

初等的数学問題に対する大学授業でのオープンアプローチについて

On open approaches to elementary mathematical problems in a university class

中 村 宗 敬*

NAKAMURA Munetaka

要約：小学校教科科目「算数科内容論」において実施した、オープンアプローチ的方法による学習の状況について報告する。用いた教材はまったくの初等的な九九表であり、受講学生は積極的に取り組み多くの性質を発見することができた。その反面、それらの発見が不完全な帰納法にとどまり、単に発見するのみで証明・説明する数学的根拠づけが弱いという課題も見られた。また、その根拠づけがなされている場合も多くは記号代数的な処理のものがほとんどで、もう一つの有効な手段である図形を用いた理由付けはほとんどなされていない状況であり、解答場面でのオープンアプローチという教員側で意図した狙いには達していなかった。

キーワード：オープンアプローチ, 発見学習, 九九表, 対称性

1 はじめに

本論では、筆者がその一部を担当している小学校教科科目「算数科内容論」における授業実践の一部を報告する。この算数科内容論は各年度前・後期2回に開講され、単位が必要な学生はどちらかをとることになる。教員養成系の学校教育課程所属の学生はほとんどが受講している。平成27年度の例でいうと、受講者数は前期85名、後期62名であり、本論に述べる平成27年度前期の授業の受講生は数学を非専門とする学生ばかりで、ほとんどの者は個別試験では数学を受験科目としていない。教員側でいうと、筆者を含めた5人の数学専門の教員が、3回ずつオムニバス形式で担当している。数学教育的な重要事項はもちろん取り入れつつ、高校数学からの発展という意味をこめた数学の内容も重視している。

筆者が担当したのは、初回から第3回までの冒頭部分である。一年次の受講生が多いため、高校数学からの延長とはいっても、その数学観を一新したいという思いがある。まず、受験数学から離れた数学の楽しさを感じさせつつ、そして小学校教員に必要な素養・視野を身につけさせることを念頭に、[1]で展開されたような、(オープンエンドアプローチを含む)オープンアプローチを方法論として取り入れることを考え、これをもとに教材選びに取り組んだ。教員養成系大学での小学校教員用科目授業へオープンアプローチを取り入れた実践研究としては、図形の決定条件を扱った[2]があるが、内容としてはより発展的な数学的要素を含むものを探すことにした。そこで、確率統計に関係する者が5名の教員のうち筆者のみだったので、平成24年度からの高校の学習内容に合わせて、現実の場面における結論・判断を考えさせる内容を取り入れた統計に関連する教材をまずは候補として考えた。結局これは断念したのであるが、その理由は、2年以上の学生も受講することが予想され差が生じるおそれがあること、データ処理のパソコンが手軽には使えない教室であることが主なものである。最終判断として教材として選んだのは、次の二つである。

* 科学文化教育講座

- ① 九九表の新しい発見
- ② 凸多面体の内角和と、面数、辺数、頂点数の関係

本論では、①についての経過を報告する。九九表を用いた発見学習は [1] の中でも授業実践例が記載されていて ([3]), 最近では [4] の中にも正答が多様な例として記述がある。これを教材として選んだ理由は、小学校以降の中高の数学への発展的要素を多く含むとともに、さらに高校数学から教員養成大学へのそれも望める教材であると判断したからである。もともとオープンアプローチ的学習は発見学習と重なる部分が多いが、自分で何かを発見する楽しさ、喜びを感じさせ数学観をあらためる、もう少し率直に言うと、数学を好きになってもらうという意図もある。

2 九九表に関する授業実践

2.1 提供問題

まず、授業の時期と対象学生であるが、次の通りである。

- ・実施日：2015年4月13日(月)

- ・対象：小学校教科科目「算数科内容論」出席者75人(学部1～4年74名, 大学院生1名)

「算数科内容論」全体15回のうちの初回の授業であり、提供した問題は次のようなごく素朴なものである。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

問題 上の九九表を見て、きまりを発見しよう。

この問題は、乗法(九九)を個々に一通り確認した後の総まとめとして小学校の教科書にも多く載っている事例である。したがって、学生も記憶に残っていることはあまりないだろうが、何らかの学習経験はしているはずである。解答に際して注意したのは、小学生が見出すような発見をあげるのではなく、それを含んでもよいが高校までの算数・数学の学習を経た現在の自身の目による「きまり」を発見してほしいということである。したがって、[3]のような高校で扱う単元「数列」の知識、あるいは「整数の性質」と関連させることも念頭に置いている。前節でも述べたが、教員養成課程の一授業を誤解して意識するあまり、子どもの考えと同一レベルに視線を移すことが重要であるという考えに固執するのは、かえって教員養成の趣旨に反することになる。子どもの考えを包含しうる豊かな数学的力を背景に持っている必要がある。このことも学生に伝えた。加えて、発見した「きまり」の理由付けも種々の方法により考える、すなわち、解法もオープンにして考えるように指示した。

学生には九九表を片側に3つ印刷したワークシートを配り、九九表を参照しながら独自の「発見」

を促し、解答を書かせた。解答時間は60分程度で、相互の刺激をたかめるために、自分の「きまり」を他の人と比べ合い、話し合いをしながらでも可とした。

[6]([5]も参照)によれば、発見学習のレベルとして次の5つの段階が想定される。訳語は[5]に従っている。

- 第1段階 援助なしの発見 (impromptu discovery)
- 第2段階 自由な探究による発見 (free exploratory discovery)
- 第3段階 導かれた発見 (guided discovery)
- 第4段階 直接的な発見 (directed discovery)
- 第5段階 プログラム学習 (programmed learning)

もちろん、上のものほど学習中の発見的要素の強度が高い。第1段階の「援助なしの発見」では荷が重いと考え、表を「縦に見たり、横に見たりしてはどうか」と言ったり、段どうしの関係性を示唆したので、この授業は第2段階と第3段階の中間程度の強度であったと判断している。

2.2 実際の解答

以下に実際に学生から得られた解答を記す。その前に、ことばの定義をしておいた方がよいだろう。「段」とは九九表の横の行であり(これは一般的にも周知であろう)、縦の並びは特に決まった用語がないようだが、便宜上「縦の段」と呼ぶことにする。また、「かけられる数」とは九九表の縦軸の数、「かける数」とは九九表の横軸の数である。したがって、例えば 4×3 においては、4がかけられる数、3がかける数である。また、九九表の左上から右下にわたる対角線を「第1対角線」、あるいは簡単に「対角線」と呼び、一方、左下から右上にわたる対角線を「第2対角線」と呼ぶことにする。かけられる数 a と、かける b の交叉する位置に $a \times b$ が書かれていることもあらためて注意しておく。

1. 5の段と縦の5の列を除いて分割してできる4つの正方形を見ると、それぞれの正方形内の数の和は、100, 300, 300, 900となる。
2. (表のどこでも) 2×2 の大きさの正方形をつくと、「左上の数と右下の数の積」は「右上と左下の数の積」に等しい。
3. (表のどこでも)5つの数からなる十字形を作ると、真ん中の数の4倍は他の4数の和になっている。
4. 同じ十字形で、「左の数と上の数の差」は「下の数と右の数の差」に等しい。
5. かけられる数 \times かける数 $-$ (かけられる数 $+$ かける数)は、同じ段において左から見ていくと、「かけられる数 -1 」ずつ増えていく。
6. 四隅の1, 9, 9, 81をたすと100になる。25を真ん中にしたまま小さくした正方形の四隅の和も同様に100である。
7. 左上から正方形群をつくり、その中の数の和を見ると、 $1^2, (1+2)^2, (1+2+3)^2, (1+2+3+4)^2, \dots$ となる。

8. 対角線（あるいは真ん中の 5×5 ）に関して対称な位置にある数は等しい。
9. 同じ段の、5 に関して対称の位置にある数どうしをたすと、段の数の 10 倍になる。縦に関して同様のことが成り立つ。
10. 外側から L 字型に見ていくと、折れ目に関して対称な位置に、差が 10 の倍数の対ができる。
11. 第 2 対角線に関して、対称の位置にある数どうしの差は 10 の倍数であり、かつ、対角線から離れるほど、10, 20, …と大きくなっていく。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図 1

12. 対角線に平行に左上から右下に斜めに見ていくと、隣り合う数の差が 2 ずつ大きくなる。
13. 対角線に垂直に右上から左下に斜めに見ていくと、隣り合う数の差が 2 ずつ小さくなる。

10, 11 については、少しわかりにくいのでここで説明を加えておく。両者はほとんど同じであるが、後者はさらに 10 の倍数と縦の段の数との関係に言及している。以下では、この「第 2 対角線に関して対称な位置にある数は 1 の位が等しい」という性質を、便宜的に「準可換性」と呼ぶことにする。上の図 1 を参照されたい。左の 4 と 54、右の 9 と 49、これらは確かに 1 の位が等しくその例となっている。11 の後半が述べているのは、

$$54 - 4 = 6 \times 9 - 1 \times 4 = (9 - 4) \times 10 \quad (\text{左}), \quad 49 - 9 = 7 \times 7 - 3 \times 3 = (7 - 4) \times 10 \quad (\text{右})$$

のように 2 数の差が、縦の段数の差の 10 倍になっていることを言っている。

人数が多かったせいもあってか、[3], [4] に見られる答えの多くが出ている感がある。初等的ですぐ目につくような発見も多いが、6 のような少々複雑で高校で（オプションとして）習う自然数の立方和公式に通じるようなものや、10, 11 のように、言われて見ればすぐにわかるが、自分ではなかなか気づかないようなものもあげられていた。この点に関しては、受講学生を高く評価している。

反面、自身の発見について理由づけの書かれていない解答が目についた。これらの学生は、九九表の個別事例を観察する段階にとどまり、証明の必要性を感じなかった、あるいは、それらを一般化して言及するにしても、証明に類する過程抜き不完全帰納法の段階にとどまっていたと考えられる。

授業展開に関しては、これらの解答を一通り提示するのみで、相互の関係をあまり深めることなく、主に時間的制約から次に進めざるを得なかった。また、次節で扱う発展教材にも触れることができなかった。冒頭に述べたように筆者の担当分 3 回で 2 つの教材を扱ったのであるが、内容を少し詰

め込み過ぎて、かえって消化不良に終わった感がある。これについては、最終節に課題としてあらためて述べる。

1 から 9 の解答に対する個別の証明（というよりも、やはりもう少し軽い「理由づけ」くらいのことばが適当だろうか）については省略するが、10, 11 は次節で詳しく見ることにする。

3 対称性に関する考察

前節の解答中 8 ~ 11 は九九表における大域的な対称性に関する性質を述べているが、実は相互に深く関係している。本節ではこれについて考察を加えておく。時間的制約のため、実際の授業では扱えなかったが、本来発展的教材として用意していたものであり、第 1 節で述べた「高校数学から教員養成大学のそれへ」の具体的内容である。

3.1 準可換性の証明

【代数的証明】

一見不思議に思われる 10, 11 の準可換性であるが、かけられる数とかける数とをつぶさに見ていくと、対象ペアになっているとき、図 1 の例でいうと 1×4 と 6×9 、（かけられる数とかける数が一致し少しわかりにくい） 3×3 と 7×7 のように、一方の数が位置する縦段の数を a 、他方の数が位置する縦の段数を b ($a < b$ としておく) とすると、前者の数は $(10 - b) \times a$ 、後者の数は $(10 - a) \times b$ と書けることがわかる。この場合、後者の数の方が大きくなるので、ペア数どうしの差は

$$(10 - a) \times b - (10 - b) \times a = 10b - a \times b - 10a + b \times a = 10(b - a)$$

と表すことができ、11 の主張が裏付けられる。このように記号代数処理は非常に機械的に処理でき明解である（脇道にそれるが、この明解さが中学初年次における文字式の導入の動機づけとなる。また、したがって、ここで示したような証明問題は、中学校におけるかっこうの教材になりうるだろう）。実際、11 を発見した学生は、このような演繹的証明ができなくて、筆者は質問を受け応答したのだが、上のような式を示すと、「すっきりした」という感想を言ってくれた。

【図形的証明】

しかし、一方で図形を用いた次のような素朴な証明も可能であろう。それぞれの数が位置する同じ縦の段において、5 の段に関して対称な位置の数を見る。それらは（第 1 対角線に関して対称に位置し、前節 8 に見たように等しい数になる。したがって、9 を念頭におくと、元々の 2 数はともに「縦の段数 $\times 10 -$ 共通数」と表され、差は縦の「段数の差 $\times 10$ 」として表される（図 2 参照）。

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

図 2

上の記号代数の数式処理を言い換えたに過ぎないが、第 2 対角線に関して対称であることの意味がより直接的に理解でき、かつ、（第 1 対角線に関して対称である数が等しいという積に関する可

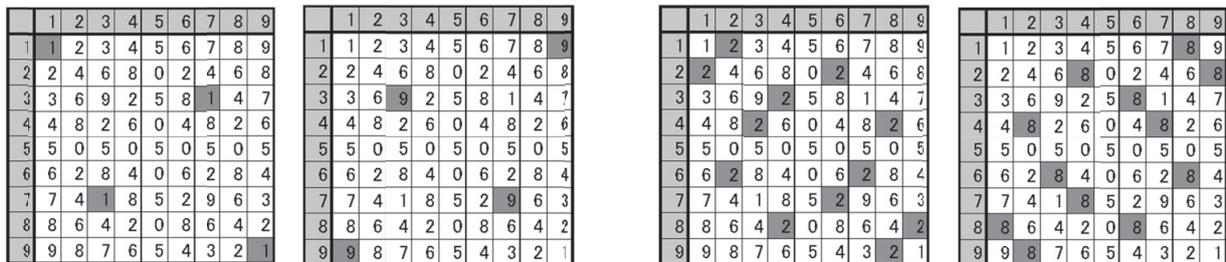
換性をあらためて意識できる（さらには、乗法の定義に戻って、なぜ可換性が成り立つのかを考え直す契機にもなり、そのヒントとして九九表を図形的に見ることは役立つだろう）。また、上の記号代数処理においては、第2対角線に対称な2数が $(10 - b) \times a$, $(10 - a) \times b$ と表現できることを結論するのは少々困難が伴う（前記の質問をした学生もそうであった）が、それが対称性を利用することにより自然に導かれる。さらには、次小節で述べるような大域的な対称性を発見することにもつながる。

これらの点に、中学時代以降優勢になってくる記号代数処理のみではない、図形的見方も取り入れる解答としてのオープンアプローチをとる利点がある。ここでは図形的に見ているが、場合によっては他の方法も有効だろう。特に、教員志向の学生には、多様なものの見方、考え方、解き方に自身が慣れておく必要があると筆者は常々考えている。そうでなければ、児童生徒から出てくる種々の答えに対応できないだろう。

3.2 九九表の対称性

前小節のような図形的見方を九九表全体にわたって進めると、表全体にわたる対称性を発見できる。まず、九九表を1の位の数、すなわち、10に関する剰余により書き換える。すると、可換性、準可換性から両対角線に関して対称な位置に等しい数がペアとして現れ、和が10になる数が5の段に関して対称な位置に現れる。一覧にすると、図3～図5のようになる。

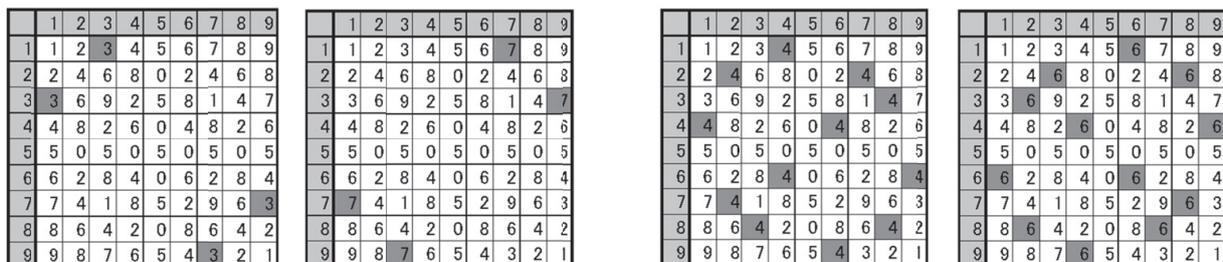
この段階にまで達すると、他の剰余系ではどのような結果が得られるかという新しい問題も生じられることも考えられる。9に関する剰余系で類似の構造を考えたものが、[7]のヴェーダ方阵の奇妙でかつ美しい図形であり、学習者の新たな興味をわかせる。このような種々の段階での多様性を試み経験することは、単により効率的な方法を見出すことができるというだけでなく、多くの考えに共通なより根源的なものを見出し、対象の構造理解を深くすることができ、より深層的な部分での意義がある。



【1,9の対称性】

【2,8の対称性】

図3



【3,7の対称性】

【4,6の対称性】

図4

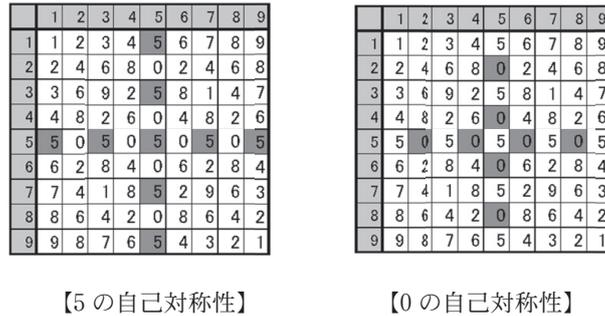


図 5

4 今後の課題

今まで見たように受講学生は九九表を観察することに積極的に取り組み、多くの性質を発見することができた。すでに述べたように、その反面、多くの学生の発見が証明・説明する数学的・演繹的根拠づけの過程を欠いており、また根拠づけができた者も記号代数的な処理のものがほとんどで、その代替手段である図形的アプローチは見られなかった。これらを克服できるような授業の展開を考えることが第一の課題である。

第二の課題としては、問題理解の深化に関してである。次の機会には、教材を九九表のみにして、時間的余裕を持つ必要がある。その上で3に述べた対称性も扱うことがあげられる。終始オープンアプローチ的立場では難しいと予想される(第3節での展開は通常の講義調によって行うと当初計画していた)が、学生の自主的な反応を促すような授業展開を計画する必要がある。学生の発想・反応は予想外に柔軟だったので、2.1で述べた発見の強度も再検討してみてもよいかもしれない。

加えて学生側の反応を詳細に知る必要がある。授業の解答に感想も書くようにと指示をしたのだが、多くはまったくそれに相当するものが書かれていない状況であり、断片的な反応しか知ることができなかった。解答とは別の時間に授業そのものに対するくわしいアンケートを考える必要がある。これが第三にあげられる課題である。

数々の課題が残った授業であるが、九九という一見初等的にすぎる教材で反応がよくないのではないかと疑いに反し、多くの興味深い解答を書いて刺激を与えてくれた学生たちに感謝したい。

参考文献

- [1] 島田茂(編著), 訂『算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案』, 東洋館出版社, 1995.
- [2] 市原一裕, 大室敦志, オープンアプローチによる大学授業の構築についての一考察—小学校教科「算数」における授業実践—, 奈良教育大学教育実践総合センター研究紀要, pp. 189-193, 2010.
- [3] 吉川行雄, 「九九表の性質」, 島田茂編著 新訂『算数・数学科のオープンエンドアプローチ 授業改善への新しい提案』, 東洋館出版社, pp. 159-172, 1995.
- [4] 青山庸, オープンアプローチによる学習指導と評価に関する実践的研究—小学校算数を中心に—, 仁愛大学研究紀要, 人間生活学部篇 3, pp. 23-39, 2011年.
- [5] 古藤怜, 『数学科における学習指導』, 共立出版, 1982.
- [6] E.E. Biggs, M.L. Hartung, What's the role of experiences in the learning of the mathematics?, The Arithmetic Teacher, 18, pp. 278-295, 1971.
- [7] R. D. Nelson, G.G. Joseph, J. Williams, Multicultural Mathematics, Oxford Univ. Press, 1993./ (訳) 根上生也, 池田敏和, 『数学マルチカルチャー—多文化的数学教育のすすめ』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.

