn is a very important part in some sort of ultrasonic equipment. However, little consideration has been done from the view point of power transmission characteristics. This paper deals with this problem, and presents several hints on its design and application. First, four transmission constants **A**, **B**, **C**, **D** of solid horn with exponential and conical type are given, and applying these constants, equivalent circuits and image parameters are derived. And next, problem of impedance matching between vibrator and complex impedance load is discussed.

### 1 序 言

超音波の作用を利用する各種の装置において、振源振動子と負荷の間に、しばしば固体ホーンを挿入することがある。これは電気回路の場合における変成器に相当したもので、これを用いることによつて、超音波振動の振幅を拡大したり、振源の内部インピーダンスと負荷のインピーダンスが異なる場合に、それらの間を整合して、最大の勢力伝送能率を得たりすることができる。

固体ホーンの理論的な解析や、その設計方法に関しては、すでに多数の研究が発表されており、筆者も二三の論文<sup>1) 2)</sup>を発表したが、これらは、ごく軽い負荷の場合における単なる振幅の拡大のためのもので、任意の負荷に対し最も有効に実効勢力を伝送するという立場からの研究は全くなされておらず、また他の著者の発表もあまりないようである。

しかし、超音波溶接、超音波鋳造其他の色々な超音波応用機器において、このインピーダンス整合の問題は非常に重要で、能率向上のため、是非明確にしておく必要があるものと考えるが、本論文はこれに関して論じたものである。

固体ホーンにおける振動の伝送特性は、色々な手段によつて解析することができるであろうが、それが一次元的振動をすると考えられる場合は、電気振動系による類推を用いるのが最も簡便であり、適当な形の電氣的な等価四端子回路を書き、また、その機械的な伝送定数や影像パラメータを求めておくと、伝送特性がき

わめて明確に把握され、したがつて最も合理的な設計をすることができるようになる。無論、このような等価回路による解析は、振動が一次元的と考えられる場合に限られ、その適用範囲には限界があるが、通常はこれで十分な場合が多く、また、ホーンの断面が大きく、そのまゝでは一次元的振動とすることが無理な場合も、実際上はこれに縦に分割間隙を入れ、この解析方法がそのまゝ正確に適合するようにすることができる。

### 2 固体ホーンの運動方程式とその解

不均一断面棒の縦振動は、棒の断面の寸法が波長に比較して十分小さく、また、そのフレア角があまり大きくない場合には、一次元的振動と考えて差支えないので、棒にそつて  $x$ -軸をとり、基準面より  $x$  の距離の断面積を  $S(x)$ 、交番変位を  $U(x)$  とすると、運動方程式は

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{S(x)} \cdot \frac{dS(x)}{dx} \cdot \frac{d}{dx} + k^2 \right) U(x) = 0 \quad (1)$$

で与えられる。たゞし、上式中の  $k$  は均一断面棒に対する波長定数で、材料のヤング率を  $E$ 、密度を  $\rho$  とした場合、

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} = \frac{\omega}{c} \quad (2)$$

である。なお、 $x$ -面の断面積  $S(x)$  は、基準面の面積を  $S(0)$ 、断面関数を  $F(x)$  として、

$$S(x) = S(0) \cdot F(x) \quad (3)$$

で与えられるものとする。

いま、

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{F(x)}} (Ae^{jT k x} + B e^{-jT k x}) \quad (4)$$

と置き、これを(1)式の左辺に代入し、それが零となるための条件を求めると、

$$k^2(1-\tau^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{F''(x)}{F(x)} - \frac{1}{2} \left( \frac{F'(x)}{F(x)} \right)^2 \right) \quad (5)$$

が得られる。ただし、ここに  $F'(x)$  と  $F''(x)$  は  $F(x)$  の一階および二階の微分係数を表わす。すなわち、(5)式が成立すれば、(4)式が(1)式の一つの解となる。

(4)式より明らかなように、 $\tau k (=k')$  は不均一断面体内を縦弾性波が伝播する場合の波長定数に相当し、その意味で、 $\tau = k'/k$  を不均一断面体の波長定数率と名付けることにする。(5)式を書き換えると、波長定数率は

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{2k^2} \left( \frac{F''}{F} - \frac{1}{2} \left( \frac{F'}{F} \right)^2 \right)} \quad (6)$$

となる。この波長定数率は上式の示すように、伝送体の形状と周波数に関係する。

超音波伝送用として使用される固体ホーンの形は無数に考えられるわけであるが、本論文では断面関数が

$$F(x) = \left( \cosh\left(\frac{x}{h}\right) + T \sinh\left(\frac{x}{h}\right) \right)^2 \quad (7)$$

( $T, h$  は形状定数)

で与えられる双曲線関数ホーンを取扱うことにする。

通常最も多く実用されているエクスponential形、錐形、カテノイダル形などは、すべて、この双曲線関数ホーンの特別な場合として導かれる。

断面関数が(7)式によつて与えられるときは、波長定数率は、この(7)式と(6)式より

$$\tau = \sqrt{1 - \left( \frac{1}{kh} \right)^2} \quad (8)$$

となる。

#### i) エクスponential形

(7)式において  $T=1$  と置けば

$$F(x) = e^{\frac{2}{h}x} = e^{\gamma x} \quad (9)$$

となり、テーパ定数  $\gamma = 2/h$  のエクスponential形が導かれる。そして、このエクスponential形の場合の波長定数率は

$$\tau = \sqrt{1 - \left( \frac{\gamma}{2k} \right)^2} \quad (10)$$

となる。

#### ii) 錐形

(7)式において  $T=h/l_0$  ( $l_0$  は定数) と置き、そ

の上で、 $h$  が無限大となつた極限の場合を考えると、

$$F(x) = \left( 1 + \frac{x}{l_0} \right)^2 \quad (11)$$

となるが、これは、基準面と頂点の間の距離が  $l_0$  の錐形ホーンの断面関数を表わす。そして、この錐形の場合の波長定数率は

$$\tau = 1 \quad (12)$$

となり、位相伝播速度は均一断面体のそれと等しい。

#### iii) カテノイダル形

(7)式において  $T=0$  と置けば

$$F(x) = \cosh^2\left(\frac{x}{h}\right) \quad (13)$$

となり、カテノイダル形が得られる。〔波長定数率は(8)式〕

以上のごとく、エクスponential形、錐形、カテノイダル形のいずれに対しても、波長定数率  $\tau$  は形状定数と均一断面体の波長定数  $k$  とだけで定まる。

なお、(7)式の代りに断面関数が

$$F(x) = \cosh\left(\frac{x}{h}\right) + T \sinh\left(\frac{x}{h}\right) \quad (14)$$

で与えられる双曲線関数ホーンを考え、 $T=h/l_0$  と置き、 $h$  が無限大になつた極限の場合を考えると、

$$F(x) = 1 + \frac{x}{l_0} \quad (15)$$

となり、パラボラ形ホーンが得られる。そして、この場合の波長定数率は(6)式より

$$\tau = \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2(l_0+x)^2}} \quad (16)$$

となる。すなわち、パラボラ形ホーンにおける波長定数率は形状定数  $l_0$  と、波長定数  $k$  のみならず、 $x$  にも関係し、したがつて、位相速度は波動がホーン内を伝播して行くにしたがつて変化することになる。

以上のごとく、運動方程式の解はエクスponential形、錐形、カテノイダル形およびパラボラ形など、どれもすべて、それぞれに対応した波長定数率  $\tau$  を用いることにより、(4)式を以て表わすことができる。

なお、この(4)式は、三角関数を用いて

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{F(x)}} (A' \cos \tau k x + B' \sin \tau k x) \quad (17)$$

$$[A' = A + B, B' = j(A - B)]$$

のように表わしてもよい。

本論文では、最も実用価値の大きいエクスponential形と錐形について考察するが、他の形のものも大体同じように取扱うことができる。

### 3 固体ホーンの基礎伝送方程式と四伝送定数

固体ホーンの運動方程式を解き、その交番変位  $U(x)$  が求められれば、交番速度は  $V(x)=j\omega U(x)$ 、交番応力は  $P(x)=-EdU(x)/dx$ 、また、断面に働く総交番力は  $F(x)=S(x) \cdot P(x)$  として与えられる。

基準面（入力端面）、すなわち、 $x=0$  における交番速度を  $V(0)$ 、そこに働く交番力を  $F(0)$  と置くと、(4) 式または、(17) 式における二つの積分定数がこれらによつて定まり、 $F(0)$ 、 $V(0)$ 、 $F(x)$ 、 $V(x)$  の四つの量の間の関係式が決定される。それを整理し、マトリックス表示を用いて

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ V(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(x) \\ V(x) \end{pmatrix} \quad (18)$$

のように書くことにし、この (18) 式を電気回路の場合に準じて、基礎伝送方程式、また同式中の  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  を入力端面と  $x$ -面の間の伝送定数と呼ぶことにする。

長さ  $l$  のエクスponential形と錐形の固体ホーンについて、その入力端面と出力端面の間の伝送定数を求めると、その結果は次に示すようになる。

i) エクスponential形固体ホーンの伝送定数

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \sqrt{\frac{S(0)}{S(l)}} \cdot \frac{\cos(\tau kl \pm * \text{Cos}^{-1} \tau)}{\tau} \\ \mathbf{B} &= j\rho c V \sqrt{S(0) \cdot S(l)} \cdot \frac{\sin \tau kl}{\tau} \\ \mathbf{C} &= \frac{j}{\rho c V \sqrt{S(0) \cdot S(l)}} \cdot \frac{\sin \tau kl}{\tau} \\ \mathbf{D} &= \sqrt{\frac{S(l)}{S(0)}} \cdot \frac{\cos(\tau kl \pm * \text{Cos}^{-1} \tau)}{\tau} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

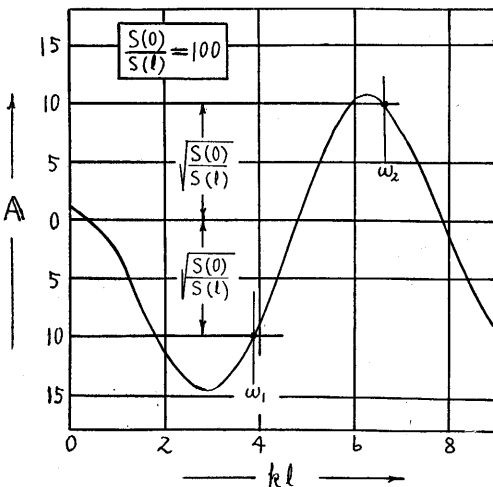


Fig. 1  $\mathbf{A}$  of exponential horn.

上式中の  $\tau$  は (3) (9) および (10) 式より  $kl$ 、 $S(0)/S(l)$  を用いて

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{4(kl)^2} \log_e^2 \left( \frac{S(0)}{S(l)} \right)} \quad (20)$$

で与えられる。

したがつて、 $kl$  を変数にとつて、長さ  $l$  のエクスponential形固体ホーンの伝送定数  $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{D}$  を

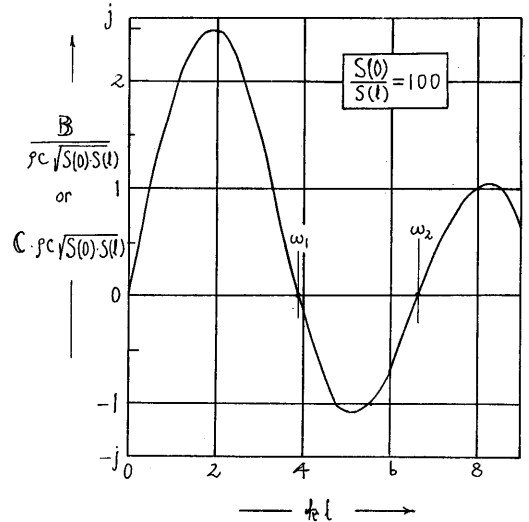


Fig. 2  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$  of exponential horn.

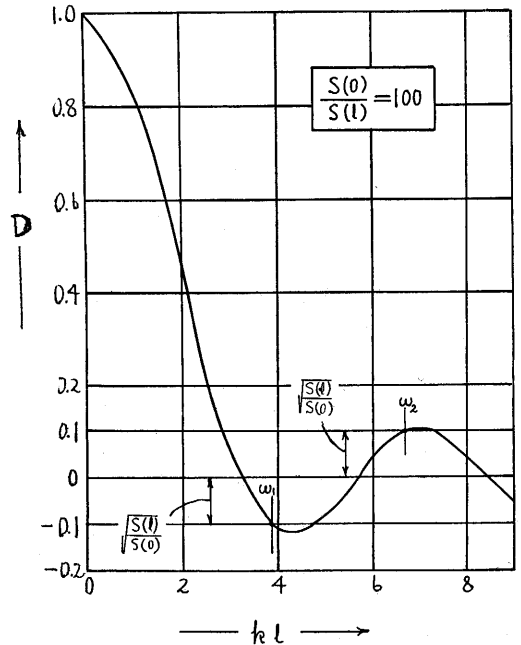


Fig. 3  $\mathbf{D}$  of exponential horn.

\* 複号は、ホーンが入力側から出力側に向つて「先太」のときは上を、「先細」のときは下をとるものとする。なお、以後に出てくる複号は、特別の記載の無い限り、すべてこの規約に従う。

計算することができる。

一例として、 $S(0)/S(l)=100$  の「先細」ホーンにつき、 $kl$  を変数としたときの曲線を上式より計算し、Fig. 1~Fig. 3 に示す。(これは、 $l$  を一定と考えれば、周波数に対する変化曲線と考えられる。)

## ii) 錐形固体ホーンの伝送定数

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \sqrt{\frac{S(0)}{S(l)}} \left\{ \cos kl - \frac{1}{kl} \left( 1 - \sqrt{\frac{S(l)}{S(0)}} \right) \sin kl \right\} \\ \mathbf{B} &= j\rho c \sqrt{S(0) \cdot S(l)} \left\{ \left\{ 1 + \frac{1}{(kl)^2} \left( \sqrt{\frac{S(0)}{S(l)}} + \sqrt{\frac{S(l)}{S(0)}} - 2 \right) \right\} \sin kl - \frac{1}{kl} \left( \sqrt{\frac{S(0)}{S(l)}} + \sqrt{\frac{S(l)}{S(0)}} - 2 \right) \cos kl \right\} \\ \mathbf{C} &= \frac{j}{\rho c \sqrt{S(0) \cdot S(l)}} \sin kl \\ \mathbf{D} &= \sqrt{\frac{S(l)}{S(0)}} \left\{ \cos kl - \frac{1}{kl} \left( 1 - \sqrt{\frac{S(0)}{S(l)}} \right) \sin kl \right\} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

(\*  $\mathbf{A}$  の場合と上下が逆なことに注意)

この錐形ホーンの場合は、前述のごとく、 $\tau=1$  である。

なお、四伝送定数の間には、一般に、 $\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = 1$  の関係が成立する。

## 4 固体ホーンの等価四端子回路

固体ホーンの伝送定数が与えられれば、それに基づいて、それに対する色々な回路形式の等価四端子回路を作ることができるが、その場合、その等価回路の各アームを表わす二端子回路が、具体的にリアクタンス素子の並列直列の組み合わせで構成できるためには、それら各アームのインピーダンス関数  $Z$  が、有理リアクタンス関数で、 $dZ/jd\omega > 0$  の条件を満足し、周波数の変化に対し常に正の傾斜を持つていなければならない。

いま、等価回路を仮りに  $\pi$  型四端子回路で表わすものとする、その直列アームのインピーダンスは  $\mathbf{B}$  で与えられることになる。しかるに、例えばエキスポネンシヤル形ホーンの  $\mathbf{B}$  は (19) 式で明らかのように、部分的にしか  $d\mathbf{B}/jd\omega > 0$  の条件が満足されないもので、これをリアクタンス素子の並列直列の組み合わせで構成することはできない。

しかるに、伝送マトリックスは、一般に、次のように、三つのマトリックスの積の形に書き換えることができる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{B} \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathbf{D}} & 0 \\ 0 & \mathbf{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{C} & 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{C} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{A}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{B} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

そして、このように分割すると、理想変成器を用い、(22) 式を用いた場合は Fig. 4(a)、(23) 式を用いた場合は Fig. 4(b) のような等価四端子回路を書くことができ、Fig. 4(a) の場合は、直列アームは  $Z_{A1} = \mathbf{B}/\mathbf{D}$ 、並列アームは  $Z_{B1} = \mathbf{D}/\mathbf{C}$  で与えられ、Fig. 4(b) の場合は直列アームは  $Z_{A2} = \mathbf{B}/\mathbf{A}$ 、並列アームは  $Z_{B2} = \mathbf{A}/\mathbf{C}$  で与えられる。そして、これでは、すべて零と極とが交互に配列しており、常に周波数の増加に対し正傾斜をもち、したがってリアクタンス素子の組み合わせで構成することができる。

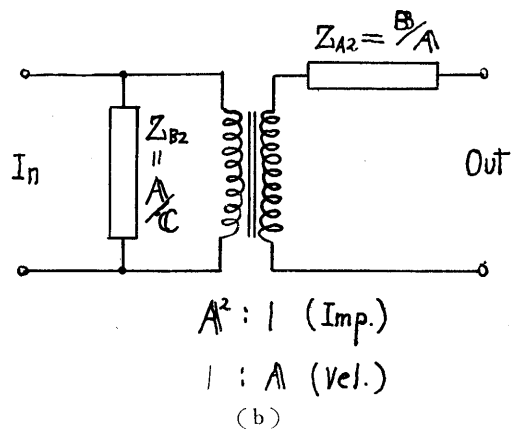
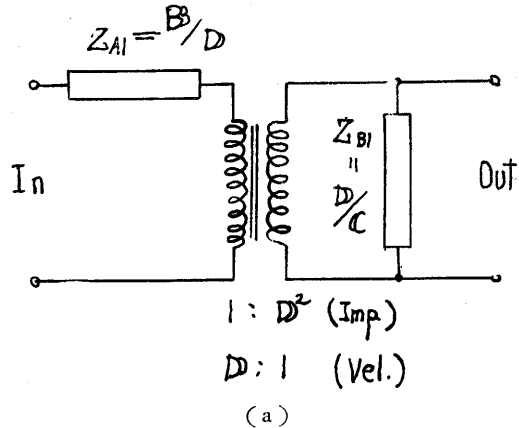


Fig. 4

Fig. 5 はエキスポネンシヤル形の  $\mathbf{B}/\mathbf{A}$ 、Fig. 6 は錐形の場合の  $\mathbf{B}/\mathbf{A}$  と  $\mathbf{A}/\mathbf{C}$  の  $kl$  に対する変化を示したものである。

理想変成器の速度変成比は Fig. 4(a) の場合は  $1/\mathbf{D}$ 、

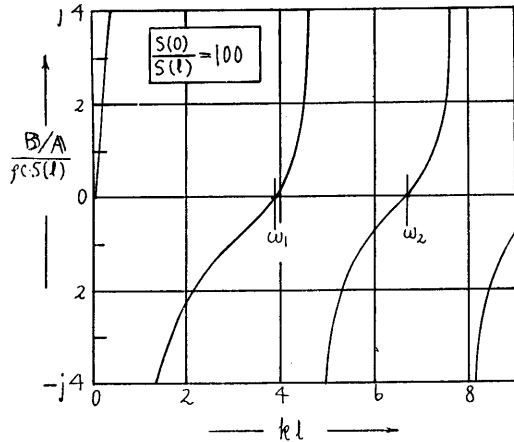
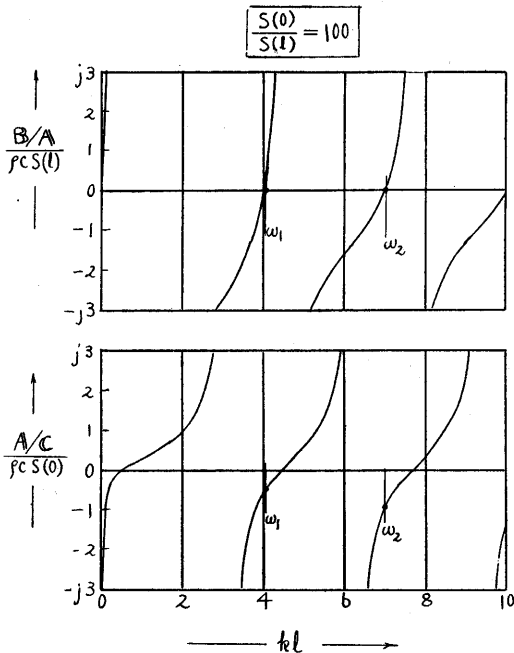

 Fig. 5  $B/A$  of exponential horn.

 Fig. 6  $B/A(=Z_{A2})$  and  $A/C(=Z_{B2})$  of conical horn.

Fig. 4(b) の場合は  $A$  で与えられ、これらは  $kl$  (したがって周波数) の関数である。

以上の結果 Fig. 4(a), (b) は Fig. 7(a), (b) のごとく書ける。

なお、とくにエキスポネンシャル形ホーンの場合は直列アームと並列アームが逆回路の関係にあり、

$$Z_{A1}Z_{B1} = Z_{A2}Z_{B2} = B/C = (\rho c)^2 S(0) \cdot S(l) \quad (24)$$

の関係が成立する。

以上のように、直列アームと並列アームが逆回路関係にあるということは、エキスポネンシャル形の重要

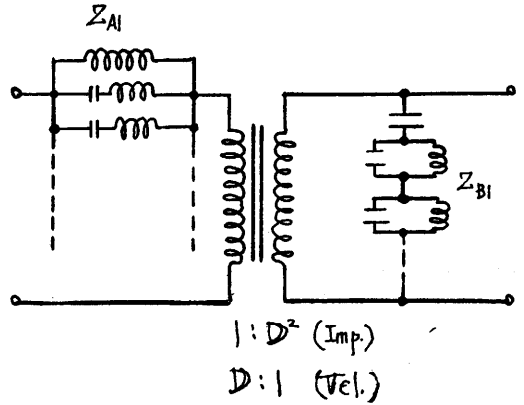


Fig. 7 (a)

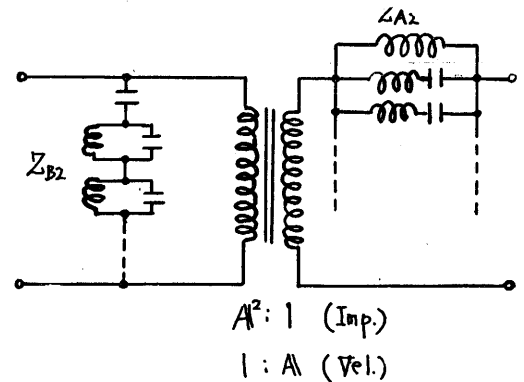


Fig. 7 (b)

な特長で、ホーンの自由共振周波 ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ) において、直列アームのインピーダンスに零、並列アームのインピーダンスは無限大となる故、この周波数では単に理想変成器のみで表わすことができる。(この場合速度変成比は  $\sqrt{S(0)/S(l)}$  となる。)

他の形のホーン、例えば錐形や、エキスポネンシャル形でも段つきの場合<sup>2)</sup>では、それらの等価回路は形の上では Fig. 7(a), (b) のように書けるが、直列アームと並列アームは逆回路関係にない。したがって、ホーンの自由共振周波において、直列アームが零となつても、並列アームが有限リアクタンスとなる。よつて、これらの形のホーンでは、負荷インピーダンスが大きくなると、共振周波を用いたのでは、これに十分に勢力が送れないことになる。

考察の範囲をその一つの共振周波の近傍のみに限ると、各アームを単一の共振回路のみで表わしてもよく、等価回路は Fig. 8(a), または Fig. 8(b) の如く書ける。そしてこの場合、直列アームの慣性素子と弾性素子はホーンの端面における等価集中質量および等価集中ステイフネスとして、定めることができる。

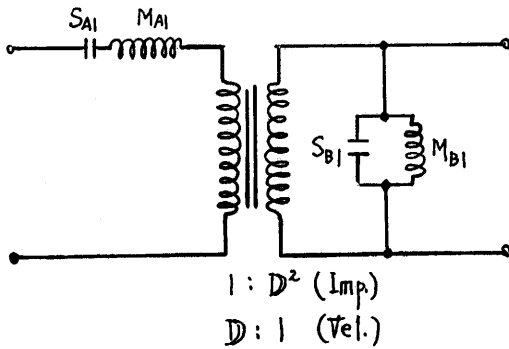


Fig. 8 (a)

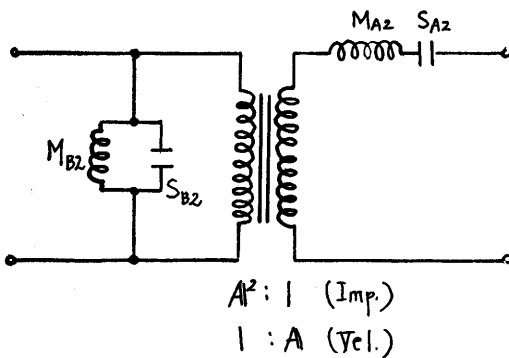


Fig. 8 (b)

一般に共振無負荷ホーンの入力端側に換算した等価集中質量は、速度分布が、 $V(x)=V(0)A(x)$  なる故、

$$m(0)=\rho S(0)\int_0^l F(x)A^2(x)dx \quad (25)$$

として与えられる。

$m(0)$  が定められると、これより、入力端側等価集中ステイフネスは

$$S(0)=\omega_n^2 m(0) \quad (26)$$

として求められる。したがって Fig. 8(a) の直列アーム素子は

$$M_{A1}=m(0), S_{A1}=S(0) \quad (27)$$

とすればよい。

エキスポネンシヤル形ホーンの場合は、第一共振  $\omega_1$  をとると、Fig. 8(a) の  $M_{A1}$  と  $S_{A1}$  は

$$M_{A1}=\frac{\rho S(0)l}{2\tau^2 \omega_1}, S_{A1}=\omega_1^2 M_{A1} \quad (28)$$

となる。

並列アームは、エキスポネンシヤル形の場合は、直列アームとは逆回路関係にあるので、その各リアクタンス素子は

$$\left. \begin{aligned} M_{B1} &= \frac{(\rho c)^2 S(0) \cdot S(l)}{S_{A1}} \\ S_{B1} &= \frac{(\rho c)^2 S(0) \cdot S(l)}{M_{A1}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

となる。Fig. 8(b) に対しても同様に  $M_{A2}$ ,  $S_{A2}$ ,  $M_{B2}$ ,  $S_{B2}$  を定めることができる。

## 5 固体ホーンの機械的映像パラメタ

固体ホーンにおいて、その伝送定数  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  が知れれば、それより直ちに電気回路理論における周知の関係式を用いて機械的映像パラメタを決定できる。

入力端側の映像インピーダンスを  $Z_I(0)$ , 出力端側の映像インピーダンスを  $Z_I(l)$  とすると

$$\left. \begin{aligned} Z_I(0) &= \pm \sqrt{\frac{BA}{CD}} \\ Z_I(l) &= \pm \sqrt{\frac{BD}{CA}} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

映像伝播定数  $\theta = \alpha + j\beta$  ( $\alpha$ : 減衰定数,  $\beta$ : 位相定数) は

$$\left. \begin{aligned} \sinh \theta &= \sqrt{\frac{BC}{AD}} \\ \cosh \theta &= \sqrt{\frac{AD}{BC}} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

で与えられる。

固体ホーンにおいて、その内部損失を無視すれば、映像インピーダンスは実数か純虚数のいずれかで、これが実数の領域では伝播定数は純虚数  $j\beta$  で、これは通過帯域となる。映像インピーダンスが純虚数の領域では  $\theta = \alpha + j\frac{n\pi}{2}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) で、これは減衰帯域となる。

### i) エキスポネンシヤル形

(19) 式で与えられる伝送定数を用い、 $kl$  を変数として、その映像インピーダンスを計算して示すと、Fig. 9 のごとくなる。〔図は  $S(0)/S(l)=100$  の場合を示す。〕

図で明らかなように、通過帯域における映像インピーダンス (実数) は、端面積の大きい側で  $\omega$  の増加に対し負傾斜、端面積の小さい側で正傾斜を持つ。また、ホーンの自由共振周波 ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ) は下から二番目以上の各通過帯域の中央部にそれぞれ一つずつ位置する。

なお、両端の面積の比が大きい程、各通過帯域の幅は小さく、減衰帯域の幅は大きくなるが、その様子を示すと Fig. 10 のごとくなる。

Fig. 11 は減衰定数と位相定数の変化を示す。

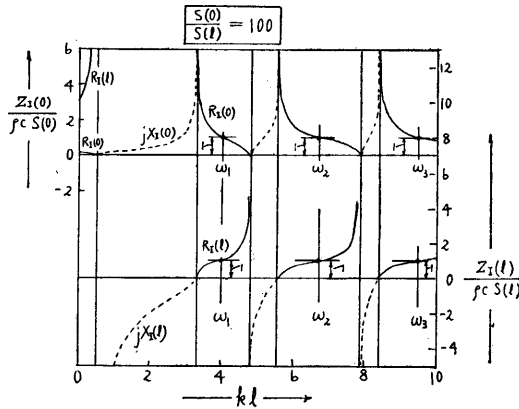


Fig. 9 Image impedance of exponential horn.

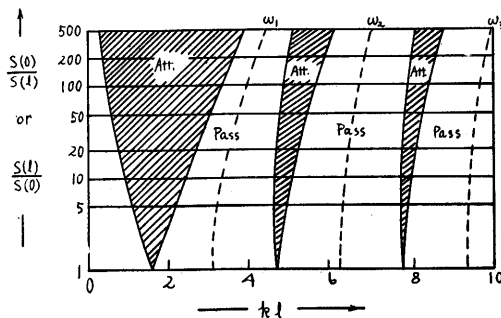
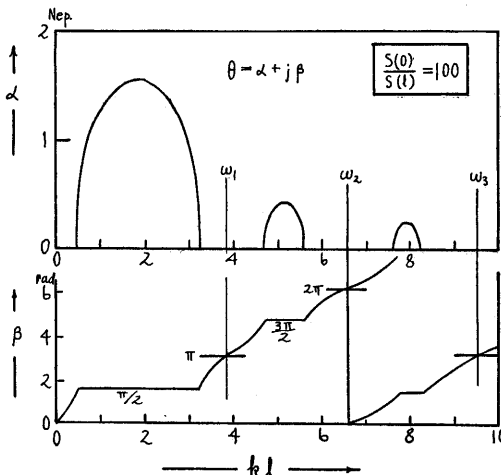


Fig. 10 Cut-off character of exponential horn.


 Fig. 11 Transfer constant  $\theta$  of exponential horn.

## ii) 錐形

(21) 式で与えられる伝送定数を用いて錐形固体ホーンの映像インピーダンスを求め、その  $kl$  による変化を示すと Fig. 12 のごとくなる。

錐形ホーンの場合には、前述したように、その等価

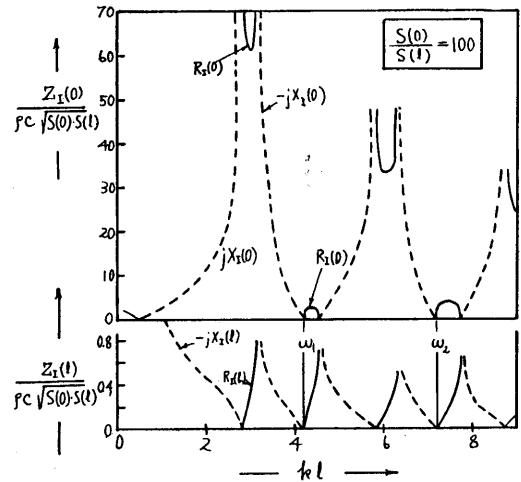


Fig. 12 Image impedance of conical horn.

四端子回路において、直列アームと並列アームが逆回路関係にないため、映像インピーダンスの変化は、エキスポネンシヤル形の場合に比較して、かなり複雑であり、また、その自由共振周波  $\omega_1, \omega_2, \dots$  等は通過帯域内に存在せず、第一共振  $\omega_1$  は第三通過帯域の下部遮断点、第二共振  $\omega_2$  は第五通過帯域の下部遮断点に位置する。

また、隣接共振周波の間には、二つの通過帯域と、二つの減衰帯域が存在する。

## 6 固体ホーンによるインピーダンス整合

振源の内部機械的インピーダンスを  $Z_0 = R_0 + jX_0$  とし、これに固体ホーンを取付けてインピーダンス  $Z_L = R_L + jX_L$  の負荷に最大の実効勢力を伝送する問題を考える。

### (A) エキスポネンシヤル形ホーン

#### i) $Z_0 = R_0, Z_L = R_L$ の場合

振源の内部インピーダンスと負荷インピーダンスが共に抵抗分のみの場合には

$$\frac{S(0)}{S(l)} = \frac{R_0}{R_L} \quad (32)$$

にとつたエキスポネンシヤル形ホーンを、その自由共振周波において使用するようによい。

#### ii) $Z_0 = R_0, Z_L = R_L + jX_L$ の場合

この場合は、固体ホーンの出力端と負荷との間に、負荷のリアクタンス分を打消すための伸介伝送帯を Fig. 13 のごとく挿入し、その上で整合をとることが必要である。

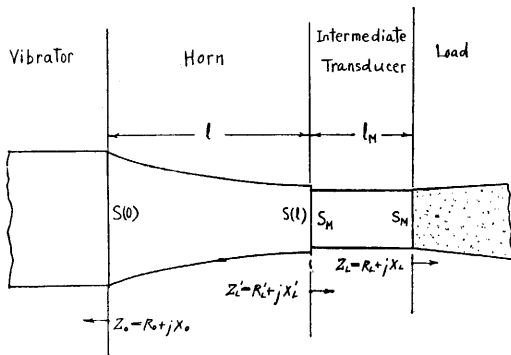


Fig. 13 Impedance matching between vibrator and load.

伸介伝送体として、均一断面体を使用することゝし、その断面積を  $S_M$ 、長さを  $l_M$ 、密度を  $\rho_M$ 、位相伝播速度を  $c_M$  とすると、その伝送定数は

$$R_L' = \frac{R_L}{\left( \cos k_M l_M - \left( \frac{X_L}{\rho_M c_M S_M} \right) \sin k_M l_M \right)^2 + \left( \frac{R_L}{\rho_M c_M S_M} \right)^2 \sin^2 k_M l_M} \quad (34)$$

となる。

よつて、かゝる伸介伝送体を用いた上で、それに

$$\frac{S(0)}{S(l)} = \frac{R_0}{R_L'} \quad (35)$$

で与えられる面積比のエキスポネンシヤル形ホーンを

$$\left| \frac{V_M(l_M)}{V_M(0)} \right| = \frac{1}{\sqrt{\left( \cos k_M l_M - \left( \frac{X_L}{\rho_M c_M S_M} \right) \sin k_M l_M \right)^2 + \left( \frac{R_L}{\rho_M c_M S_M} \right)^2 \sin^2 k_M l_M}} \quad (36)$$

で与えられる。

iii)  $Z_0 = R_0 + jX_0$ ,  $Z_L = R_L + jX_L$  の場合

この場合は、伸介伝送体により  $Z_L = R_L + jX_L$  を変換して  $Z_L' = R_L' + jX_L'$  とし、

$$\frac{X_L'}{R_L'} = -\frac{X_0}{R_0} \quad (37)$$

となるように  $l_M$ ,  $S_M$  を定め、その上で

$$\frac{S(0)}{S(l)} = \left| \frac{Z_0}{Z_L'} \right| = \frac{R_0}{R_L'} \quad (38)$$

で決定される面積比のエキスポネンシヤル形ホーンを用い、そして、その自由共振周波で使用するようにすればよい。

## (B) 錐形ホーン

錐形ホーンの場合には、 $X_0 = 0$ ,  $X_L = 0$  とすると、ホーンだけでは、 $R_L = 0$  のとき以外はインピーダンス整合ができない。

$$\left. \begin{aligned} A_M &= \cos k_M l_M \\ B_M &= j \rho_M c_M S_M \sin k_M l_M \\ C_M &= \frac{j}{\rho_M c_M S_M} \sin k_M l_M \\ D_M &= \cos k_M l_M \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

で与えられる。この伸介伝送体の一端に負荷インピーダンス  $Z_L = R_L + jX_L$  が取付けられたとき、他端から見たインピーダンスを  $Z_L' = R_L' + jX_L'$  とすると

$$Z_L' = \frac{Z_L A_M + B_M}{Z_L C_M + D_M} \quad (34)$$

となる。よつて (34) 式に (33) 式を入れ、 $X_L' = 0$  となるような  $l_M$  の長さの決定式を求めると、

$$k_M l_M = n\pi + \tan^{-1} \left\{ \frac{2 \left( \frac{X_L}{\rho_M c_M S_M} \right)}{\left( \frac{R_L}{\rho_M c_M S_M} \right)^2 + \left( \frac{X_L}{\rho_M c_M S_M} \right)^2 - 1} \right\} \quad (34)$$

となり、また、(34) 式で決定される  $l_M$  を用いた場合の  $Z_L' = R_L'$  を求めると

つけ、それをホーンの自由共振周波で使用するようにすればよい。

なお、この場合、伸介伝送体による速度変成が必然的に伴うが、その値は

$X_0 = 0$  のときは、伸介伝送体を用いて、負荷インピーダンスを変換し、伸介伝送体の入力側のリアクタンス  $jX_L'$  を Fig. 4(b) で示される等価四端子回路の出力側の直列アームに加えてその直列共振周波をづらせ入力側の並列アームの反共振周波と一致せしめるか、或は伸介伝送体の入力側サスセパタンスを Fig. 4(a) の形の等価四端子回路の出力側並列アームに加えてその反共振周波数をずらせ、入力側の直列アームの共振と一致せしめ、かつその一致させた周波で使用する必要がある。

## 7 結 言

以上、エキスポネンシヤル形と錐形の固体ホーンについて伝送定数を導き、それを基礎として等価四端子回路を導き、また、それらの影像パラメータを求め、それによって伝送特性に考察を加え、種々な重要事項を明らかにした。



また、かゝる固体ホーンを用いて、インピーダンス整合をを行う方法について論じた。

将来超音波は益々広く色々の分野で応用されるようになると思われるが、本論文が、それらの機器の設計上に役立つ事があれば幸である。

文 献

- 1) 杉：山梨大工研報 6号、7号
- 2) 杉：超音波専門委員会資料 昭34.11月