数学的な表現力の育成を目指した算数科の学習指導
－植木算の指導を通して－

On the Teaching Approach of Mathematics Aiming at the Development of Abilities for Mathematical Expressions: Through Teaching of the Problem of Planting Trees

山　口　国　之*　　一　瀬　孝　仁**
YAMAGUCHI Kuniyuki　ICHINOSE Takahito

要約：算数科の学習では，自分の考えが相手に伝わるように様々な表現方法を用い，互いに数学的コミュニケーションを図りながら，自分の考え方を深めていくことが大切である．そのためには，児童自らが表現方法を身に付け，活用できるよう指導にあたる必要がある．平成 26 年度全国学力・学習状況調査の結果からも，図を観察して数量の関係を理解したり，数量の関係を表現している図を解釈したりすることに課題があることが明らかになっている．

このような現状の課題を改善するために，現行学習指導要領の趣旨を踏まえ，本研究では「植木算」の問題を解決する過程で図をもとに立式の根拠を説明し，演算決定する活動を取り入れた．このような活動を通して，数量の関係を理解し，数学的な表現力を育成することを研究の目的とした．その結果，「植木算」の指導を通して，言葉や図や式といった表現方法を行き来させ，正しい答えを導いたり，間違えを見直したり数学的表現力を高めることができた．

キーワード：数学的な表現力　植木算　思考力・判断力・表現力

Ⅰ　はじめに

算数科の学習では，自分の考えを他者に伝えるために様々な表現方法を用い，互いに数学的コミュニケーションを図りながら，自分の考え方を深めていくことが大切である．そのためには，児童自らが表現方法を身に付け，活用できるよう指導にあたる必要がある．本研究は，「植木算」（問題文に出てくる数量と問題解決を行う際に使う数量が違う問題）の指導を通して，数学的な表現力の育成を目指す学習指導のあり方について考察していく．

Ⅱ　研究の目的

現行学習指導要領では，言語活動について，「思考力，判断力，表現力等をはぐくむため，また主体的に学習に取り組む態度を養うため，言語活動を充実することとしている．」と示されている．また「数学的な思考力・表現力」について合理的，論理的に考えを進めるとともに，互いの知的なコミュニケーションを図るために重要な役割を果たすとし，その育成のために，「言葉や数，式，図，表，グラフなどの相互の関係を理解し，それらを適切に用いて問題を解決したり，自分の考えをわかりやすく説明したり，互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすること．」が明記され，指導の充

* 附属小学校　** 教育実践創成専攻

実が求められている．

平成 26 年度全国学力・学習状況調査の結果からも，図を観察して数量の関係を理解したり，数量の関係を表現している図を解釈したりすることに課題があることが明らかになっている．

このような現状の課題を改善するために，現行学習指導要領の趣旨を踏まえ，本研究では「植木算」の問題を解決する過程で図をもとに立式の根拠を説明し，演算決定する活動を取り入れる．このような活動を通して，数量の関係を理解し，数学的な表現力を育成することを研究の目的とする．

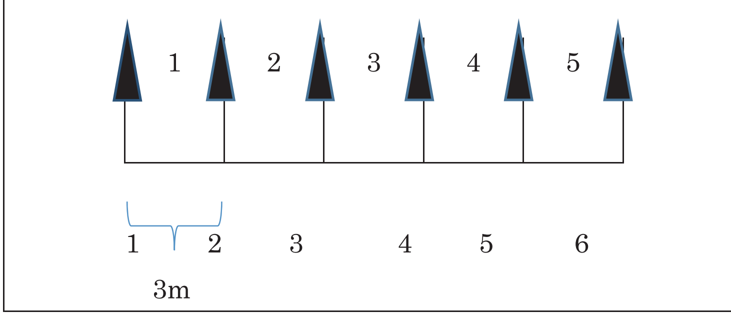
Ⅲ　研究の概要

第３学年の「植木算」の指導を通して，児童自らが解決のために用いた図をもとに立式の根拠を説明し，演算決定していく過程での数学的表現に着目していきながら，目的に迫るための授業展開を試みた．

課題は，「１階から３階まで 12 秒かかるエレベーターがあります．１階から６階まで何秒かかりますか.」である。この課題は求答に至るまでに２つの段階を踏まなければならない問題である．まず，１階から２階まで１回上がるのに何秒かかるかを求め，次に，６階までの上がる回数を求めることになる．この問題構造を理解していかなければ多くの児童がつまずく問題である．

問題場面を図で表し，立式の根拠を明確にしながら演算決定する過程における数学的な表現力の高まりを，授業後のプロトコル，児童のノート記述や学習感想，板書記録をもとに明らかにしていく．

一般に，「植木算」の問題は，ｎ個の点がm個の線分で結ばれたとき，ｎ＝m＋１という関係が成り立つ．点を木，線分を木と木の間の間隔と見なすと，問題場面によっては，木の数と間の数の関係を見出しながら解決しなければならない難関教材の一つである．例えば，「３m間隔で木が植えてあります．１本目から６本目までは何mでしょう.」という問題（図１）である．解決する際には木の数と木と木の間の数の関係に着目しなければならないところに難しさがある．



木の数＝6
間の数＝木の数－1＝6－1＝5

式：3×5＝25
答え：15m

図１

Ⅳ　実践の概要と考察

１【実際の授業の流れ】

（課題提示）

１時間目は，実際に学校で行われているエレベーターの工事の場面を想起させ，「１階から３階まで 12 秒かかるエレベーターがあります．１階から６階まで何秒かかりますか.」を課題として提示した．

（自力解決・比較検討）

自力解決後の児童の反応から，24 秒と答えた児童が 27 名いた．これは誤答である．また，この

27 名のうち問題文の数値をそのまま使って立式し，１階から３階までかかる時間が 12 秒なので６階まではその倍になるので 12 × 2 ＝ 24 と答える児童が最も多く 16 名であった．12+12 ＝ 24 と答える児童も２名いた．

このときのＣ13 の発言に着目したい．Ｃ13 は，「それなら１階から５階になるよ.」と発言をしていて，この発言からＣ13 は階数とその間の数の関係に気づき，この問題構造に着目していたととらえることができる．自力解決でもこの児童は正答を導き出していた．

正答である 12 ÷ 2 ＝ 6，６ × 5 ＝ 30 とした児童は２名で，１階から２階まで上がる時間を６秒と出して，６階まで５回上がるので６ × 5 ＝ 30 と正答を導き出している．

Ｔ14：じゃあとりあえず式を言ってください．
　　　Ｓ・Ｎさん
Ｃ８：12 × 2
Ｔ15：同じって人いますか？
Ｃ９：【何人か挙手】
Ｔ16：同じって人答え教えて．Ｋさん。
Ｃ10：24
Ｃ11：あ．合ってる．
Ｔ17：24 秒ってなった人どれくらいいますか．
Ｃ12：全員．全員．
Ｔ18：【板書：24 秒 23 人.】じゃあ他．
<u>Ｃ13：先生．それなら１階から５階になるよ．</u>
Ｔ19：まず式から見ていこうか．他の式の人．
　　　Ｏ・Ｙさん．
<u>Ｃ14：12 ÷ 3 ＝ 4　4 × 6 ＝ 24</u>

Ｃ14 の発言は，12 ÷ 3 ＝ 4 の４は１階から２階まで上がる秒数で，６階まで考えているので４×６をして 24 秒と考えた誤答になる．

12 ÷ 2 ＝ 6 の６は，Ｃ38 の「１階から３階まで上がるんだから，３回上がる訳じゃないから，１１階から３階まで上がるには２回上がることになるから，12 を２回でわると，１階から２階までいくのが６になるから，それで５回上がるから・・・」という発言は，階数と間の数に着目した見方を確認することができた（図２）．

Ｔ30：答え 30 秒になった人どれくらいいる．【板書 30 秒３人】
Ｃ31：はてなはてなはてな．
Ｃ32：ちがうの？
Ｔ31：24 秒って人がおおいですけど，
Ｃ33：あっほんとだ．
Ｔ32：30 秒って人もいるね．どっちなんだろう．24 秒か 30 秒どっち．
Ｃ34：30 秒．
Ｃ35：たしかめ算とかあるんじゃないの．
Ｔ33：式見てみようか．Ｏさんの 24 秒の人はこの４秒っていうのは１階から２階までかかる時間だったんだよね．Ｒさんの式のこの６っていうのは，【６を◯で囲み】どういう意味ですか．６って何の数字．
Ｃ36：あっこれ 30 であってる．
Ｃ37：２階しかあがってないから．
<u>Ｃ38：１階から３階まで上がるんだから，３回上がる訳じゃないから，１階から３階まで上がるには２回上がることになるから，12 を２回でわると，１階から２階までいくのが６になるから，それで５回上がるから・・・</u>

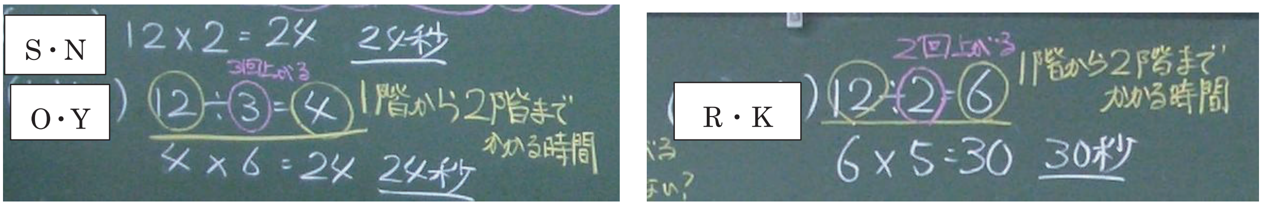


図２

そして，C63がテープ図を使えばいくつ上がるかわかると発言し，１階から３階まではいくつ上がるかを全体で図を使って考えていった．

T51：【板書：１階から３階までいくつ上がるのだろう】１階から３階まで一体いくつ上がるんだろうね．絶対３回上がるぞ，絶対２回上がるぞ，っていうのはどんな方法で考えればわかるかな．
C63：あーわかった．テープ図．
C64：テープ図使うの？
C65：でもテープ図使ったら横になっちゃうよ．
T52：エレベーターだからテープ図・・・
C66：だから縦のテープ図．
C67：エレベーター図．エレベーター図．
T53：エレベーター図．じゃあ，図（エレベーター図）
【板書：階から３階までいくつ上がるか図をつかってかんがえよう】

問題場面を図で表した後，÷２をするということは２回上がるということ，÷３をするということは３回上がるということを児童が話し合いから明らかにしていった．

まず，Ｓ・Ｎが図を用いて（図３）正答である２回上がることを説明した．

C81：Ｓ・Ｎ【板書：図を書く】えっと．１階にまずいる状態だから，まだ上がってなくて，上がった回数は０回で，２階に上がるときにやっと１回上がったから，２階についたときに１回上がって，でまた同じようにやって，３階で２回上がる．
C82：答えを求める図じゃないの．
T62：今の説明わかった．Ｏ・Ｙさん．
C83：先生答えを求める図ですか．
T63：まず，とりあえず１階から３階まで上がる図．何回上がる．
C84：２回．

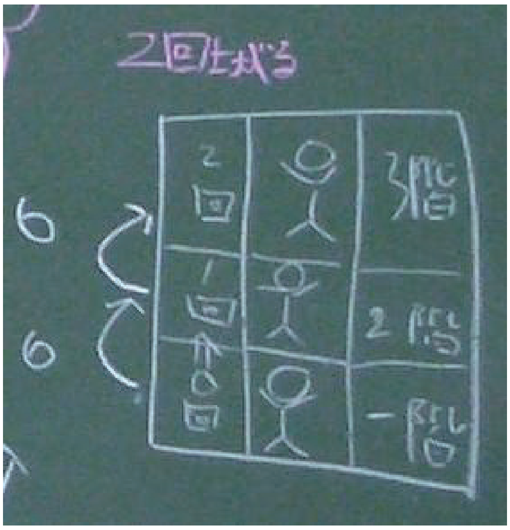


図３

次に，C90（T・I）がO・Yの式12÷3＝4の間違いを示すため，3回上がる図をかくと（図4），1回まだ上がっていないのに4秒時間が経過していることを説明しはじめた.

そして，もし1回上がるのに4秒かかる場合，S・Nの書いた正しい図で考えると，2回上がると3階まで8秒かかり，問題文の12秒と合わないとして，12÷3＝4の間違えを誤った図と正しい図を比べていった.

C90：（T・I）【板書：図を書く】えっとね1回，1回まだ上がってないのに，もう4秒たっちゃったってことになってる.
C91：えなんで.
C92：もともとまちがった図ってT・Iさん言ってる.
C93：まちがってる図.
C94：自分で言ってる.
C95：（誤った図で）4秒4秒4秒で足して12秒になってる．こっち（S・Nの正しい図で4秒一つ分なくなるから）なくなると4秒4秒で8秒になるから，こっち（問題文「1階から3階まで12秒」）がちがくなっちゃう．ということです.

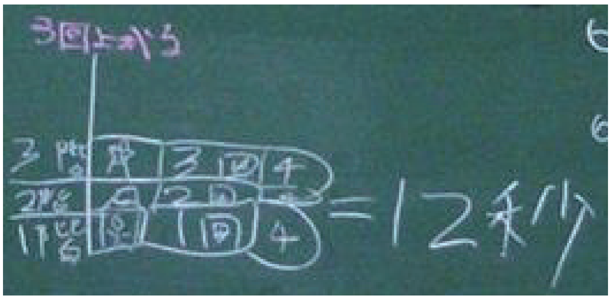


図4

（まとめ）

図で，1階から3階までは2回上がることを確認し，12÷2＝6で1回上がるのに6秒かかることを確認し．次に他の階の場合はどうなるか問うた．児童の「一個ずつずれていく.」という言葉から，上がる数（間の数）＝階数－1をおさえ，1階から6階までは5回上がるので，6×5＝30と立式し答えを出していった.

以下が本時の学習感想の一部である。

(学習感想)

（A・H）さいしょは24秒かと思ったけどR・Kの説明を聞いてなっとくした.（30秒の）
（A・S）何回上がるかわからなかったけど図を作ったから何回上がるかが式よりわかりました.
（M・I）上がった階数は1ひくことがわかった.
（M・H）はじめはS・Nと同じだったけど図やみんなの意見を聞いてなっとくできた.

2【本時の考察】

（1）問題場面を図で表すことのよさ

①2回上がること（12÷2）の解釈

やはり問題文に出ている数値をそのまま式に表し間違える児童が多かった．S・Nは自力解決では，問題の構造がつかめず，式で12×2＝24としていた．しかし，図をかくことによって（図5），1階から3階まで2回上がることに気づき，その後12÷2＝6と1回あがる時間を求め，6×5＝30（正答）を導き出していた．このS・Nの考えをきっかけに，1階から3階までは2回上がるということが確認できた．他にもA・H，R・N，K・Sは自力解決でS・N同様，問題文から1階から3

階までかかる時間が12秒なので6階まではその倍になると考え立式していた児童である．図で表すことで（図6），それをもとに，階数と上がる数の関係といった問題の構造を捉え，授業の終わりには正しい図をかき理解することができた．

T60：はいじゃあ．1階から3階までいくつ上がるか図で書いてもらったので，発表してもらいます．

T61：じゃあ前出て，図を書いてください．とりあえずS・Nさん．

C81：S・N【板書：図を書く】えっと．1階にまずいる状態だから，まだ上がってなくて，上がった回数は0回で，2階に上がるときにやっと1回上がったから，2階についたときに1回上がって，でまた同じようにやって，3階めに2回上がる．

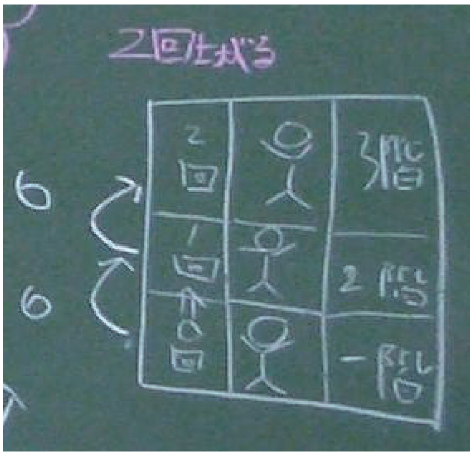


図5

【A・H】　　【R・N】　　【K・S】

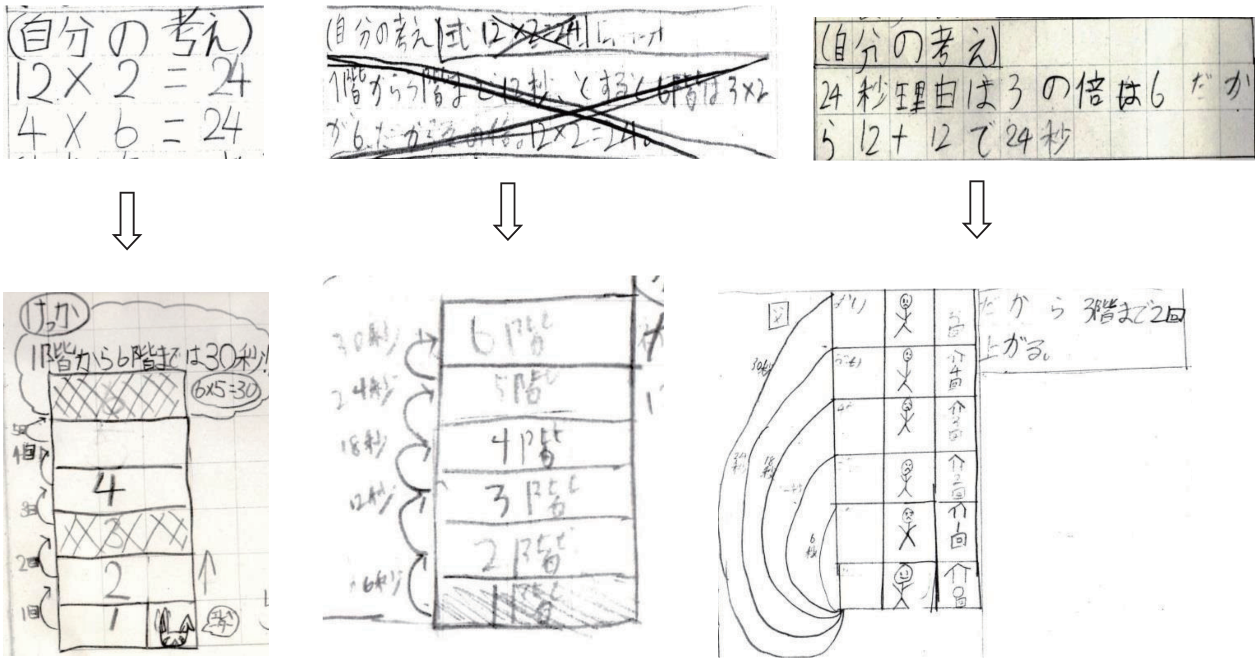


図6

②3回上がること（12÷3）の解釈

T・Iは自力解決の時点では，O・Yと同じ考え（12÷3＝4，4×6＝24）であったが，間違いであることに気づくと自分の誤りを修正するため，12÷3＝4，4×6＝24の式を図で表した（図7）．それをもとにS・Nの書いた正しい図と比べて秒数が4のとき，問題文と合わないことを説明することができた．

C95：（T・I）：４秒４秒４秒で足して 12 秒になってる．こっち（４秒一つ分）なくなると４秒４秒で８秒になるから，こっち（問題文「１階から３階まで 12 秒」）がちがくなっちゃう．ということです．
T70：Tさんの今書いた図は・・・
C96：まちがった図．
T71：まちがった図．何回上がるの．
C97：それは３回．
T72：３回上がる．もう一回どこがまちがったかこの図で説明できる．じゃあAさん．
C98：まだ１階で何も上がっていないのに，ここが１回になってる．

ここでの，T・Iの発言から３階まで上がるには２回上がることを全体でおさえ，さらに４階まで上がるには３回上がることになることを確認した後に（階数－１）が上がる回数という関係を見出していくことができた．

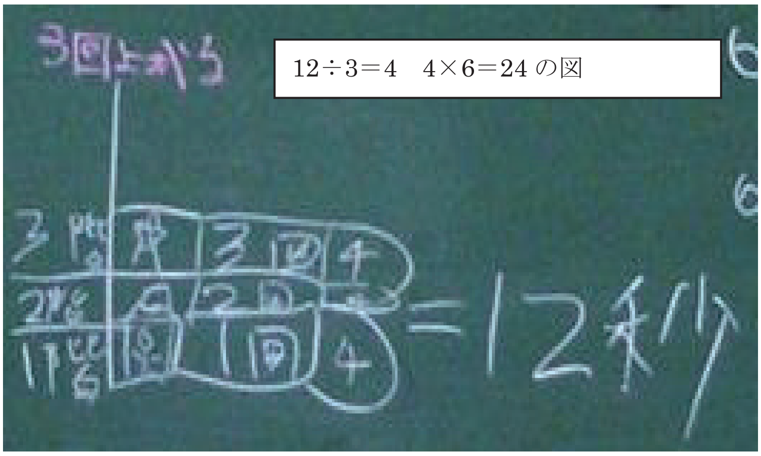


図７

図８

また，「C95（T・I）：４秒４秒４秒で足して 12 秒になってる.」というT・Iの発言は，（図７）から１階から２階まで１回上がるごとに４秒かかったとすると，３回上がって 12 秒ということを表現している．

次に「C95 こっち（４秒一つ分）なくなると４秒４秒で８秒になるから」と（図８）で４秒ずつ上がった場合，１階から３階まで２回上がっているので４×２＝８で３階まで８秒かかることに気づいている．

最後に「C95（T・I）こっち（問題文「１階から３階まで 12 秒」）がちがくなっちゃう。ということです.」と，問題文の 12 秒と合わなくなり 12 ÷ ３＝４は違う（誤答である）ことをT・Iは図を使って説明することができた．最終的に６階までは５回上がるので，１階分で６秒上がることから，６×５＝ 30 として正答を導いていった．

（２）多様な表現方法を関連づけるよさ

①起点を変えると上がる回数が違うことに気づいた児童の発言から（言葉から図へ）

ものの数と間の数の関係，つまり本時では階数と上がった数を解釈する場面での個々の表現の分析を行ってきた．「表現を関連づけて問題を解決する.」という視点に立てば，問題構造を理解している児童のつぶやきを取り上げて，図を説明することで構造が明確になる．

本時では１階から上がった場合を考えているが，地下から上がった場合を考え，問題を構造的にとらえている児童がいた．ここに着目をしてみたい．

T43：えっじゃあ今１階から３階まで，３回上がるの？２回上がるの？どっち．
C50：２回上がる．
C51：３回上がる．（多数）
C52：６回６回．
T44：６回？何回上がるの．
C53：５回．
C54：地下だったらO・Yさんあってるのにね．
C55：１階が地下だったらO・Yさんあってるのにね．

授業前半，O・Yの考え４×６＝24を聞いて，６回上がる場合は，「地下１階から上がる場合だとあっている」と発言している．つまり，このC54とC55は，１階から６階まで上がるのに５回分上がるという植木算の構造を理解しているととらえることができる．

また，授業後半では，起点となる階が違えば上がる回数が変わっていることに気づいている児童もいた．

T98：じゃあ今１階から６階だったけど，もし数が大きくなったらどうなるだろうね．同じ事が言えますか．階数－１が上がった回数って言える．
C120：言える．
C121：地下なら・・・
C122：２階から上がるなら，２回ひく．
C123：１階からだとしたら
T99：２階から上がるなら・・
C124：２ひく．
C125：地下１階からだったらそのまま．

この場面は，（階数－１＝上がった回数）といえるかどうかおさえている場面である．児童のやりとりから，階数－１＝上がった回数とは違う場合をC122とC125は発言し，２階から上がる場合は（階数－２＝上がった回数），地下１階から上がる場合は，（階数＝上がった回数）とこの問題の構造をとらえていると考えられる．

２階を起点として上がる場合，C122の「２階から上がるなら、２回ひく.」という発言を，図に表すことで（図９），２階から６階まで上がるときは，階数－２なので６－２＝４で４回上がり，６秒×４回＝24秒かかることがわかる．

また，地下１階を起点として上がる場合，C125の「地下１階からだったらそのまま.」という発言を，図に表すことで（図10），地下１階から６階まで上がるときは，階数がそのまま上がる数になるので，６秒×６回＝36秒かかることがわかる．

児童のつぶやきを図に表すことで，どうして２階から上がる場合は２回ひくのか，地下１階からの場合はそのままでいいのか，より詳しく問題構造を解釈することができる．

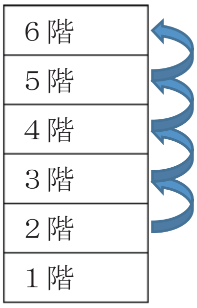


図9

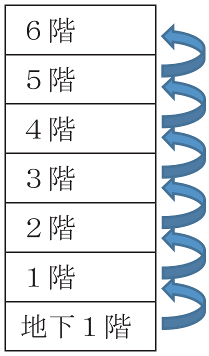


図10

②誤答に対してつぶやいた児童の考えから（言葉から図へ）

本時は，まず式を出させてから，図を考えていくという流れであった．実際に式で考える児童が多かった．しかし，12 ÷ 3 = 4 として 24 秒としている児童に対してＣ13 がその式は間違えであると気づく場面があった．

Ｔ14：じゃあとりあえず式を言ってください．Ｓさん
Ｃ８：12 × 2
Ｔ15：同じって人いますか？
Ｃ９：【何人か挙手】
Ｔ16：同じって人答え教えて．Ｋさん．
Ｃ10：24
Ｃ11：あ．合ってる．
Ｔ17：24 秒ってなった人どれくらいいますか．
Ｃ12：全員．全員．
Ｔ18：【板書：24 秒 23 人．】じゃあ他．
Ｃ13：先生．それなら１階から５階になるよ．

Ｃ13 の「先生．それなら１階から５階になるよ．」という発言を取り上げ，どのような図を考えたか表現を行き来させることで数学的な思考力を高められた．（図 11）

【C13 の考え】（言葉）　　　　　　　　→（図で表すと）

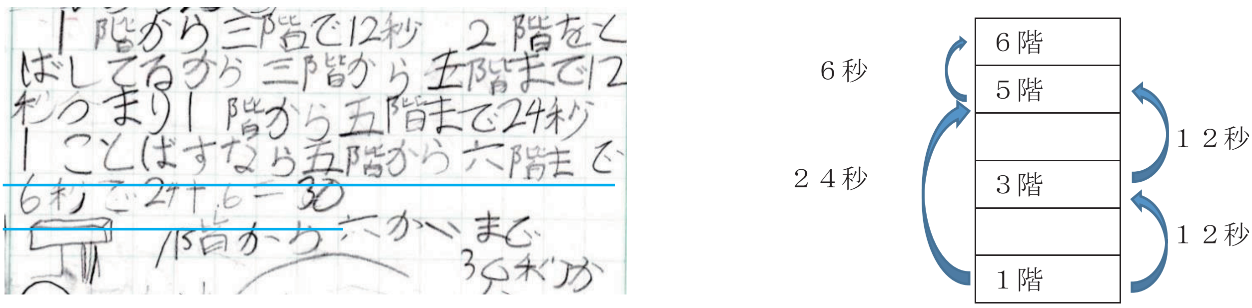
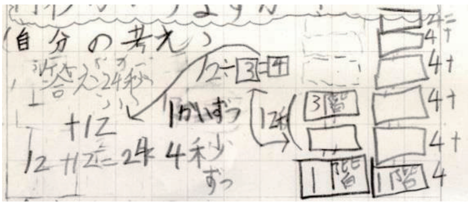


図 11

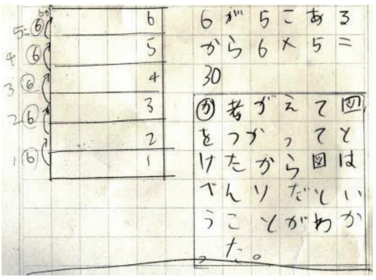
③自分の考えを表現し伝え合うことで図をもとに立式できた児童の姿から

自力解決において，最初から図をかいた児童は３人であった．その３人は全て図から答えを導き出し，答えを 24 秒としていた．どの図も，本時の植木算の構造を捉えるのに大切な間の数を考えないで図をかいていたため，１階から３階まで 12 秒かかり，１回上がるのに４秒かかるので１階から６階までは 24 秒としていた．しかし，授業の中で，式から図で表現したり，図から式の数の意味を考えたりと，他の児童の考えを聞いていくうちに，正しい図をかけるようになった．(図 12)

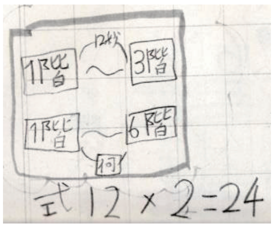
【R・K の図】



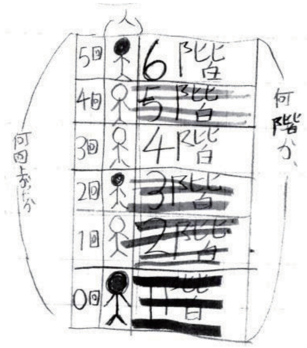
⇩



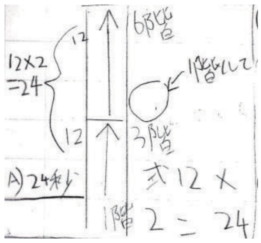
【A・S の図】



⇩



【H・N の図】



⇩

図 12

最終板書

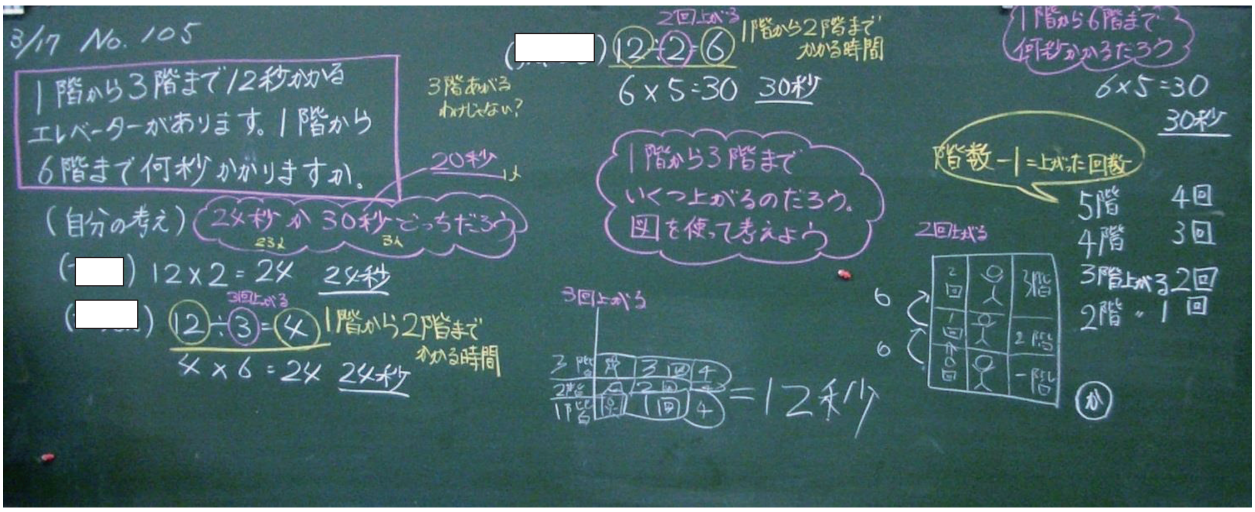


図 13

Ⅴ　研究の成果と課題

第３学年の「植木算」の指導を通して，児童自らが図をもとに演算決定し，立式の根拠を説明できるような姿を期待して授業実践を試みた．それぞれの場面で児童は図を使って問題を解くよさを感じとれた．

図で考える児童は３名いたもののうまく問題にあった図を書くことができず，誤答であった．学習を進めていくうちに，問題文に出てくる数値をそのまま使うのではなく，図を根拠に数の意味を考え，式を立てる児童が多くなった．ある特定の児童に注目しても，時間を重ねるごとに正しい図をかき正答を導くことができ，式が違ったとしても，図を根拠に式の数の意味を問い，図と式を関連付けて正しく立式することができた．

児童によって図のかき方は違うが，友だちのかいた図から共通点や相違点を見つけることで問題にあった図はどれか考えることができ，自分の考え方を深められた．学習感想からも，友だちの考えでわかるようになったといった記述も見られ，児童が１時間の授業の中で表現方法を身に付け，その時間に友だちの考えを使ったり，次の時間に使ったりできたことがわかる．この時間で終わりではなく，今後も身につけた表現方法を使い問題を解決する姿を期待したい．

植木算（問題文に出てくる数量と問題解決するのに使う数量が違う問題）の指導を通して数学的な表現力が育成できた．

課題としては，指導計画での見直しがあげられる．今回は，1時間扱いで行った．「植木算」の構造を考え，ものの数と間の数が等しい場合，違う場合を取り上げ，数学的表現を高めていけるような指導も考えていきたい．その際，指導計画を立てるにあたり，どのように展開すると数学的な思考力が高められるか検討する．そして，前の学年や次の学年にむけての学習内容（逆思考の問題や割合など）も視野に入れ，線分図や数直線といった表現にもつながるよう系統的に考えていく必要がある．

また，まだ正しく図を書くことのできない児童もいたり，正しく図を書いたにもかかわらず，正しく式を立てられなかったりする児童もいる．この指導に限ったことではないが,きめ細かに見とり，支援していく必要がある．日々の授業の中でも言葉や図や式といった表現方法を行き来させ，図から立式したり，式が正しいか図を書いて確かめたりする活動を多く取り入れて指導にあたりたい．

〔引用・参考文献〕

１）東京学芸大学附属世田谷小学校,東洋館出版（1987)pp. 75-96『今,なぜ「一斉学習」なのか』「このエレベーター，何秒かかるの？－問題の考え方（植木算)－」，中村享史
２）中村享史（1993)，「自ら問う力を育てる算数授業」pp. 30-31
３）中原忠男編集（2003)，「算数・数学科重要用語 300 の基礎知識」，明治図書，p. 167
４）「新編新しい算数３下」東京書籍，平成 27 年度