

# 量計算の式に単位を含めるか

Whether to Include Units in Formulae for Quantity Calculations

伊 藤 雅 貴      山 下 和 之  
ITO Masaki      YAMASHITA Kazuyuki

# 量計算の式に単位を含めるか

## Whether to Include Units in Formulae for Quantity Calculations

伊藤 雅 貴\*      山下 和 之  
ITO Masaki      YAMASHITA Kazuyuki

キーワード：算数・数学，理科，単位，量計算，立式

**要旨：**物理学において物理量は数値と単位の積であると規定されており，量計算を行う上では，単位も式中に表して行うことが多い。それによって，どのような意味の計算を行っているかを明らかにすることができる。一方，算数・数学では式に単位を記すことが一般的に行われていない。本論文では例題や教科書・指導書等の記述に触れながら両者の違いを明らかにし，単位付きで量計算を行うことの是非を検討する。

### 1 背景

全国学力・学習状況調査（平成29年～平成31年）において，計算力に対して文章題を解く能力が不足しているという問題が指摘されている[1]。同調査によると子どもたちは，数学的表現を使って説明することが苦手であり，特に式を立てて説明することが苦手であるという。この問題の対処として，本論文の筆者らは理科で用いられることのある単位付き量計算を算数・数学でも積極的に用いるのが良いと考えた。その根拠は次のように要約される。

- 文章題中の量をそのまま立式に用いることにより，立式に至るまでのハードルを低くすることができる。
- 正確な立式の助けとなる。
- 量の意味を捉える感覚を育てることができる。

これらの点から，量計算において単位付きで計算する方法を単位無しで計算する方法と比較して論じる。

#### 1.1 単位無し量計算

平成29年に告示された学習指導要領解説では，量計算の際の立式について，単位の扱いの記載はない[2]。一方，教科書では，例えば，「 $x \times 3.14 = y(\text{cm})$ 」のように取り扱われており[3]，単位を除いた数値部分のみで立式するように示されている。そのような計算法が教育現場で指導される理由は，次の3点が考えられる。

- 初めての立式では数値のみを記載している。  
小学校1年で初めて式を立てるが，その際には数の演算に集中させ，式を使った表現に慣れさせる指導が行われる。教師用指導書では，「答えには，題意に合わせ助数詞をつけることを約束する。」という記載があることから[4]，計算式では単位を用いないように指導されていることがわかる。一方，指導書で「単位を付けて式に表してもよいことを知らせる」といった記述も見受けられる[5]。
- 算数・数学での単位量の考え方が影響している。

\* 教育実践創成専攻（教職大学院）大学院生

例えば、5.4cmという長さは、1cmという単位長さが5.4個あると考え、 $6.2\text{cm}^2$ であれば、 $1\text{cm}^2$ の単位面積が6.2個あると捉えて、5.4や6.2のみを式に用いるのである。このような考え方は教師用指導書にも「長さをはかり取る活動では『1cmや1mmのいくつ分』という単位量の考え方をまず扱いたい。」という形で記載されている[6]。

- 文字式の処理が中学校の数学で教えられる。

単位付きで、例えば、 $2\text{cm} \times 3\text{cm}$ の計算結果を $6\text{cm}^2$ とするには、 $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$ という文字式の処理が必要であり、その処理が教えられる前の段階にある算数で単位同士の計算を扱うのが適切ではないと考えられるためである。

量計算を単位無しで行うのには、初等教育では上のような理由があると考えられるが、中等教育ではどうであろうか。中学校・高等学校の教科書でもやはり式には単位が入れられていない。これは数学に限らず、理科でも同様である。「物理量＝数値×単位」という記述がある教科書[7]でも単位無しの式が大半であり、他の多くの教科書でも単位無し量計算を行っている<sup>\*1</sup>。式の記述の仕方に小中高で一貫性を持たせるということが理由として考えられるが、その一貫性はかえって学習者の理解の妨げになっていないだろうか。

## 1.2 単位付き量計算

理科年表では、「物理量の値は数値と単位の積として表される。」という文が平成27年版から物理分野の冒頭に記されるようになった[8]。具体的な例として、「重力加速度  $g$  の値は、 $g = 9.8\text{m/s}^2$  のように書く。」という記述もある。このことから、例えば、質量  $m$  の質点に働く重力が  $mg$  であることを用いて質量  $2\text{kg}$  の質点に働く重力は、 $mg = 2\text{kg} \times 9.8\text{m/s}^2 = 19.6\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$  のように、式に量を直接当てはめて求めるのが自然である。もしも、数値部分のみの立式にこだわるならば、 $(m/\text{kg}) \times (g/(\text{m/s}^2)) = 2 \times 9.8 = 19.6$  という計算式を立てなければならない。

大学の物理学教科書で、「自宅から900m離れた駅まで徒歩で10分かかったときの平均の速さはいくらだけか。」という問題に対する例解では、 $900\text{m}/10\text{min} = 90\text{m/min}$ と立式し、秒速に換算するときには、 $1\text{min} = 60\text{s}$ という換算式から $90\text{m/min} = 90\text{m}/60\text{s} = 1.5\text{m/s}$ と求めている[9]。この記載の仕方が他でどの位の割合で用いられているかの調査は未実施であるが、少なくともこの記載方法が大学生にとってはわかりやすいものであると考えられる。

大学1年生に対して次のような実験レポートを課した。

振り子の周期  $T$  とその振り子の糸の長さ  $l$  を測定し、重力加速度の大きさ  $g$  を文献等から調べ、測定値  $T$  と微小振動の周期の理論値  $2\pi\sqrt{l/g}$  と比較せよ。

理論値をどのように計算したかによりレポートは5パターンに分類され、各パターンのレポート数が表1のように得られた。この実験は受講生が自分の工夫で行えるものとしたため、日常生活で用いられるcgs単位系で、 $l = 60\text{cm}$ のように測定された。一方、 $g$  は文献や教科書で用いられるMKSA単位系の  $g = 9.8\text{m/s}^2$  が挙げられた。そこで生じるのは、パターンCのように理論値を  $2\pi\sqrt{60/9.8}$  と計算してしまうことである。この計算値は15.5であり、これを  $T$  の秒単位の数値と比較するのは誤りである。この誤りをする受講生は少なくないことがわかる。これに対して、 $2\pi\sqrt{60\text{cm}/(9.8\text{m/s}^2)}$  とすれば、 $2\pi\sqrt{60/9.8} \times \sqrt{\text{cm}/(\text{m/s}^2)} = 2\pi\sqrt{60/9.8} \times \sqrt{1/100 \times \text{m}/(\text{m/s}^2)} = 2\pi\sqrt{60/9.8}/10\text{s} = 1.55\text{s}$  と理論

<sup>\*1</sup> 化学基礎の教科書では単位付き量計算が一般的である。

表1 周期の理論値の計算

パターン	内容	レポート数
A	正しい立式： $2\pi\sqrt{l/g} = 2\pi\sqrt{0.6\text{ m}/(9.8\text{ m/s}^2)} = 1.55\text{ s}$	19
B	式に単位が無い等の不備があるが、計算結果の数値は正しい	58
C	長さの単位が統一されていないため、計算結果の数値が正しくない	33
D	式に適用する量が間違っている	13
E	記述無し	7

値を正しく求められ、 $T$ と比較することが可能となる。しかし、このような測定値や文献値をそのまま用いてcmとmの長さの単位を混在させた立式から記したレポートは皆無であった。正しい数値が求められたレポートは、パターンAとBであり、両者ともに立式前に長さをm単位に統一していた。パターンBは $2\pi\sqrt{0.6/9.8} = 1.55\text{ s}$ のように式の中に単位を記していないという等式の不備があったものである。そもそも、受講生が扱える振り子の周期はせいぜい数秒以下であるはずで、15.5といった数値に違和感を持つべきである。量的感覚が備わっていれば、計算の妥当性に気づくはずである。そのような量的感覚を育てることを「単位無し量計算」は阻害してはいないだろうか。また、パターンCやDの少なくない誤答は、単位付きの量計算を身につけさせることによって正答に導くことができるのではないだろうか。

理科における量計算の方法等について、有賀氏は単位の扱い方が統一されていないという点を問題視し、国際単位系の規則に従うべきであると指摘している[10]。また、変数の文字には単位を含んでいると考えた上で、文中での変数の扱い方、表記の仕方についても論じている。

以上より、単位付きの式が立式を容易にし、その式の意味を理解したり説明したりするのに役立つものであることから、初等中等教育においても用いるのが良いと考えられる。以下では、量計算を単位付きで行う手順を第2節で述べ、第3節ではこの計算法の利点、第4節ではそれを行う上での問題点とその解消法について述べる。

## 2 量計算の手順

量計算を単位を付して行う手順は次のようなものである。

### 1. 量を用いた立式

立式する際には問題文中の量をそのまま用いる。単位の換算はこのときまだ行わない。量は数値と単位の積であることから、立式されたものには単位も記載されているようにする。なお、この立式に先立ち、次のような処理を施しておく。

#### ●「単位AあたりB」の処理

設定された問題の中で「AあたりB」という内容があれば、「 $B/A$ 」とみなす。例えば、「1個が10円」は「1個あたり10円」と考え、ここで与えられた量は $10\text{ 円}/(1\text{ 個})$ とみなす。また、「10分間で600 m」では、「10分あたり600 m」とし、 $600\text{ m}/(10\text{ 分})$ とする。

### 2. 数値と単位の分離

式の中の数値と単位を分離する。 $600\text{ m}/(10\text{ 分})$ は、 $(600/10) \times (\text{m}/\text{分})$ とする。加算と減算では同じ種類の量同士で演算が行われなければならない。同じ単位での加算・減算であれば、単位を1箇所にまとめるという因数分解に相当する処理を行う。例えば、 $2\text{ kg} + 0.3\text{ kg}$ という立

式がされていれば、 $(2 + 0.3) \text{ kg}$ とまとめる。同じ種類の量でも異なる単位での加算・減算であれば、単位の換算処理を行うまでそのままにする。例えば、 $2 \text{ kg} + 300 \text{ g}$ は異なる単位によって表された量の加算であるため、この段階で単位をまとめることはできない。

### 3. 単位の換算

同種の量の単位を1つに揃える。そのために単位間の換算式を用意し、計算すべき式に代入する。そして、再び数値と単位の分離を行う。換算式は、例えば、 $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ や $1 \text{ 分} = 60 \text{ 秒}$ 、 $1 \text{ ダース} = 12 \text{ 個}$ 等である。 $300 \text{ g}$ を $\text{kg}$ 単位に換算するには、 $1 \text{ g} = (1/1000) \text{ kg}$ という換算式を用意し、計算すべき式を $300 \text{ g} = 300 \times 1 \text{ g}$ とした上で、 $1 \text{ g}$ に換算式を代入し、 $300 \times (1/1000) \text{ kg}$ とする。

### 4. 単位同士の演算

単位に指数がついたものは、指数を取り除いたものを基本単位とし、基本単位を1つの文字とみなす。そして、文字式計算の演算規則に従って単位部分の計算を行う。同じ単位同士の除算の結果は1とする。同じ基本単位同士の $n$ 個の積はその基本単位の $n$ 乗とする。例えば、 $\text{円}/\text{個} \times \text{個} = \text{円}$ や、 $\text{m} \times \text{m} = \text{m}^2$ 、 $\text{cm}^2 \times \text{cm} = \text{cm}^3$ 等である。

### 5. 数値部分の計算

単位と分離された数値部分の計算をする。

なお、単位無し計算は、上の手順と比較すると、手順2と3, 4を別途処理した上で、数値のみの立式を行って計算することに相当する。

## 3 単位付き量計算の利点

量計算を行う式の中に単位を付けておくことにより、次のような利点があると考えられる。ここでは、例題を示しながら利点について論じる。

### 3.1 問題中の量のそのままの利用

問題文では、量が数値と単位で与えられ、それらの間の演算が直接的あるいは間接的に言葉で指示されている。これを式に翻訳する作業が立式である。この作業を機械的に行うことによって、立式を正確に滞りなく行うことができる。例えば、「質量 $2 \text{ kg}$ の物に質量 $200 \text{ g}$ の物を加えた」という記述が問題文にあれば、「加えた」を「+」という演算子に置き換え、与えられた量をその演算子で結合して、 $2 \text{ kg} + 200 \text{ g}$ という式が立てられる。単位の換算はその後で行えばよい。

単位付きの計算式は、授業が行われる現場での実際的なこととしても有益である。学習者は教師の説明に常に集中しているわけではない。立式までの説明を聞き漏らしていても、板書に残っている式からどのような翻訳が行われたかを知ることができる。上の例で、数値部分の $2 + 0.2$ という式だけが板書されていて、それまでの説明を聞き漏らしていると、この $0.2$ は何?という疑問が残る。

同じ次元の変数が複数あり、それらが異なる単位によって表されるときに求められる量を一つの式に表すことができる。例えば、断面が円で半径 $r$ が一定の針金の長さが $l$ であるとき、その体積 $V$ は、 $V = \pi r^2 l$ と表される。半径は $\text{mm}$ 単位で測られ、長さは $\text{m}$ 単位で測られることが通常であろう。そこで、単位付き量計算では

$$V = \pi \left( \frac{r}{1 \text{ mm}} \right)^2 \left( \frac{l}{1 \text{ m}} \right) \times (1 \text{ mm})^2 \times (1 \text{ m}) = \left( \frac{r}{1 \text{ mm}} \right)^2 \left( \frac{l}{1 \text{ m}} \right) \times \pi \text{ cm}^3 \quad (1)$$

という式を立てることができ、 $r$ や $l$ の様々な値に対して $V$ は容易に求めることができる。この例で



は、典型的な量についての感覚も身につけられる。

問題を解いて得られた答えが正しいかどうかを検証する作業は、答えに責任を持つという意味で重要であるが、この作業を行うことがあまり指導されていないというのが実情のようである。これは、教える内容の多さから省略されがちであるためと考えられる。単位付きの量計算式を立てて計算を行わせることにより、立式やその後の計算処理に間違いがないかを確認しやすい。

### 3.2 計算している量のわかりやすさ

算数・数学、また理科でも比の考え方をを用いることがよく行われる。例えば、「10個で20円のは4000個で何円か。」という問題では、「求める代金を  $x$  円とおき、 $x : 4000 = 20 : 10$  により、 $x = 8000$ 。答 8000 円」という例解が示される。しかし、ここには、式に単位をつけないこと以外に、それに付随した重大な問題が含まれている。比の  $x : 4000$  と  $20 : 10$  を等号で結合できる根拠が、問題文にも例解にも示されていないことである。算数・数学は、論理的に完全でなければならず、暗黙の了解を求めてはいけない。「単価が等しい」という文言が、本来は問題文にあるべきで、それが無いときには例解ではそれを仮定して等式を表すと説明すべきである。また、 $x : 4000$  や  $20 : 10$  が単価であることをわかるようにするために、これらの式は  $x$  円 : 4000 個や 20 円 : 10 個のように単位をつけて表して、単位部分が円/個であって、両者の単価が等しいことを等式で表すようにすべきである。

物理学では次の例が挙げられる。「周波数が170Hzの音の波長が2mであった。音速が一定であるとして、周波数が1700Hzの音の波長を求めよ。」という問題では、「音速が一定である」という条件が不可欠である。音速は媒質の種類や温度等によって異なるため、この条件が示されていないければ、問題としては不適切となる。さて、この問題を数値の比だけで解くと、次のような誤答に至ることがある。「求める波長を  $x$  m とすると、 $x : 1700 = 2 : 170$ 、ゆえに  $x = 20$ 。答 20 m」である。この答案の比を用いた等式には根拠が無い。この比に用いられている量を単位付きで表したならば、 $2\text{ m} : 170\text{ Hz} = (2/170) \times (\text{m}/\text{Hz})$  であり、 $1\text{ Hz} = 1\text{ s}^{-1}$  であることから、これは  $\text{m} \cdot \text{s}$  の単位で表された量であることがわかる。この等式の左辺も同様である。しかし、 $\text{m} \cdot \text{s}$  という単位の量については問題文で述べられていないため、両辺を等式で結合することはできない。正しくは、 $x\text{ m} : 1/(1700\text{ Hz}) = 2\text{ m} : 1/(170\text{ Hz})$  としなければならない。この等式の両辺はともに  $\text{m/s}$  という単位を持つことから、「音速が一定である」という条件文に基づいて等号で結合することができる。このように、立式における等号の意味、すなわち、何が等しいのかを明確にするためには、単位付きで立式を行うのが良い。

また、「100 円玉と 500 円玉が合わせて 50 枚ある。合計金額が 9000 円の時、100 円玉と 500 円玉はそれぞれ何枚か。」のような連立方程式で解く問題では、単位を付けることにより同じ次元を持つ量が明確になり、立式しやすくなる。100 円玉が  $x$  枚、500 円玉が  $y$  枚とすると、

$$\begin{cases} x \text{ 枚} + y \text{ 枚} = 50 \text{ 枚} \\ 100 \text{ 円/枚} \times x \text{ 枚} + 500 \text{ 円/枚} \times y \text{ 枚} = 9000 \text{ 円} \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

となり、正しく連立されていることを確かめながら立式することができる<sup>\*2</sup>。その後で、数値部分のみを抽出して

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ 100x + 500y = 9000 \end{cases} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \end{matrix}$$

<sup>\*2</sup> ここでは単位を強調するために、文字に単位を含めていない。

と整理してから処理すれば良い。この例では、通常は式(4)と(5)を最初の立式とするのであろう。そのような正しい式を得るまでが、文章題を苦手とする学習者の課題である。文章題に慣れない内は、単なるミスや考え違いによって $100x + 500y = 50$ という式を書いてしまうことがある。このような誤りは単位付きの式では、左辺が金額を表し、右辺が枚数を表すことが明らかなので、生じないはずである。

上記のように、単位を意識しながら量計算を行うことを通じて、加算・減算記号や等号・不等号で結合・比較される項が同じ種類の量でなければならないという規則を身につけ、量を計算することの意味を捉える感覚が養われる。

単位付き量計算を行うことは、学習者の理解を助ける以外の利点もある。例えば、「半径2cmの円の面積を求めなさい。」という問題が与えられたとする。すると、学習者がこの問題を単位無し量計算で解き、

$$2 \times 2 \times \pi = 4\pi \quad (6)$$

と書いていたとする。これでは面積を求める式を使ったのか、円周を求める式を使ったのかが判別できず、半径2cmで問題を作ることが適切でなくなってしまう。一方、単位付き量計算では

$$2\text{cm} \times 2\text{cm} \times \pi = 4\pi\text{cm}^2 \quad (7)$$

と書いていけば正解で、

$$2\text{cm} \times 2 \times \pi = 4\pi\text{cm} \quad (8)$$

と書いていけば不正解であると判断でき、式の適用が正しいかを判別する上で半径2cmで出題することと支障がない。このように、作問の際に用いる数値の制限に注意する必要性が生じない。

密度や速度といった内包量に関する量計算の考え方を明確にすることもできる。密度の例であれば、 $2\text{g}/\text{cm}^3 + 3\text{g}/\text{cm}^3$ という計算式が挙げられる。この式は内包量同士の加法演算として算数・数学では論外とされるかもしれない。しかし、この式が妥当であるかは、この単位付き計算においては検証可能である。上式は、

$$\frac{2\text{g}}{1\text{cm}^3} + \frac{3\text{g}}{1\text{cm}^3} = \frac{2\text{g} + 3\text{g}}{1\text{cm}^3} \quad (9)$$

であり、この式は、体積 $1\text{cm}^3$ 中に質量2gの物質があり、それに体積 $1\text{cm}^3$ 中にある質量3gの物質を加えて体積を圧縮して $1\text{cm}^3$ に整えた状況での密度を計算したという意味である。算数・数学でこの式を論外とするには、このような状況が想定されていないことが必要であるが、様々な状況で量を取り扱う理科の立場からすると、問題文の中でそのような状況を除外できているかは気になるところである。

また、速度の例で、 $20\text{m/s} + 30\text{m/s}$ という計算式を検討するのは興味深い。この式は、やはり内包量同士の加法演算として、算数・数学では拒否反応が示されるであろう。しかし、この式は

秒速20mで走行する電車から秒速30mのボールが電車の走行前方に投射されたときに、地上

で静止している観測者が測定したこのボールの速度はどれだけか。

という問題に対するものとして、高校までに教えられるニュートン力学では正しい式であり、上式は

$$\frac{20 \text{ m}}{1 \text{ s}} + \frac{30 \text{ m}}{1 \text{ s}} = \frac{20 \text{ m} + 30 \text{ m}}{1 \text{ s}} \quad (10)$$

と、電車の中にいる観測者Aと地上にいる観測者Bで同じ時間の間にボールがどれだけ移動したかを表したものとして認められるものである。一方、相対性理論によると、この式では厳密には正しい答えに至らない。そのポイントは、AとBの測定した時間が一致しないことであるが、このような日常的な速さでは近似的に正しいとされる。この例であれば、厳密な値との誤差は  $0.3 \times 10^{-12} \text{ m/s}$  程度である。このような誤差が生じること、すなわち、異なる観測者で時間の流れ方が異なるということを想定して速度の加算を禁じているのであれば、算数・数学は達観していると言えるが、果たしてどうであろうか。

このように、内包量か外延量かという性質は量そのものにあるのではなく、問題の状況によって判断すべきものであるということを単位付きの計算法によって理解・検証することが可能である。

### 3.3 矛盾のない式の記述

式に矛盾があってはいけないのは当然であるが、例えば、移動した距離を求める問題で解答を簡略化して  $60 \times 7 = 420 \text{ m}$  と記すことがある。左辺は無次元の数値であり、右辺は数値と単位による長さの量である。これら両辺を等号で結合することはできないため、誤った記法である。等号は、算数・数学において最も重要な記号であると考えられるが、便宜的であったとしても、等式の意味を誤った状態で教えるのは良くない。正しくは、 $60 \text{ m/分} \times 7 \text{ 分} = 420 \text{ m}$  とすべきであり、それによって等式に矛盾は生じない。

高校で教えられるベクトルについては、次のような例が挙げられる。ベクトル  $\vec{a}$  の始点と終点を結んだ線分の長さが  $5 \text{ cm}$  であれば、 $|\vec{a}| = 5 \text{ cm}$  というのが正しい式である。これを導出するのに、 $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ cm}$  と記されていれば、この式の2つの等号は量的に正確に用いられていない。推奨する正しい記述は、 $|\vec{a}| = \sqrt{(3 \text{ cm})^2 + (4 \text{ cm})^2} = 5 \text{ cm}$  であるが、簡略化したいのであれば、 $|\vec{a}|/\text{cm} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  が可能である。

さらに、高校でも触れられるベクトルの外積では、単位付きの計算を行わなければ、次のような矛盾が生じる。右手系の直交座標系の座標軸  $x, y, z$  が与えられ、 $x$  軸正方向を向いたベクトル  $\vec{a}$  と  $y$  軸正方向を向いたベクトル  $\vec{b}$  に対して得られる外積ベクトル  $\vec{a} \times \vec{b}$  は  $z$  軸の正方向を向き、大きさは  $|\vec{a}||\vec{b}|$  に等しい。ここで、 $\vec{a}$  の長さが  $20 \text{ cm}$  で、 $\vec{b}$  の長さが  $30 \text{ cm}$  であったとき、長さが  $600 \text{ cm}$  の  $z$  軸正方向を向いたベクトル  $\vec{c}$  について、 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  が成り立つと言えるだろうか。ベクトルの向きは等しい。一方、大きさはどうか。数値のみを計算すると、 $20 \times 30 = 600$  で等しい。そのため、その等式が成り立つとしそうである。しかし、 $\vec{a}$  や  $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  を  $\text{m}$  の単位で長さを表したとき、その数値部分の計算は、 $0.2 \times 0.3 = 0.06$  であり、 $\vec{c}$  の  $\text{m}$  単位で換算された数値  $6$  とは異なる。そもそも

$\vec{a} \times \vec{b}$  と  $\vec{c}$  は次元の異なる量であって比較することができない。この場合の  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  は  $600 \text{ cm}^2$  であり、 $0.06 \text{ m}^2$  である。2つのベクトルの外積は、それらのベクトルによって作られる平行四辺形の面積をその大きさとしており、元のベクトルと外積ベクトルは量的に異なるものである。計算式に単位を含めず数値のみで処理すると、元のベクトルと外積ベクトルとで量に違いがあることが不明となる。このように、計算される量がどのような意味を持つかは、単位付きの式によって説明ができ、そして養われるものであると考えられる。



#### 4 単位付き量計算の問題点と解消法

単位付きで量計算を行う場合に生じる問題点や注意点を挙げ、それらの解消法について論じる。

##### 1. 文字式の扱いに慣れている必要がある。

単位を文字式として処理するには、中学校の数学で文字式を学んだ後であればスムーズな移行が可能である。この段階で移行すると、文字式の処理も実践的に学習者に定着することができるであろう。

昨今の小学生は、電子機器を用いたゲームを身近なものとして遊びに取り入れて経験している。電子機器でのゲームのルールは、人為的に作られたものであり自分では変更できないものである。それに則ってゲームを行うことができることから、与えられたルールに基づいて処理することは小学生にも十分に可能である。単位付きで量計算を行う計算法をルールとして学ぶことは、教師等の大人が、小学生にはできないと決めつけてしまう程にできないことではないと考えられる。

##### 2. 数値と単位が入り混じって式が複雑に見えてしまう。

例えば、「圧力が $1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$ 、体積が $5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ の理想気体があり、 $1.0 \text{ mol}$ の分子が存在しているとき、温度 $T$ はいくらか。ただし、気体定数は $8.3 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$ とする。」という問題に対して、これを解く式は

$$T = \frac{1.0 \times 10^5 \text{ Pa} \times 5.6 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{1.0 \text{ mol} \times 8.3 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})} \quad (11)$$

であり、数値と単位が混在して複雑に見えてしまう。これに対しては、第2節の手順2に従い、数値と単位を分離し、以下のように変形してから計算すると複雑さが解消される。

$$T = \frac{1.0 \times 10^5 \times 5.6 \times 10^{-3}}{1.0 \times 8.3} \times \frac{\text{Pa} \cdot \text{m}^3}{\text{mol} \cdot \text{J}/(\text{mol} \cdot \text{K})} \quad (12)$$

また、単位付きとするのは立式段階のみ、もしくは分離段階までとし、単位を強調したいときは

$$T = \frac{\frac{1.0 \times 10^5 \text{ [Pa]} \times 5.6 \times 10^{-3} \text{ [m}^3\text{]}}{1.0 \times 8.3}}{\frac{\text{[mol]} \text{ [J}/(\text{mol} \cdot \text{K})]}} \quad (13)$$

のように記述すると良い。単位の計算を $1 \text{ Pa} = 1 \text{ kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ と $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ という換算式によって行うことによって、正しく $\text{K}$ 単位の温度を求めることができる。最初は複雑に見えるものも、このような手順を踏むことを経験することによって、複雑さを感じなくなるであろう。

##### 3. 約分を学ばないと包含除で単位が扱うことができない。

小学校3年では、「50個のリンゴを1人5個ずつ分けると何人に分けられますか。」といった包含除の問題が扱われる。これを単位付きで立式して計算すると

$$50 \text{ 個} \div 5 \text{ 個/人} = 10 \text{ 人} \quad (14)$$

となる。しかし、約分は小学校5年で学習するため、 $\text{個}/(\text{個}/\text{人}) = \text{人}$ という単位計算の部分を処理できない。それゆえ、単位付き量計算は小学校5年で約分を学習した後に取り入れ、それからは継続して単位付き量計算を用いると良いと考えられる。

#### 4. 問題の意味を理解しなくても形式的に立式できてしまう。

例えば、「体積  $10\text{ cm}^3$  で、質量  $90\text{ g}$  の物体がある。密度は何  $\text{g/cm}^3$  か。」という問題が与えられたとする。このような問題では、単位計算に慣れると問題文からどのような立式をすべきかが推測されてしまい、密度という概念を理解しているかを判別することができない。これは単位無し量計算を用いていても起きることであるが、単位付き量計算を導入することによってこの現象が増加すると考えられる。解決法としては、問題で答えの単位を指定しないように「この物体の密度を求めよ。」とすることが考えられる。

以上のように、単位付き量計算の導入に伴う問題は指導上の工夫により、概ね解消できると考えられる。授業の実践当初は教師も抵抗を感じるかもしれないが、多くの利点を伴うため、導入を検討するに値するのではないだろうか。

#### 5 まとめ

式には数値しか用いないということが算数・数学の教育の上で是が非とも必要とされるものであるならば、その論を尊重したいと筆者らは考えるが、少なくとも初等教育の数の演算を量計算に適用して数の演算に慣れさせるという目的が達せられた時点より後では、その是が非でもということが筆者らには見つけられない。小学校5年での約分や中学校での文字式を学ぶタイミングが単位付き計算のボトルネックになっているとしても、単位計算のルールを教えることは、「題意により」というフレーズを教えるのと大差ないと考えられる。

算数・数学と理科は量計算という点で密接な関わりを持っている。理科では量を大切にする一方で、算数・数学では数を大切にするという違いがあるように理科を専門とする筆者らからは感じられる。例えば、正しい答えが  $52\text{ cm}$  であったときに、 $42\text{ cm}$  という答案Aと  $52\text{ g}$  という答案Bにそれぞれ部分点を与えるとしたら、算数・数学と理科では計算を間違ったか単位を間違えたかの重要性からおそらく異なるものであろう。初等段階では、数の演算を正しく行うことが求められ、そのための道具として、日常生活の中での量計算を題材にするのは、適切であると考えられる。しかし、分数の約分や文字式の処理を学んだ後には、それらの意味を継承する必要がどれだけあるのだろうか。学習が進むにつれて、題材は具体的事象から抽象的事象に変わっていく。その中で、単位を付けて量の次元を明らかにしながら計算することは重要性を増していくのではないだろうか。学習者が理解を深めるため、正確な量計算が行われるために単位付き量計算を学校で学ぶべきではないだろうか。ただし、次のような点には注意する必要がある。筆者らは量計算を単位を付けた式で行うことが望ましいと考えるが、算数・数学の主流は教科書を見る限り、式は数値のみで表さなければならないとするものである。そのため、単位を付けた式を指導していない採点者による試験では、答案に単位を付けた式を書くこと減点されるかもしれない。したがって、量計算を行うには、単位付きの計算式は量計算の考え方を整理するまでのものとし、数値部分のみを抽出した式をもって算数・数学における立式とするのが、現時点では無難であると考えられる。

算数・数学が好きと感じる理由には、ルールに従って計算を行うと正しい結果が得られるという、問題から答えまでのストレートな経路の理解が多く挙げられるであろう。そのような感覚を持つ子どもたちでも文章題を解くのが苦手と感じるのは、立式までの段階に不安を持つからであろう。その不安を払拭するには、量計算で問題文中の量を単位付きで用いて立式させることが有効で、単位部分の計算がルール上に付加されるだけであることを理解させれば十分であると考えられる。

学校を始めとしたあらゆる学習場面で単位付き量計算を行うことにより、量の意味を捉える感覚を養うことができる。そのためには、理科だけでなく算数・数学でも単位付き量計算を行い、一貫性を

持った学習が必要であると考えられる。単位付き量計算を通して量の意味が捉えられるようになれば、一度は立式を間違ったとしても両辺の不整合から間違いに気付くことができ、算数・数学の学力調査で課題となっている式を立てて説明する能力の向上に繋がるであろう。長年続けてきた指導を変更するのは容易ではないが、式を立てて説明する能力の向上の手段として単位付き量計算が早い段階から導入されることを強く推奨する。

#### 参考文献

- [1] 「調査問題・調査結果：文部科学省」,  
URL [https://www.mext.go.jp/a\\_menu/shotou/gakuryoku-chousa/sonota/1347088.htm](https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/gakuryoku-chousa/sonota/1347088.htm)
- [2] 文部科学省, 「小学校学習指導要領（平成29年告示）解説算数編」, 2017
- [3] 東京書籍, 「新しい算数6上」, 2011, p. 19
- [4] 東京書籍, 「新しい算数1教師用指導書指導編」, 2011, p. 63
- [5] 東京書籍, 「新しい算数2上教師用指導書指導編」, 2011, p. 76
- [6] 東京書籍, 「新しい算数2上教師用指導書研究編」, 2011, p. 153
- [7] 第一学習社, 「物理基礎」, 2018, p. 5
- [8] 国立天文台, 「理科年表2020（机上版）」, 2019, 丸善出版, p. 368
- [9] 原康夫, 「物理学入門」, 学術図書出版社, 2005, p. 10
- [10] 有賀哲也, 「高等学校理科教科書における量と単位の扱いにおける問題点, その影響, および改善案について」, 京都大学学術リポジトリ, URL <http://hdl.handle.net/2433/235933>, 2018