

# 回転楕円体の水滴による虹の形成

Formation of the Rainbow with the Spheroidal Waterdrops

山下和之\*

YAMASHITA Kazuyuki

**要約**：虹は水滴によって光線が分光されてできた模様である。この現象を説明するのに用いられる仮定は光の散乱体である水滴の形状を球とすることである。しかし、この仮定は現実的ではない。なぜなら、虹ができる環境は地球の重力加速度という鉛直方向を特別とするものであるため、水滴の形状が鉛直方向と水平方向で同等とは考えられないからである。そこで、散乱体を鉛直方向を軸とする回転楕円体として、虹ができる状況を数値シミュレーションにより解析した。その方法と結果を報告する。

**キーワード**：虹、散乱、回転楕円体

## 1 序論

虹は身近に見られる壮大で不思議な現象で、子どもはその美しさにファンタジーを思い描く。しかし、美しさから踏み込んで「虹って何？」という疑問を持つことは当然である。この問いに対してファンタジー的な説明で答えるという対応は、それを発した子どもの状況によっては問題ない。しかし、その疑問が科学に対する興味の芽生えであったならば、ファンタジー的な説明がその子どもの科学方向の芽を摘むことになるとも考えられるため、教師はその科学的な説明について理解しておくことが望まれる。

さて、虹の形成については基本的には次のように説明される。光線が球状の水滴が存在する領域に入射したとき、各水滴に入射した光は、水滴表面の入射点で屈折して水滴内部に入り、屈折光はその先の水滴表面で反射し、反射光は水滴表面で入射時と逆に屈折して水滴外部に出て散乱光となる。光の入射点によって散乱光の向きは異なる。太陽光のような平行光線を入射光とした場合、入射光は水滴の片側に一様に入射する。入射光に対する散乱光の角度は、一つの屈折率につきある一つの角度に集中して分布する。これは、その角度以上では散乱しないという限界の角度が極値として働いて、その角度に散乱光が集まったようになるためである。水の屈折率は光の波長、すなわち色によって異なるため、様々な波長の光を含む太陽光では各色毎に散乱光の集中する向きの入射光に対する角度が異なるものとなって分光が生じる。太陽を背にして観測者から一定程度の距離のところに入射光が空間的に分布しているときには、散乱体が存在する領域をスクリーンとして、スクリーン上で散乱した光が観測者に届く。このとき、スクリーン上の散乱点と観測者を結ぶ方向と入射光の方向のなす角が散乱光の入射光に対して集中する角度となっていたとき、その角度に集中する屈折率の波長の光の色が観測者に見える。これがスクリーン上で虹の模様として見える。

上の説明で、果たして水滴は球状として良いのだろうかという疑問が生じる。地球環境で生じる現状である以上、重力加速度による鉛直方向は水平方向とは異なるはずであり、水滴が球状であるという条件を課すことは現実的ではないであろう。そこで、今回散乱体を球状ではないとした場合

\*教育人間科学域 人間科学系

の検証を行うこととした。しかし、検証するパラメータスペースを限定する必要から、水滴は鉛直方向を軸に持つ回転楕円体とする。この仮定は水平方向には特別な方向がないことに基づく。

本論文は、散乱体が回転楕円体である場合でも虹ができるかどうかを数値シミュレーションにより示すものである。シミュレーションでは2つのパラメータを用いる。1つは回転楕円体の扁平率である。もう1つのパラメータは対称軸に対する入射光線の角度である。これらに対して虹が形成される条件を求める。

## 2 計算

### 2.1 座標系と入射光の方向ベクトル

鉛直方向を  $z$  軸とする座標系を設定する。入射光の方向ベクトル  $\mathbf{p}^{\text{in}}$  は  $xz$  平面内にあり、その  $x$  成分は負であるとし、大きさは1であるようにとる。

$$\mathbf{p}^{\text{in}} = (p_x^{\text{in}}, p_y^{\text{in}}, p_z^{\text{in}}), \quad (1)$$

$$|\mathbf{p}^{\text{in}}| = \sqrt{p_x^{\text{in}2} + p_y^{\text{in}2} + p_z^{\text{in}2}} = 1. \quad (2)$$

$$p_x^{\text{in}} < 0, \quad (3)$$

$$p_y^{\text{in}} = 0. \quad (4)$$

入射光の方向ベクトルは、入射光線と  $z$  軸のなす角  $\theta$  によって次のように表す。

$$p_x^{\text{in}} = -\sin \theta, \quad (5)$$

$$p_z^{\text{in}} = -\cos \theta, \quad (6)$$

### 2.2 散乱体

散乱体は回転楕円体とする。

1つの散乱体に入射した光がどのように散乱するかを調べる上では回転楕円体の中心を原点にとり、その対称軸は  $z$  軸であるとする。その  $x, y, z$  軸の正の切片をそれぞれ  $a_x, a_y, a_z$  とすると、楕円体表面の座標  $(x, y, z)$  は

$$\frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} = 1 \quad (7)$$

という関係を満たす。対称軸を  $z$  軸とするということから

$$a_x = a_y \quad (8)$$

であり、 $a_z$  の  $a_x$  に対する比率  $r$  を回転楕円体の扁平率として

$$r = \frac{a_z}{a_x} \quad (9)$$

と定義する。なお、 $a_x$  と  $a_z$  は1かそれ以下であるように規格化する。

虹の見え方を調べる際には、散乱体は同じ回転楕円体が  $x = 0$  面に一様に分布しているものとし、すべての回転楕円体の対称軸は  $z$  軸に一致しているとする。

### 2.3 入射光線

入射光が散乱体で散乱されてどのような方向に出るかを調べるため、各入射光線の直線の方程式を

$$\frac{x - x_0}{p_x^{\text{in}}} = \frac{y - y_0}{p_y^{\text{in}}} = \frac{z - z_0}{p_z^{\text{in}}} \quad (10)$$

によって与える。ここで、 $x_0, y_0, z_0$  は、入射光に垂直な、原点を含む平面上の、原点を中心として辺の長さが2とする正方形の領域に一様乱数によって与える。この領域は散乱体をカバーするもの

である。

#### 2.4 楕円体表面の接平面の法線外向きベクトル

以下では楕円体の表面の接平面の法線外向きベクトルが必要とされる。そのベクトルの  $x, y, z$  成分  $q_x, q_y, q_z$  は、表面の点の座標を  $x, y, z$  とすると、それぞれ

$$q_x = \frac{x}{a_x^2} \quad (11)$$

$$q_y = \frac{y}{a_y^2} \quad (12)$$

$$q_z = \frac{z}{a_z^2} \quad (13)$$

と求められる。

#### 2.5 屈折・反射・屈折

本論文で調べる虹は主虹である。主虹は1つの散乱体において入射光線に屈折、反射、屈折が各1回あって散乱光となるものである。一方、副虹は1つの散乱体の中で反射が2回起きるものであるが、ここではその場合は考えない。

入射光が散乱体表面と最初に交わる点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}^A$  とすると、その  $x, y, z$  座標は式 (7) と式 (10) の解の  $\mathbf{p}^{\text{in}}$  に対する後方解として求められる。

入射光は散乱体表面の点  $\mathbf{r}^A$  で屈折する。散乱体の屈折率を  $k$  とする。この点での散乱体の接平面の法線外向き方向のベクトル  $\mathbf{q}^A$  が入射光となす角をとすると、そこで屈折した光の方向ベクトル  $\mathbf{p}^A$  は、 $\mathbf{q}^A$  と  $\mathbf{p}^{\text{in}}$  の張る平面内で  $\mathbf{q}^A$  とのなす角が  $\alpha'$  となる向きとなる。ここで、 $\alpha'$  はスネルの法則により

$$\alpha' = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \alpha}{k}\right) \quad (14)$$

と与えられ、 $\mathbf{p}^A$  は

$$\mathbf{p}^A = -\cos \alpha' \mathbf{q}^A + \sin \alpha' \mathbf{q}^A \times (\mathbf{p}^{\text{in}} \times \mathbf{q}^A) \quad (15)$$

によって求められる。ここで、 $\times$  はベクトルの外積演算子である。

屈折光は散乱体の表面の点  $\mathbf{r}^B$  で反射する。この点は反射光の直線の方程式と式 (7) の前方解として求められる。その点での散乱体の接平面の法線外向き方向のベクトル  $\mathbf{q}^B$  とその反射角  $\alpha''$  を用いて、反射光の方向ベクトル  $\mathbf{p}^B$  は

$$\mathbf{p}^B = -\cos \alpha'' \mathbf{q}^B + \sin \alpha'' \mathbf{q}^B \times (\mathbf{p}^A \times \mathbf{q}^B) \quad (16)$$

と求められる。

反射光は散乱体の表面の点  $\mathbf{r}^C$  に達する。この点での散乱体の接平面の法線外向き方向のベクトル  $\mathbf{q}^C$  と反射光の方向ベクトルのなす角を  $\alpha'''$  とすると、ここで屈折して外に出る散乱光の方向ベクトル  $\mathbf{p}^{\text{out}}$  と  $\mathbf{q}^C$  のなす角  $\alpha^\dagger$  は

$$\alpha^\dagger = \sin^{-1}(k \sin \alpha''') \quad (17)$$

を満たさなければならない。散乱体である水の屈折率  $k$  は1より大きいので、 $\alpha'''$  が臨界角を超えている場合には  $k \sin \alpha'''$  が1より大きくなって式 (17) の解がなくなる。その場合には光はこの点で全反射して散乱体から出て行くことができない。この条件をクリアして出ていくことのできる光は

$$\mathbf{p}^{\text{out}} = -\cos \alpha^\dagger \mathbf{q}^C + \sin \alpha^\dagger \mathbf{q}^C \times (\mathbf{p}^B \times \mathbf{q}^C) \quad (18)$$

の方向ベクトルを持つ散乱光となる。

## 2.6 屈折率

本論文では、可視光の波長の両極端に位置する赤色と青色を取り扱う。赤色の光は波長が 656.3nm のものとする。その屈折率は 1.3311 である。青色の光は波長が 404.7nm のものとし、その屈折率は 1.3428 である。これらは理科年表, 2009[1] に掲げられている値である。

## 2.6 虹の観測

虹の観測をシミュレーションする上では、散乱体はスクリーン  $x = 0$  面に一様に配置されているものとする。このとき観測者は  $x = x_{\text{scr}} = 1, y = z = 0$  の点にいるものとする。散乱体によって散乱された方向ベクトル  $\mathbf{p}^{\text{out}}$  の光が観測者に届くならば、その光はスクリーン上の点  $(s_x, s_y, s_z)$  で散乱されたものであると考えられる。このスクリーン上の点の座標は、 $\mathbf{p}^{\text{out}}$  の  $x, y, z$  成分  $p_x^{\text{out}}, p_y^{\text{out}}, p_z^{\text{out}}$  を用いて、

$$s_x = 0 \quad (19)$$

$$s_y = -\frac{p_y^{\text{out}}}{p_x^{\text{out}}} x_{\text{scr}} \quad (20)$$

$$s_z = -\frac{p_z^{\text{out}}}{p_x^{\text{out}}} x_{\text{scr}} \quad (21)$$

と求められる。

## 3 結果

### 3.1 入射点

波長 656.3nm の赤色の光について入射点  $r^A$  を入射光に垂直な面上に張られた  $Y, Z$  座標を用いてプロットする。鉛直軸  $z$  に対して  $Y$  軸は直交するようにとる。入射光線の本数は 1 枚のグラフにつき  $10^5$  本である。散乱体と交点を持たない光線も多数あるが、扁平率や入射光線の角度が異なる場合でも公平に比較できるように、入射光線に垂直な平面で単位面積あたり同じ本数が入射するように設定した。

図 1 は扁平率  $r = 1.0$  の回転楕円体、すなわち球体のときのものである。各点は、入射光の直線が  $Y, Z$  平面と交わる点を表している。赤色の点は入射光が回転楕円体と交点を持たなかったことを意味し、黒色の点は交点を持ち、散乱光が  $x$  正方向に向いていて、観測者によって観測可能であるようなものであることを意味する。また、黄色の点は散乱光が  $x$  負方向に向いているため観測者によって観測できないものであることを意味する。

図 2 は扁平率  $r = 0.2$  の扁平な回転楕円体の場合のものである。緑色の点は水滴内の反射光が回転楕円体表面に達したときに全反射してしまってそこで外に出られないことを意味する。

図 3 は扁平率  $r = 5.0$  の長球の回転楕円体の場合のものである。扁平な場合と比較すると  $x$  負方向に散乱する光は極めて少ない。

## 回転楕円体の水滴による虹の形成

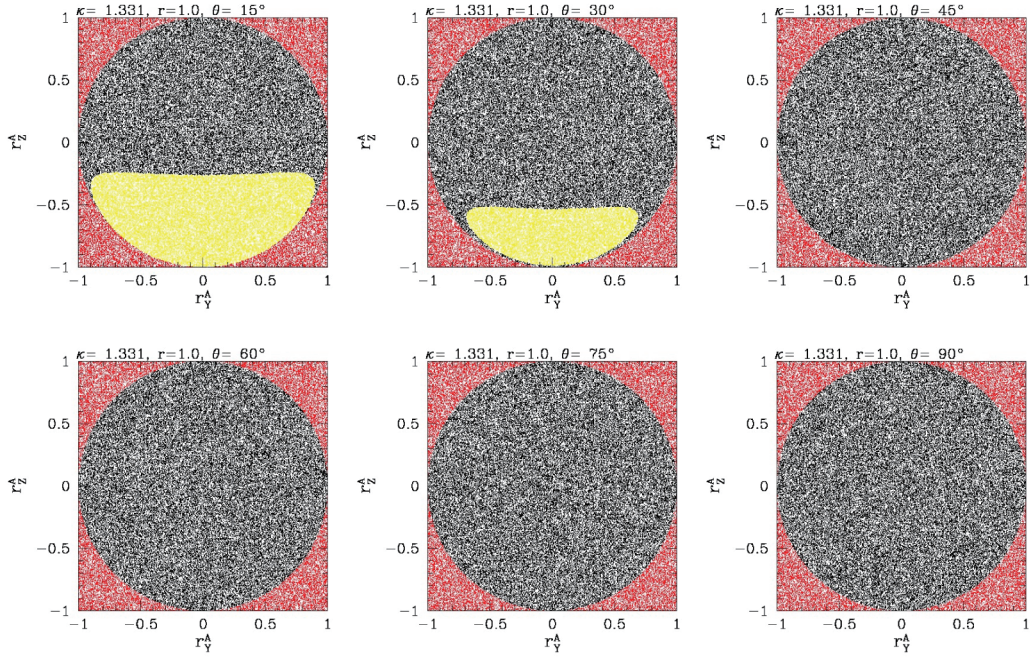


図 1 : 入射光線。  $r = 1.0$  の場合。

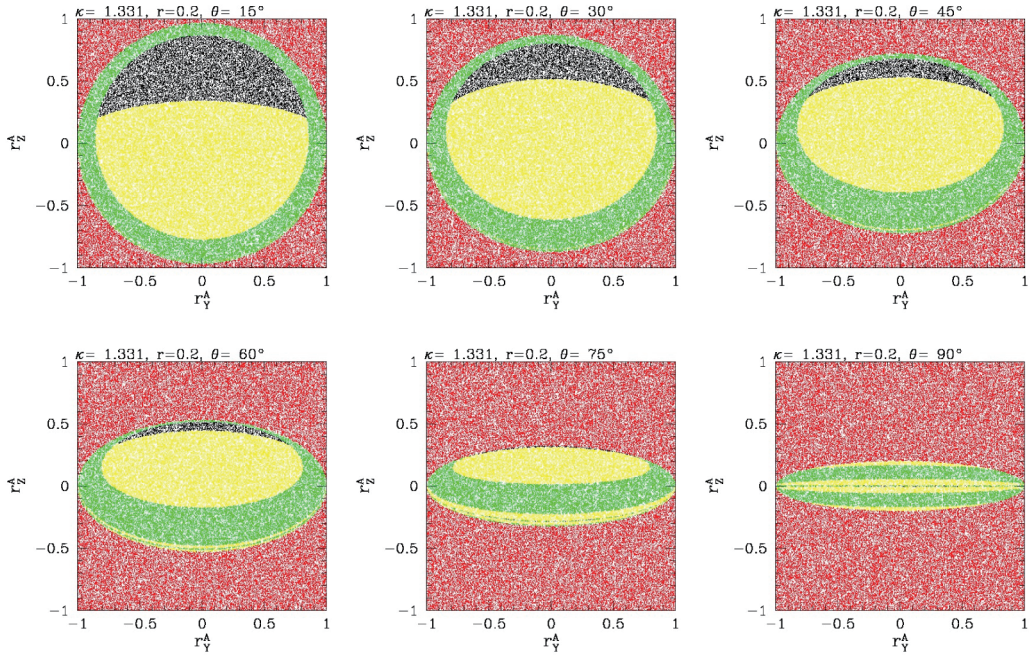


図 2 : 入射光線。  $r = 0.2$  の場合。

### 3. 2 散乱光

各入射光線が水滴で散乱した波長 656.3nm の散乱光の方向ベクトルを  $xyz$  座標系で示す。散乱体の扁平率  $r$  や入射光の天頂からの角度  $\theta$  は各図内に記している。このベクトルは大きさが 1 となるように規格化している。図の黒色の点は散乱光が  $x$  正方向に向いていることを意味し、黄色の点は  $x$  負方向に向いていることを意味する。

図 4 は扁平率  $r = 1.0$  の回転楕円体、すなわち球形を散乱体とした場合のものである。散乱光は、この 656.3nm の波長の入射光に対して  $42.4^\circ$  以下の散乱角を持ち、その限界角に集中する。このため、散乱光の方向ベクトルは半径が 1 の球の一部のお椀状に分布する。入射光のスクリーンに対する角度を変えたときには、そのお椀を角度を変えて見たときのように変化する。

回転楕円体の水滴による虹の形成

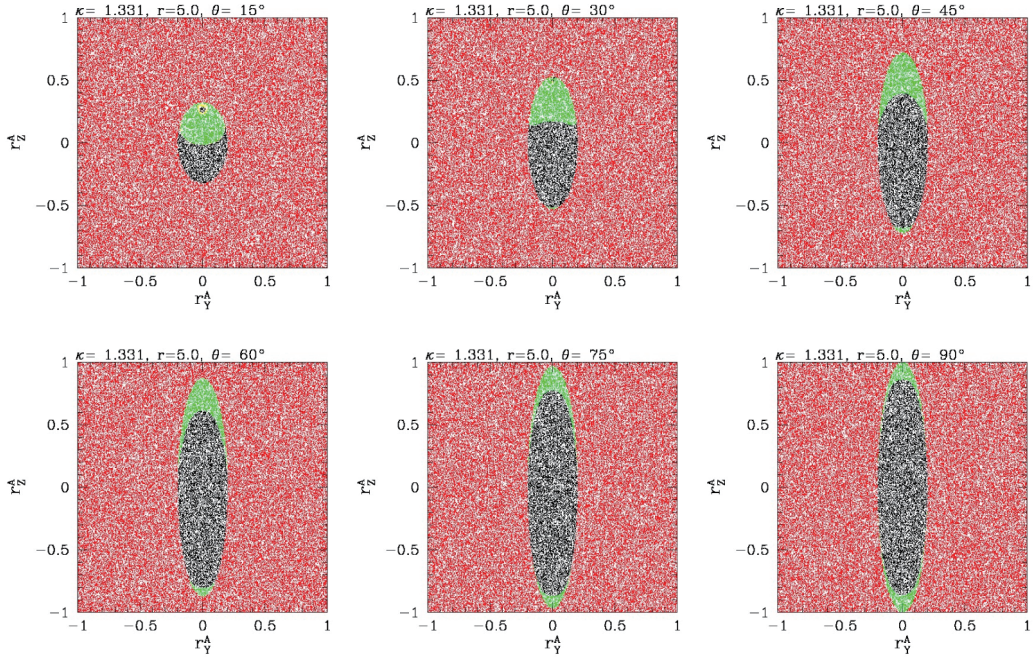


図 3 : 入射光線。  $r = 5.0$  の場合。

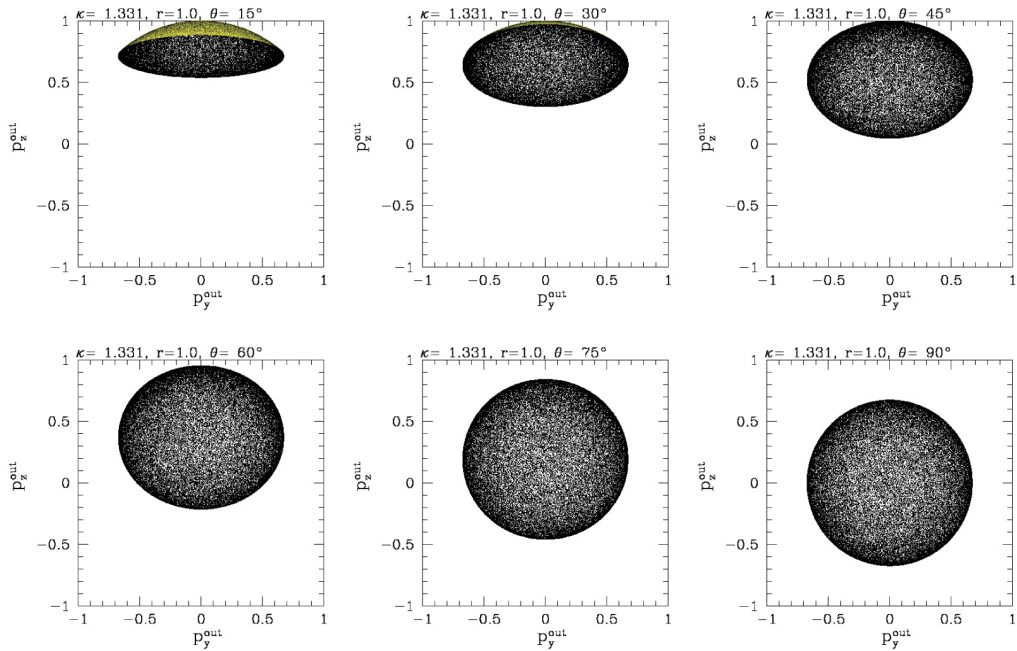


図 4 : 入射光線。  $r = 1.0$  の場合。

図 5 は扁平率  $r = 0.2$  の回転楕円体の場合のものである。点の数が少なく、そのほとんども黄色で、 $x$  正方向に向く散乱光が少ないことが示されている。これは、図 2 からわかるように、黒色の点が少ないことや、点  $C$  で全反射が起きて、その点で光が出ていかないことによる。

図 6 は扁平率  $r = 5.0$  の回転楕円体の場合のものである。天頂近くから入射した光の散乱光は散逸しており、そのとき虹は形成されそうにないことが予想される。

## 回転楕円体の水滴による虹の形成

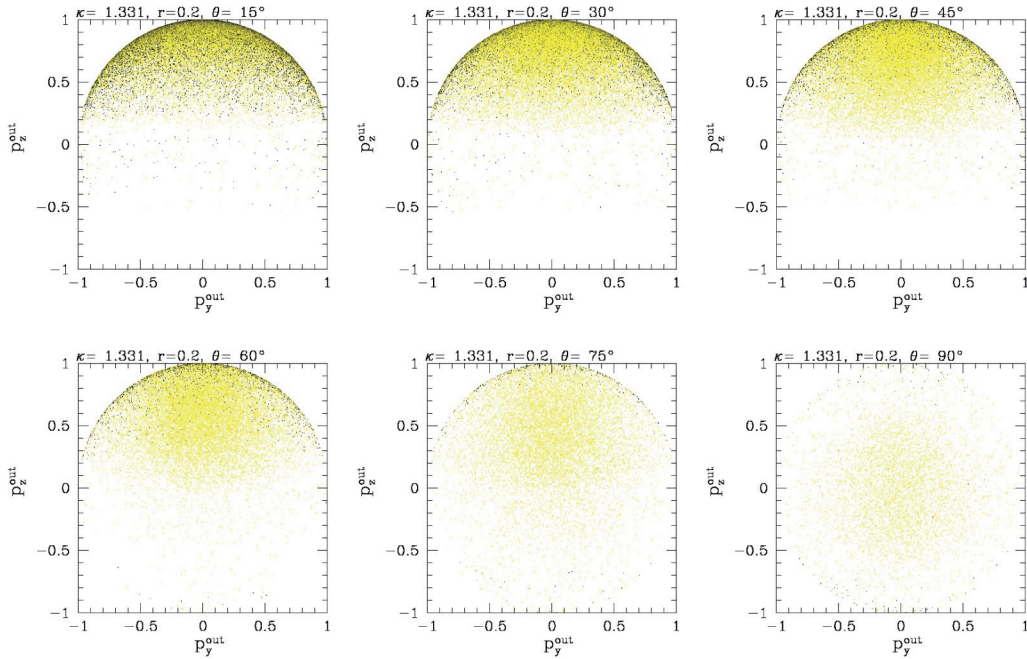


図 5 : 入射光線。  $r = 0.2$  の場合。

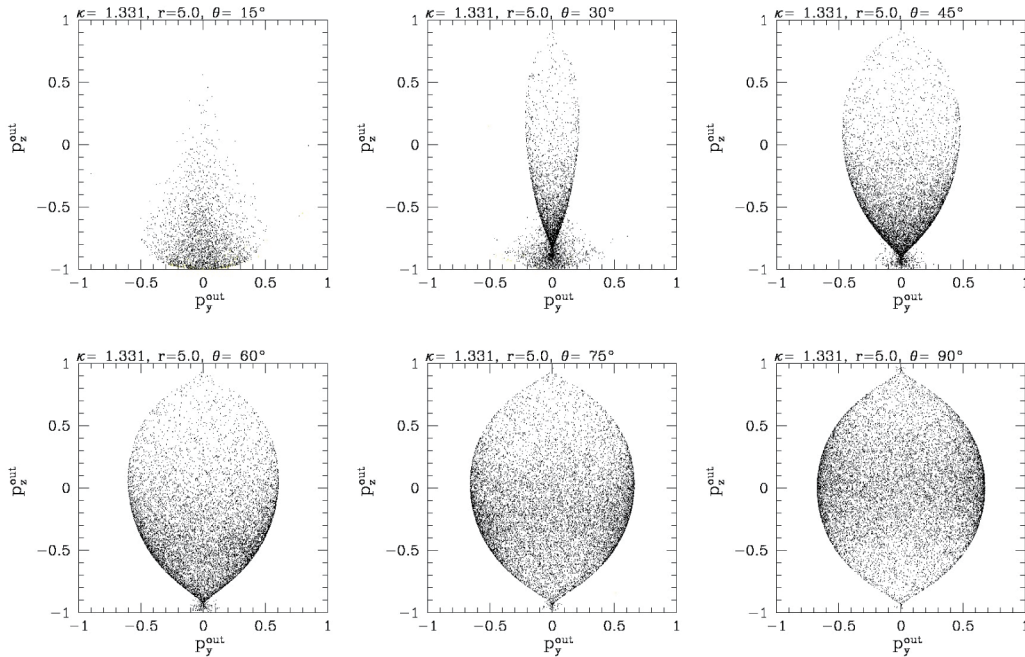


図 6 : 入射光線。  $r = 5.0$  の場合。

### 3.3 虹

観測者に届いた散乱光のスクリーンで散乱された位置を示す図を図 7-14 に示す。これらが観測者から見た虹の模様に対応するものとなる。散乱体の扁平率  $r$  や入射光の天頂からの角度  $\theta$  は各図内に記している。波長が 656.3nm の赤色の光を赤い点で表し、波長が 404.7nm の青色の光を青い点で表した。赤い光の屈折率 1.3311 は青い光の屈折率 1.3428 よりも小さいため、散乱角は大きいものとなる。このため、球体における主虹の赤色成分は青色成分より外側に形成される。直線  $s_2 = 0$  は地上の高さを意味する。虹の形成条件として、虹は  $s_2 > 0$  の領域になければならないことも加味する。

図 7 は球体の場合のものである。赤色成分が青色成分より外側にあることが確認できる。天頂に対する入射光の角度が  $\theta \leq 45^\circ$  のとき、散乱光はスクリーンの  $s_2 > 0$  には観測されない。これは限界

## 回転楕円体の水滴による虹の形成

角が  $45^\circ$  より小さいことに起因する。そのような入射光では虹は観測者のいる水平面より下に位置するため、虹は通常観測されない。

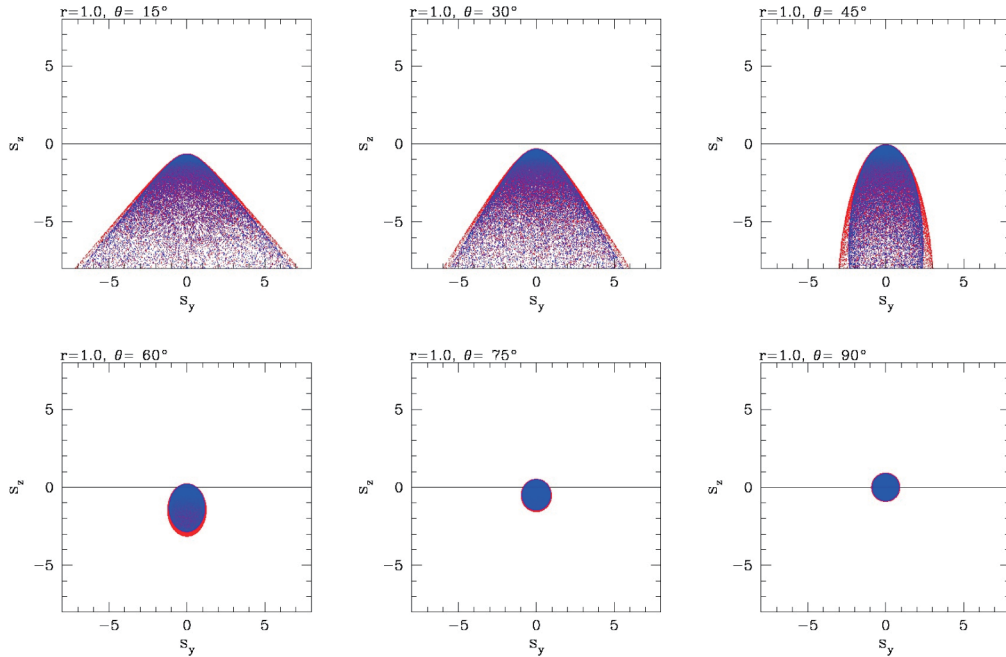


図7:スクリーン上の散乱光の位置。  $r = 1.0$  の場合。

図8は扁平率  $r = 0.8$  の回転楕円体の場合の散乱光の様子である。天頂に対する入射光の角度が  $\theta \leq 75^\circ$  のとき  $s_z > 0$  には散乱光が現れない。扁平率が1より小さくなって  $s_z < 0$  に散乱した光は  $s_y$  方向により広く散らばる。

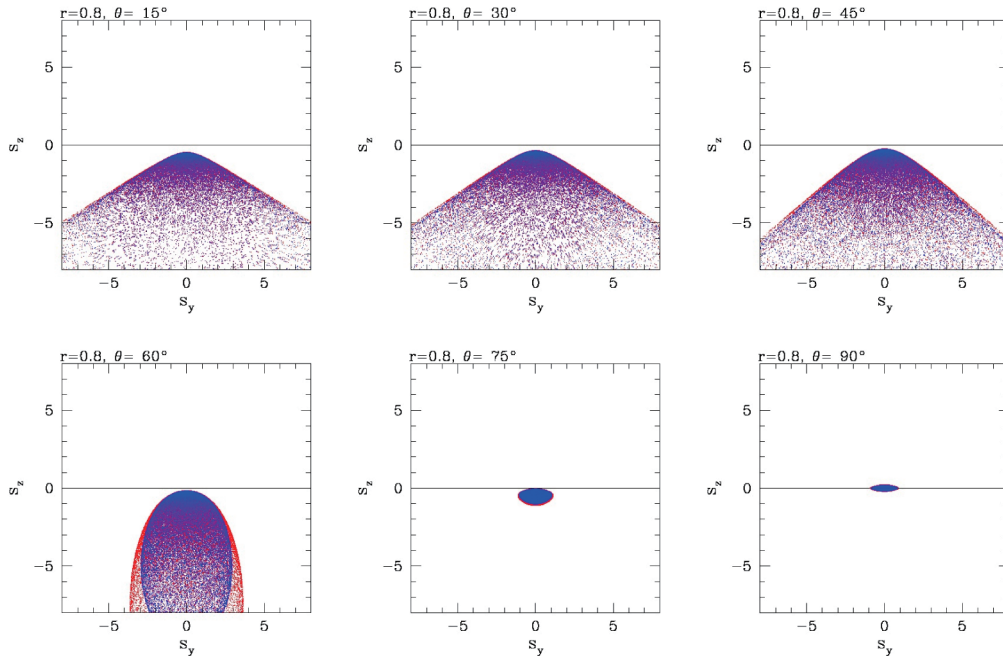


図8:スクリーン上の散乱光の位置。  $r = 0.8$  の場合。

図9は扁平率  $r = 0.6$  の回転楕円体の場合の散乱光の様子である。天頂に対する入射光の角度が  $\theta \leq 60^\circ$  のとき  $s_z > 0$  には散乱光が現れない。なお、 $\theta = 75^\circ$  では  $s_z > 0$  にも散乱光が現れているが、集中するようにはなっておらず、虹は形成されていなかった。



回転楕円体の水滴による虹の形成

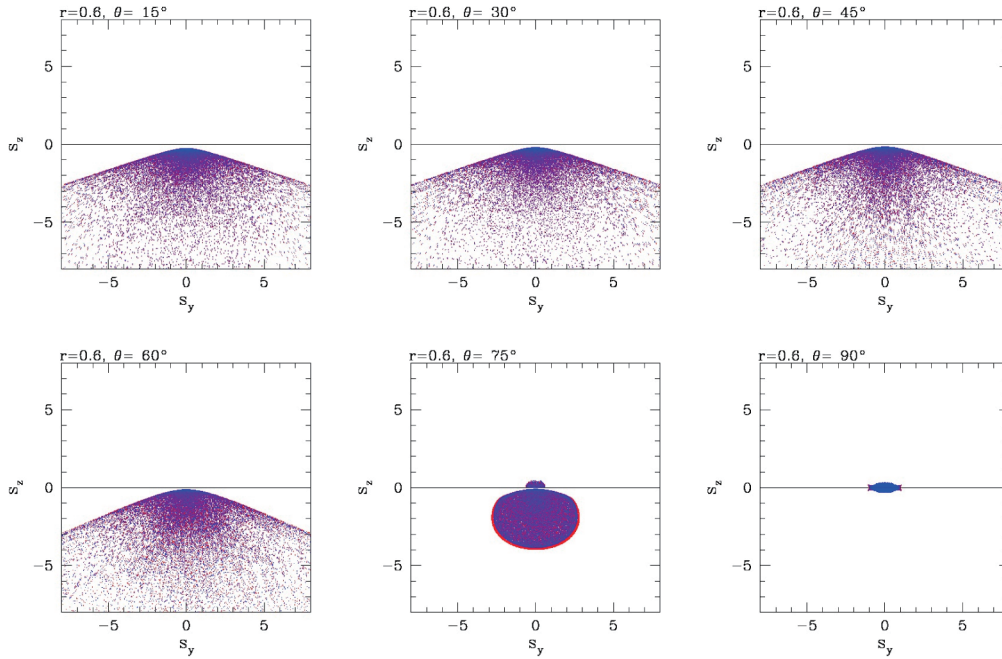


図9:スクリーン上の散乱光の位置。  $r=0.6$  の場合。

図10と11は、それぞれ回転楕円体の扁平率が  $r=0.4$  と  $r=0.2$  のものである。赤色の光も青色の光も散逸してしまって、いずれの方向から入射した場合でも散乱光がある方向に集中して虹が形成される様子は見られないことがわかる。

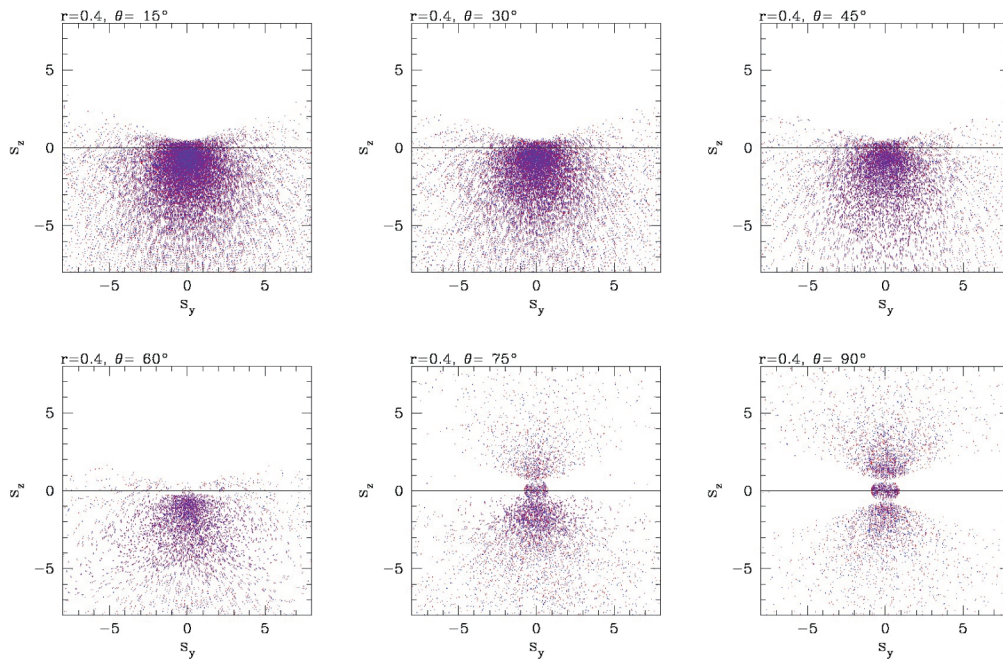


図10:スクリーン上の散乱光の位置。  $r=0.4$  の場合。

図12は扁平率  $r=1.5$  の回転楕円体の場合の散乱光の見える様子である。このような軸方向が長い回転楕円体では、散乱光は縦に伸びた形となって  $s_z$  の最大値は大きくなる。このため、 $\theta \geq 30^\circ$  といった小さい角度から  $s_z > 0$  で虹が形成される。

図13は扁平率  $r=2.0$  の回転楕円体の場合の散乱光の見える様子である。上部の傘のような構造は  $s_y$  方向に広がっている。また、縦の伸びが大きくなっているため、 $\theta \geq 15^\circ$  という  $r=1.5$  と比較してさらに小さい角度から  $s_z > 0$  で散乱光が見られる。

回転楕円体の水滴による虹の形成

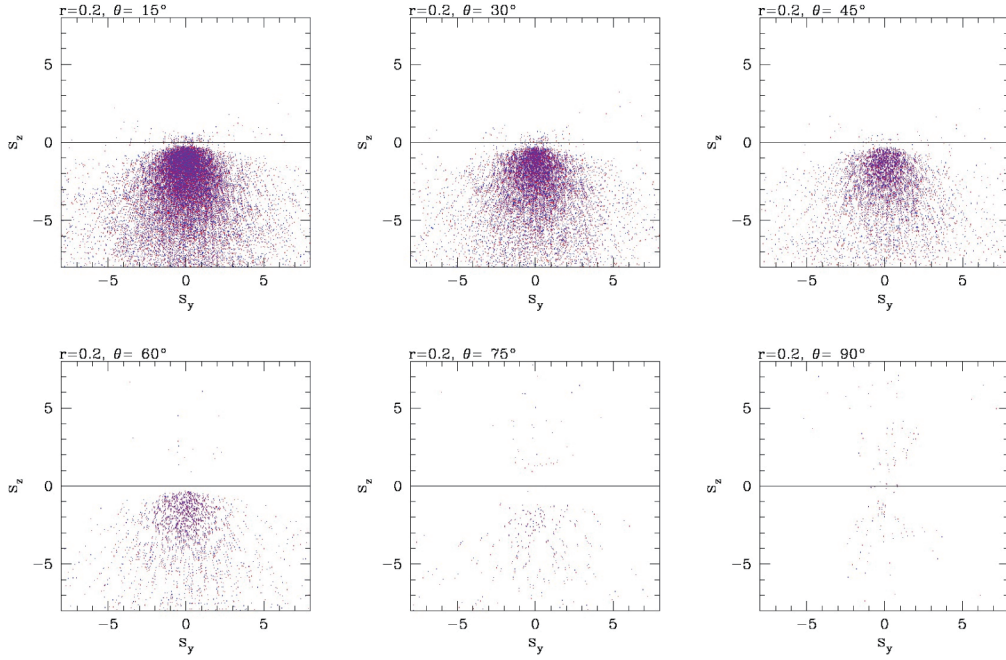


図11:スクリーン上の散乱光の位置。  $r=0.2$  の場合。

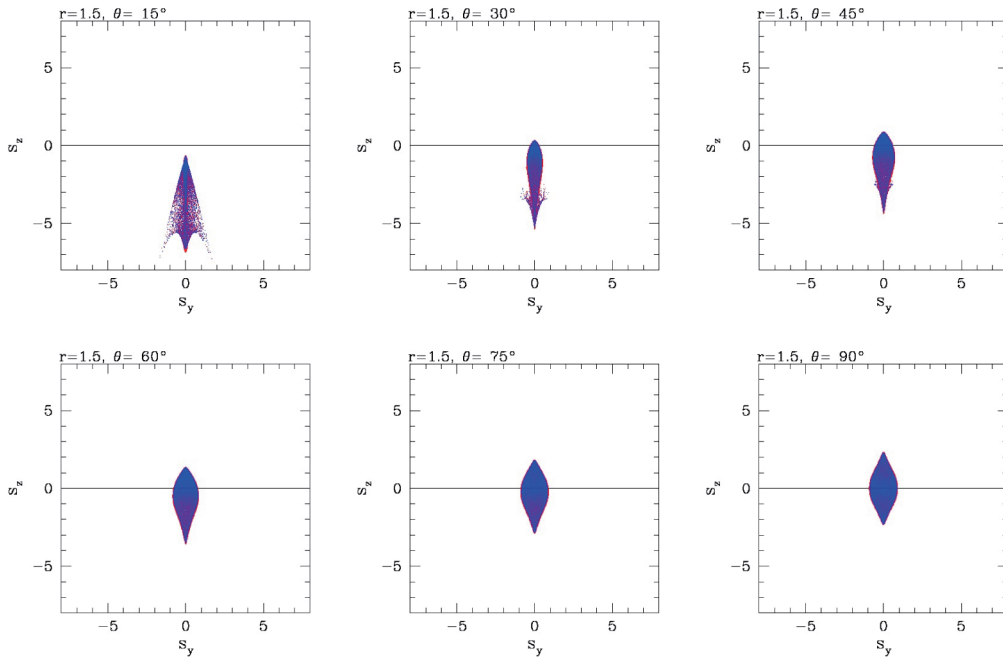


図12:スクリーン上の散乱光の位置。  $r=1.5$  の場合。

図 14 は扁平率  $r = 5.0$  の回転楕円体の場合の散乱光の見える様子である。 $r = 2.0$  で生じていた傘の構造は見られない。このため、 $15^\circ$  では散乱光が集中がなく、虹は形成されていない。しかし、 $30^\circ$  以上では散乱光の集中があり、虹が形成されている。

虹の形成を確認するため、これまで示したスクリーン上の散乱光の位置の図の中で典型的なものを拡大して図 15 に表示する。左上の球体の場合では外側に赤色の散乱光が集中した箇所があり、その少し内側に青色の散乱光が集中した箇所がある。このような各色がそれぞれ異なる箇所に集中して現れると虹として観測される。球体のものと比較して、中央上の  $r = 0.8$  の扁平な散乱体では形成される虹は扁平なものとなっている。右上のさらに扁平度が増したものでは、大きい  $s_y$  でのみ赤色

回転楕円体の水滴による虹の形成

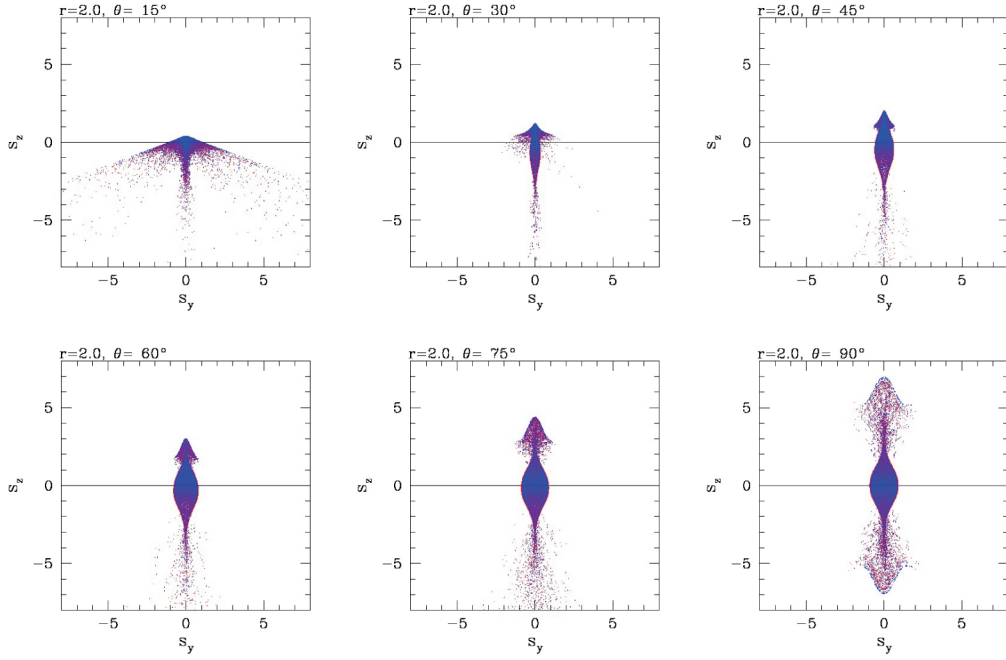


図13:スクリーン上の散乱光の位置。  $r=2.0$  の場合。

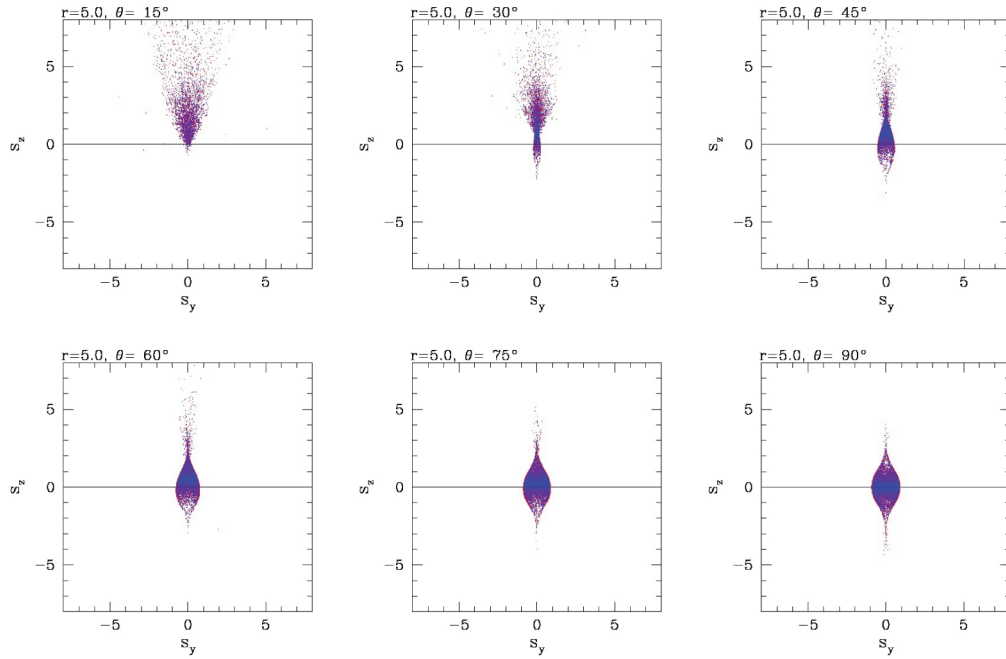


図14:スクリーン上の散乱光の位置。  $r=5.0$  の場合。

が外側に現れる変わった虹が観測される。下の図は扁平率  $r > 1$  の長球によるものである。左下は外に青色の散乱光が集中しているという点が球体の場合と大きく異なる。これは傘状になっている部分である。中央下には傘状に開いた模様となった青色が外側に現れる部分の中に通常の赤色が外側になった虹が見られる。右下は扁平率  $r = 5.0$  の長球によるもので、他より点の数が少ないが上下に長い虹が形成されている。

## 回転楕円体の水滴による虹の形成

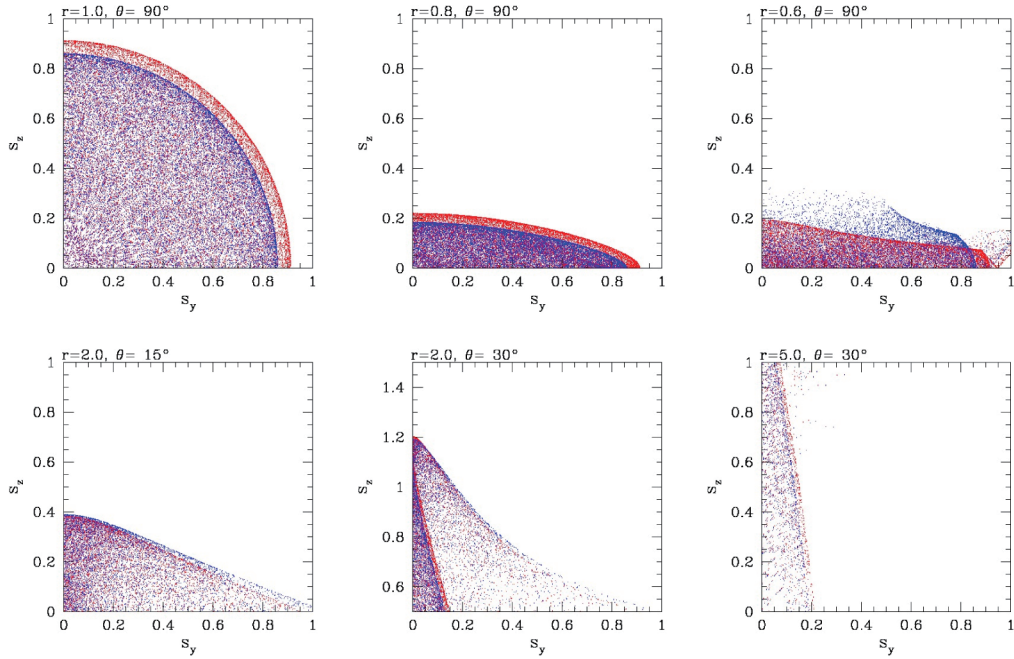


図15:スクリーン上の散乱光の位置の拡大図。中央下の図のみ $s_z$ の範囲を $[0.5, 1.5]$ とした。

## 4 結論

本論文は、回転楕円体によって散乱された光が虹を形成するための扁平率と入射光の向きについての条件を調べたものである。その方法は、次のようなものである。鉛直方向に軸を持った回転楕円体の水滴が観測者の前方にある平面のスクリーンに一様に分布しているとする。このスクリーンに入射した光は赤色と青色の成分を持った平行光線であると、各色の屈折率と乱数によって与えられた水滴への入射点に応じて各色の光は異なる角度に散乱する。そして、観測者に届いた散乱光のスクリーンでの散乱位置をプロットする。その模様が地上の高さより上の領域で赤や青の色がそれぞれ異なる位置に集中しているとき、虹が形成されていると判断する。

調べた回転楕円体の扁平率は、球体  $r = 1.0$ , 扁平な楕円体  $r = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ , 長球  $r = 1.5, 2.0, 5.0$  である。天頂方向に対する入射光のなす角  $\theta$  は、 $\theta = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$  について調べた。虹の形状は楕円体の形状に似通ったもの、すなわち、扁平な楕円体の場合には扁平な虹が、長球の場合には縦に長い虹が形成される傾向が見られた。扁平率の小さい  $r \leq 0.4$  の回転楕円体では虹は形成されなかった。また、 $r = 0.8$  や  $r = 0.6$  では  $\theta = 90^\circ$  という水平方向に入射した場合のみ虹が形成された。この内  $r = 0.6$  のものは色が交錯する部分があった。扁平率の大きい長球では散乱光の分布がスクリーンの上方まで及ぶため、 $s_z > 0$  の条件を満足しやすく、小さい  $\theta$  でも虹が形成された。扁平率  $r = 1.5$  と  $r = 5.0$  では  $\theta \leq 30^\circ$  で、 $r = 2.0$  では傘が開いたような虹が  $\theta = 15^\circ, 30^\circ$  で見られ、そこでは通常と色の配置と異なり、青色成分が赤色成分の外側に現れた。

本論文の計算と描画は CPU : 2.8GHz, memory : 8GB, 64bit の PC を用いて行った。ここで示したすべてのモデルの処理にかかった時間は短く、合計で約 5 分であり、基本的な部分の計算プログラムは十分洗練されていると考えて良い。今回限られたパラメータについてのみの調査となったのは、虹の形成の確認作業を自動化していなかったためである。この部分を自動化することによってより系統的に虹の形成条件を調査することが今後の課題である。

### 参考文献

- [1] 理科年表, 丸善株式会社, 2009.