確率学習における素朴な見積りの実態について

On students' simple estimates observed in the learning of probability

中　村　宗　敬[*]
NAKAMURA Munetaka

要約：山梨大学における全学共通科目「確率的見方」において観察された学生の確率理解の様子、特に「クラスの中に同じ誕生日の人はいるか」というよく知られた問題（「誕生日問題」と呼ぶことにする）をどのように把握し、その理解がどのように変容したのかを，2013 年度の授業実践に基づいて報告する。上記の問題に対する学生の素朴な確率的な見積においては、クラスの人数が 70 人規模でも同じ誕生日の人は現れないだろう、あるいは現れたところでせいぜい 1 組くらいだろうという意見が大半であった。しかし、実際に授業出席者の誕生日を調べた結果は、それとは全くかけ離れたものであった。これはデータの誤適用によるものと考えられるが、それを修正して新たな見方ができるようになった学生が多数見られた。

キーワード：確率，誕生日問題，ヒューリスティック

Ⅰ　はじめに

1　「確率的見方」の概要

まず，授業の方法論にも関わるので，本論で扱っている筆者が担当の「確率的見方」について若干説明しておく。この授業科目は全学共通科目の一つであり，受講学生の学部内訳は

2012 年度：教育人間科学部 27 名 / 5 名，工学部 34 名，
　　　　　医学部 5 名，生命環境学部 2 名，　　計 68 名
2013 年度：教育人間科学部 19 名，工学部 31 名，
　　　　　医学部 15 名，生命環境学部 6 名，　　計 71 名
2013 年度：教育人間科学部 36 名 /10 名，工学部 36 名，
　　　　　医学部 46 名，生命環境学部 7 名，　　計 125 名

である（2014 年度は 10 月 10 日現在の人数であるが，この後変動する可能性がある）。確率に対する熟練度という意味で，付け加えておくと，ほぼ全員がセンター試験の数学Ａに含まれる確率に対する受験勉強をしている。さらに，正確な人数はわからないが，受講者のうちの半数以上が山梨大学の個別試験で数学を受験科目としているはずである。一方で，これに該当しない学生は数学からセンター試験以来、数学的な確率学習から遠ざかっていると思われる。

このように多様な専門の学生を受け入れる全学共通科目の性格からして，専門的な確率論の知識を与えようというものではないことはもちろんである。それでは，どのあたりに目標を置いているかというと，大学入学以前の確率に関する認識から脱皮して，数学的手法・計算に多くを依存しないという意味で素朴ではあっても，より高次の確率的直観を持ってもらうことである。その目標のために，いささか奇をてらう面もあるが，確率に関して一見逆説的に思われる結果が伴う（素朴な

[*] 教育人間科学域　人間科学系

意味の）実験を実際に行って，それを通じて確率理解を促そうと試みている。この高すぎる目標達成は無理にしても，いかに我々は正誤に満ちた確率判断をしているかをあらためて認識する契機としてもらえればよいと考えている。

「奇をてらう」と書いたのであるが，この常識に反する結果が得られるということは，確率が内在的に抱えている性質なのかもしれない（その内容については，主に以前論述している）。Tversky A., Kahneman D. (1982) によれば，これは素朴な発見法的思考，ヒューリスティックの誤適用の結果と見なすことができる。このような話題をいくつか用意し，それに沿って授業を行った。最終的な自分が興味を持った一つの話題に関するレポートを課した。

2　誕生日問題とは

今日「誕生日問題」と呼ばれているもののそもそもの起源は，頻度的確率論におけるコレクティフ概念の導入者として有名な von Mises (1883-1953) らしい。そもそもは，60 人の集団の中に 3 人の同じ誕生日の人が見つかったとのことで，これを滅多に起こらない事ではないかと驚いた人が，この確率はどれくらいかと尋ねたことが発端のようである (森口 (2011))。

時は移って，現在は「ある人数の集団中に同じ誕生日の人が現れる確率はどれくらいか。」とか，特に，「その確率が 1/2 を超えるには少なくとも何人が必要か」という面に主眼点が移っている。高等学校の教科書等で，この問題に言及される時もこの形である。発端の珍事のように 3 人同じというのはなかなか起こらないだろうが，多くの人が思ったよりも少ない人数で一致ペアは現れる。
しかも，それが実際に簡単に確認できるということで興味が惹かれるのであろう。例えば，40 人のクラスで同じ誕生日の人がいる確率は 0.9 を超える。

誕生日問題も Tversky A., Kahneman D. (1982) の掲げる数多くのヒューリスティック誤適用のうちの一つのであり，実験が行い易いこと，結果が非常に印象に残ること，ごく簡単な数学的知識で認識があらためられること等の理由で，毎年最初の話題として取り上げている。学生がこれをどのように受け止め，授業の成果としてより高次の新たな認識に至るかについてあらためて考えてみたい，というのが筆者の本小論に取り組んだ動機である。

Ⅱ章およびⅢ章では，このような動機を持って行った 2013 年度の授業実践について述べる。さらにⅣ章では提出されたレポートにより，学生の誤認識から適正な理解に至る過程，さらには自身の思考に関するメタ認知の様子を紹介しつつ，今後の課題を検討する。

Ⅱ　授業の実際　－初回授業－

1　問題提示および誕生日調査

前章で述べたように実験的・作業的手法を取り入れたいと考えたので，初回の授業冒頭で次のような問題を提示し，実際に出席者の誕生日を調べた。

問題　クラス 30 人の中に誕生日が同じ人たちがいるだろうか。

当日の出席者は 67 名であった。70 人程度になることは事前にわかっていたが，あえて 30 人程度としたのは，非閏年の 1 年の日数 365 との対比でなるべく小さく感じられ，かつ誕生日一致が起こりやすい（後で触れるが 30 人ならば一致は 0.7 程度の確率で出現する）ものを意図したからである。そこで，学生を座席位置で北側と南側の 2 グループに分け，調査することにした。北側 33 名，南側 34 名とほぼ等分された。もとより出席者全体の誕生日分布に偏りがあることは考えにくいし，このグループ分けにより誕生日の分布に恣意的な要素が入ることは，考慮しなくてよいであろう。事前

に簡易的に学生の見積りを学生に問うたところ，グループ内に「いない」とする方に挙手した者は半数近くおり、全体の 67 名でも「いない」方もあまり減らなかった。調査結果は次の通りであった。

表１　北側グループの誕生日

7 月 22 日	6 月 24 日	2 月　3 日	8 月 25 日	7 月 26 日
1 月 26 日	12 月 31 日	4 月 16 日	2 月　9 日	3 月　7 日
1 月 29 日	2 月　1 日	11 月 22 日	1 月 31 日	5 月 11 日
3 月 16 日	5 月 14 日	9 月　1 日	6 月 27 日	4 月 10 日
10 月 24 日	9 月　2 日	10 月　9 日	4 月 20 日	4 月 13 日
4 月 25 日	12 月　5 日	12 月 13 日	12 月 14 日	10 月 23 日
12 月 14 日	8 月 26 日	2 月 20 日		

表２　南側グループの誕生日

10 月 30 日	4 月 11 日	7 月 29 日	8 月 11 日	1 月　5 日
8 月 16 日	1 月 30 日	1 月 13 日	5 月 28 日	2 月　3 日
3 月 29 日	9 月 22 日	12 月　7 日	1 月 29 日	6 月 30 日
11 月 23 日	10 月　1 日	8 月 26 日	4 月　1 日	4 月 10 日
3 月 24 日	8 月　7 日	11 月 10 日	4 月 16 日	8 月 20 日
10 月 22 日	7 月 11 日	1 月 19 日	10 月 25 日	7 月 29 日
5 月　7 日	2 月 25 日	9 月 17 日	6 月 21 日	

調査方法も後の数学的考察に関わるので，具体的に記しておく。全員にカードを配り無記名で誕生日を書かせた後，グループごとに回収した。それが済んだところで，１人の学生を指名しそれを読み上げさせ，上記の表１，２を２箇所に分けて筆者が板書した。これらは読み上げた順番にそのままを記載している。表を見るとわかるが，

北側グループ内の一致：12 月 14 日　　　　　南側グループ内の一致：７月 29 日

異なるグループ間での一致：２月３日，４月 16 日，１月 29 日，４月 10 日，８月 26 日

という結果であった。各グループ内一致が１ペアずつ，全体での一致が７ペアという結果になった。これらをもれなくあげることは骨が折れるが，あえて学生にどれとどれが一致かを指摘させた。

学生は，これらの作業を楽しんでやってくれたし，結果に関しては驚きの声が上がるほどであった。これについても次節で再度触れる。先んじて述べておくと，上の結果は決して珍しいことではない。

２　考えの記述

前節の作業の後，

① 自分の事前予想と比較して結果をどのように感じたか

② 事前予想に反していたら，それはなぜか

③ 過去に同様の実験・調査をしたことがあるか

についてＡ４紙一枚に記述してもらった。②については本来長時間の考察を要するものであろうし，独力で何らかの解決に至るのは困難であるが，この時点での問題提起として問いかけた。学生の記述を整理集計すると次のようになる。

① に関して

・事前の予想

表３　（１グループのみの）30人内での一致ペア数予想

予想数	0	1	２以上	不明，無回答
人数	29	15	0	23

表４　67名内での一致ペア数

予想数	0	1	1～2	3以上	不明，無回答
人数	24	14	7	2	18

・結果をどのように感じたか

驚いた　57名

なぜ人数が２倍になっただけで急激に増えるのか知りたい　４名

（上記の「驚いた」と全員重複している）

② に関して

誕生日の分布に偏りがあったのではないか　６名

偶然このように多かった。何回も繰り返せばもっと少なくなる　１名

③ に関して

高校時での学習を含め類似の実験調査の経験がある　13名

ほとんどの学生が誕生日一致数を低く見積もり，両グループで１ペアずつ一致し，全体で７組の一致ペアが生じたという結果に驚いた様子が伺える。また，30人クラスでは１組の一致ペアが生じると妥当な判断を下した学生の多くは③で過去の経験があると回答しているが，彼らも全体での一致数の多さに驚いていた。おそらく67名という小中高の１クラスの人数を超える規模での実験は経験がないのであろう。彼らにしても全体での一致ペア数見積りはうまくできていない。これがなぜなのかは最終章の考察で触れる。

初回の授業はこれで終了とした。なお，上記の問い②に関してクラスの人数というよりも，その中のペア数が影響するのではないかという考えを記述した学生が前年度は１名いたのであるが，それに類する記述はこの年には見当たらなかった。実はこれが問題の核心に迫る第一歩なのであるが，それについて次章で述べる。

Ⅲ　授業の実際　－第２～４回目授業－

１　ペア数の重要性

第２回目および第３回目授業では，初回の授業の結果を踏まえて数学的な考察を説明した。もちろん，この部分も学生が独力で考え問題解決ができればそれに越したことはないところであるが，数学的に内容がここまで深化した段階ではそれも難しく，そうすることでかえって苦痛に感じるだろう。ただ，数学的な説明といっても，第１章で述べたように数学を専門とする学生相手ではない，というよりも数学に関して苦手意識を持っている学生が多数なので，専門的な表現を避けつつ，極力平易な言葉で学生に問いかけながら繰り返し説明した。そのため，重複が多くなって３回分の授業を費やすことになった。

まず，学生に前回の実験調査中の一致確認のときのことを思い出してもらい，どのようにして誕生日一致が生じたと判断したのかを認識させた。次のことを問いかけながら説明した。

① 黒板に誕生日を書いていくごとに注目し，時折「あっ」と声をあげるのは何をしているの

② それは２人ごとの誕生日を比べて，同じか異なるかを見ているのではないか

③ そうすると黒板で視線を何回往復することになるのか

こうしてペア数，それは n 人のクラスならば，n 人の中から 2 人選ぶ方法の総数と同じで，これは高校時に ${}_nC_2 = n(n-1)/2$ として学習したものであることを思い出させた。それは黒板上の視線の移動回数 $1+2+\ldots+(n-1)$ に当然等しいことも付け加えた (横道にそれるが，これは自然数和公式の組合せ論的証明にもなっている)。クラスの人数という目につくデータからペア数に目を向けさせ，その重要性をまず認識させた。誕生日の板書に時間をかけたのは，この端緒とするためである。

2　ペア数から一致確率へ

前節の考察から一致確率の見積もりに至るまで，次の 2 段階により説明を施した。

① 固定された 1 ペアで誕生日が一致する確率は である。
② 2 ペア以上で誕生日一致が同時に起こることはあまり起こりそうにない

①については，ペアのうちの一方の誕生日を聞いて，残り一方の誕生日が 1 年 365 日のうちのまさにその 1 日に一致するということを想像すれば理解できるだろう。②については，実は適用範囲はそれほど広くない。というのも人数が多くなると，一致ペアが複数出現することは十分起こりうるからである。しかし，理解の過程ではこのようにしてしまった方が先を望める。これを仮定しておくと，n 人のクラスで誕生日一致ペアが出現する確率 p_n は，粗いながらも

$$p_n \approx q_n := \frac{{}_nC_2}{365} = \frac{n(n-1)}{2\cdot 365}$$

と見積もることができる。これは合理的な数学的ヒューリスティックであり，高校の教科書にも載っている公式

$$p_n = 1-(1-1/365)\cdot(1-2/365)\cdot\ldots\cdot(1-(n-1)/365)$$

に基づく数値計算と比較しても n=15 くらいまではよく一致している：

$$q_5 = 0.0274,\quad p_5 = 0.0271,\quad q_{10} = 0.1233,\quad p_5 = 0.1169,$$

$$q_{15} = 0.2877,\quad p_{15} = 0.1233,\quad q_{20} = 0.5205,\quad p_{20} = 0.4144.$$

また，上記 p_n の公式を展開して 1/365 の 1 次項のみを近似式として採用すれば，形式的計算上においても q_n が自然に得られることを簡単に述べた。ここまでで，p_n の数値計算のみによって，「誕生日一致の確率は思ったよりも大きい」と漠然と感じた段階から，形式的計算の段階から意味理解に基づくより深い段階に入ったと考えられるが，さらに上記の②の難点を取り除くことを説明した。

3　確率から期待値へ

前節までの考察で一致確率は予想外に大きいことはおおよそ理解できた。ところが，そこで使った q_n は n=28 で 1 を超え，当然のことながら，確率としては意味をなさない。それではこれは確率的に全く意味がない量かというと，そうではない。何か意味付けが出来ないかと探ると展望が開ける。

まず，67 人という規模になると，すでにこれよりすくない人数でも一致が生じることがもっともらしいことはわかったので，一致が生じるか否かというよりもどれくらいの一致数（ペアかもしれないし，これくらいの人数規模になると一致 3 人組～トリオ～も無視できない）が出現するかということの方が問題設定としては適当だろう。

1 節に戻って，板書を注視した過程を再度思い出してもらった。そこで新たに加えたのは次の説明である。

① 1 ペアずつ一致かどうかを見ていき，それらを全部合わせると全体での一致ペア数が出る

② 全体で ${}_nC_2$ だけペアがあった。これだけ調べるとどれくらい一致が起こるか
③ 各ペアでの一致確率は 1/365 であったから，365 回に 1 回の頻度で一致が現れるだろう。
④ すると，全体の中では ${}_nC_2/365$ くらいのペアが一致するのではないか

こうして，確率から期待値へと移行することで，q_n の意味付けが出来たことになる。ただし，高校・数学 A で学習する「値×確率の和」としての期待値とのすり合わせに齟齬が生じるかもしれない（学生の様子からはそれは伺えなかった）。実は，①～④の過程は 0-1 確率変数への分解による期待値計算という高級なテクニックを用いているのであるが，素朴な理解ではむしろ「期待値」という言葉の意味を忠実に表しているので，両者の差異は深くは追求せずにおいた。また，注意しておきたいのは一致ペアのうちに一致トリオも 3 回数えられていることである。その意味では，一致ペアのみに限定すればもう少し小さくなる。これに関しては，森口 (2011) より詳細には Feller を参照のこと。もちろん，それを正確に求めるのはここでは不適当であると判断して触れずにおいた。

q_n の新たな意味付けが出来たところで数値計算をしてみると，

$$q_{30} = 1.1918,\quad q_{40} = 2.1370,\quad q_{50} = 3.3561,\quad q_{60} = 4.8493,\quad q_{67} = 6.0575$$

等となる。67 人で 7 ペアの一致は別に驚くに値しなかったわけである（分布をポアソン近似してさらに正規近似をすれば，一致ペア数の 95％信頼区間も出すことができ，当該の 7 も当然その中に入っている）。

ここまで上記の内容を平易な言葉による説明資料を用意しつつ，ワークシート等を配り，周囲と相談しながらでも時間をかけて考えてもらった。実は，２回目の授業でⅡ章，Ⅲ章の内容をかなり速さで簡潔に説明したのだが，学生の理解が追い付いていない様子だったので，さらに２回を使って丁寧に見なおしてみたのである。数学的道具として使ったのは，ごく簡単なもので高校時にお馴染みのもので，後は Polya(2014) の説くような，良い意味での常識的なヒューリスティックを積み重ねただけである。

この段階でどの程度理解が深まったか，この段階で学生側に簡単な振り返りをしてもらうべきであったが，時間の制約のためそれを諦め，最終レポートで確認することにした。次章では，その提出されたレポートに依拠しつつある学生の理解の変容過程を述べる。

Ⅳ　理解の実態と今後の課題

1　学生のレポート

第 1 章で述べたように講義の締め括りとして，学生には最終レポートを提出してもらった。この前年のレポートにその旨の感想が見られたのだが，本論で取り上げた誕生日問題は，初回に実験・調査を行ったこと，その結果が驚くべきものであったこと，等で例年学生には強い印象を与えているようだ。この年も 57 名がレポートを提出したが，そのうち誕生日問題を取り上げたのは 21 人と最も多かった。

その中のある学生のレポートを通じて，どのような認識が変化したのかを見ることにしたい。まず，レポートの内容は簡単に記しておく。この学生は，普段数学の講義を受けている学生ではないことをことわっておく。

①（誕生日問題の）再実験Ⅰ：100 人の誕生日調査（一致トリオがどれくらい現れるか）
② 再実験Ⅱ：212 人の誕生日調査（一致カルテットがどれくらい現れるか）
③ 一致トリオ，カルテット数の期待値の導出

④ ③の結果と①，②の結果との照合
⑤ 自身の誤認識に関する考察
　a.　少ない見積りの原因
　b.　分布の偏りに対する誤認

「再実験Ⅰ」,「再実験Ⅱ」のデータは授業の得られたもの 179 件 (別の回で受講者の父母の誕生日も調べた) に加えて知人の誕生日 33 件も調べたようである。これは少なからぬ労力を伴うものである。実は，学生に手軽に実験ができるようにと考えて，PC の表計算ソフトを用いた誕生日一致シミュレーションの手順も資料として渡しておいたであるが，意図的かどうかは不明だが，こうした手作りシミュレーションは歓迎したい (多くの学生は PC を利用していた)。
興味深いので実験結果を記しておくと，

再実験Ⅰ（100 人）: 一致ペア 9 組，一致トリオ 1 組，一致カルテット 0 組
再実験Ⅱ（212 人）: 一致ペア 27 組，一致トリオ 6 組，一致カルテット 1 組

であった。④ではこれらと③の結果とを比較照合しているわけである。
一致ペア数に関しては理論値とよく合っていることを確かめている。残念ながら，最終的に得られた式に些細ではあるが，影響が少なくない誤りがあったため，トリオ，カルテットについては上の結果から離れたものを理論値として導出している。
実は, n 人中での（カルテット以上の重複を含めた）一致トリオの理論値は $\boldsymbol{r_n := {}_nC_3 / 365^2}$，一致カルテット数の理論値は $s_n := {}_nC_4 / 365^3$ とわかるから，$r_{100} = 1.2137$，$s_{100} = 0.081$ $s_{212} = 1.6823$ と計算されるから，これらに関しては順当なところであろう。また，$r_{212} = 11.752$ となり，上の結果の 6 組とは随分離れているように見えるが，95％信頼区間の下限を計算すると，５程度となりこれも許容範囲である。
上記の誤りのため，比較照合の過程で，やや牽強付会な合理化を行っている面が見られる。例えば，値が異なるのは確率的な誤差のためであると結論しているが，これは致し方のないところであろう。
誤っているとはいえ，トリオ一致を考える際には ${}_nC_3$ を，カルテットでは ${}_nC_4$ を用いるべきであることを推察している。ここからは，Ⅲ章の内容が伝わっていると推察され，この部分は評価したい。
最後に，このレポートにおいて最も評価したい⑤の部分を見てみよう。まず a に関しては，自身の誕生日と一致する人には滅多に出会わないということを原因にあげている。自身の誕生日との一致と, クラス内の誰かの一致とを混同して考えているわけではないが, 自身の思考過程を振り返って, 誕生日一致は珍しいという思い込みが後者の一致確率を過小評価する原因になっているとしている。「誕生日一致は滅多に起こらない」という記述はⅡ章の①，②の回答中でも見られたので，妥当な推論であろう。もう一つ 365 という数の大きさを指摘している。これと比べると，クラスの人数は 67 でも小さく思えるとのことである。これも妥当なものであり，実はこの要因が大きいと筆者は考えているのであるが，これについては後述する。
次に b に関して述べる。この学生は，Ⅱ章②で「分布に偏りがあるのではないか」と疑ったうちの１人である。数学的に合理化できるという結果に接して，当初のこの疑念の方を吟味してみたようである。表１および表２の結果が一様分布を否定するものではないことは，χ^2 検定を行えば容易にわかるのであるが，これを行うことは統計をあまり身近に使っていない学生にはもちろん期待できない。結局，インターネット上の分析サイトで確認することにより，分布の一様性を納得したようである。

最後に a, b の結びとして，上述の２つの思わぬ誤った思い込みに似た事例は日常的にありふれていて避けられない反面，こうした素朴確率感覚は良い面もあり，多くの場面では我々はその恩恵に与っているとしている。いずれにしても，良い面，悪い面の両方を認識することが大切であると結論している。

ここまで洞察したことを大いに評価したい。また，他の学生に関しても優れたレポートが多かったことを付言しておく。

２　今後の課題

誕生日問題に戻って述べると，あらためてこれは確率理解を深める面白い教材であると考えている。これに関する誤った認識は，Tversky, Kahneman（1982）にある「利用可能性（availability)」に関するバイアスに起因しているが，具体的にいうと，Ⅲ章で述べたように，30 人のクラスのときには，用いるべきであるのは目に入りやすい 30 そのものではなくて，隠れた ${}_{30}C_2 = 435$ であるという複雑な事情にある．どうしても 30/365 のような人数と一年の日数との比を想起してしまうのである。こうした比例関係による (期待値を含めた) 確率の見積もりは，経験があっても誤りを犯す傾向が見られる。例えば，Ⅱ章の回答で「30 人のクラスに一致ペアはいるだろう」と答えても，「では，67 人ではどうか」と問われると，約２倍のせいぜい２人程度と答えているのがその証左である。一致ペア数期待値が ${}_nC_2/365 = n(n\text{-}1)/(2\cdot365)$ のようなクラスの人数 n の２次関数になるなどとは，容易に想像し難いものである。

元来，Fischbein & Schnarch（1997），松浦（2006）の調査からわかるように，利用可能性ヒューリスティックに関する誤りは非常に犯しやすいと考えられる．これに加えて上記のような

・利用可能なデータを見つけるのが困難である

・結果が一見得やすいデータの予想外に複雑な関数になっている

事情であれば，誕生日問題に適正に答えるのは誰にとっても難しいだろう。

しかし，反面これを理解すれば，１のレポートの学生で見たように確率観をあらため，深める契機ともなり得る。Ⅲ章で述べたように，内容的には高校数学 A の範囲で十分理解できるものである。この意味で，多くの高校生にもぜひ取り組んでもらいたいと考えている。高校の教科書では，誕生日問題は従来からコラムのような形で取り上げられてきたし，平成 24 年度からの新学習指導要領による教科書では，大島　他（2011）のように新たに設定された課題学習として取り扱っているものもある。知己の高校教員と，授業実践を含めた共同研究を計画したいと考えている。

参考文献

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* Vol. 1 (3rd edition), Wiley. / 邦訳：河田龍夫　監訳，卜部舜一　訳（1960)．『確率論とその応用 1 上』，紀伊國屋書店.

Fischbein，E & Schnarch，D.（1997）．The Evolution With Age of Probabilistic，Intuitively Based Misconceptions，*Journal for Research in Mathematics Education*，2 8，96-105.

Polya, G. (2014). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press. 初版は 1945. / 邦訳：柿内賢信　訳（1975)．『いかにして問題をとくか』，丸善.

Tversky A., Kahneman D. (ed.)(1982), Judgment under uncertainty -:Heuristics and biases, Cambridge Univ. Press.

大島利男　他（2011)．『高等学校・数学 A』（文部科学省検定済高等学校教科書)．

森口繁一（2011)．『応用数学夜話 現象と数理と統計』，筑摩書房．初版は 1978 日科技連出版社.

松浦武人（2006)．「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」，『数学教育学研究』，第 12 巻，141-151 頁.