

《総説》身近な地学現象の物理：  
なぜ細かい粒子はゆっくり堆積するのか？

A Review on Physics of Familiar Geoscientific Phenomena:  
Why are Fine Grains Deposited Slowly?

福地 龍 郎  
FUKUCHI Tatsuro

# 《総説》身近な地学現象の物理： なぜ細かい粒子はゆっくり堆積するのか？

A Review on Physics of Familiar Geoscientific Phenomena:  
Why are Fine Grains Deposited Slowly?

福地 龍郎<sup>#</sup>  
FUKUCHI Tatsuro

キーワード：地層，級化層理，粘性，粘性抵抗，圧力抵抗，抗力，レイノルズ数，ストークスの法則

**要旨：**身近な地学現象である『なぜ細かい粒子はゆっくり堆積するのか？』を理解するためには、水や空気などの流体の中を落下する粒子に働く力として、重力と浮力の他に、粘性による抗力を考える必要がある。粒子を球体に近似できるとすれば、ストークスの法則により、粒子に働く抗力は、粒子の直径、粘性率及び落下速度に比例する。抗力は落下速度と共に増大し、これら3つの力が釣り合った時に落下速度は一定となり、粒子は一定速度のまま堆積する。この一定速度を終端速度と呼び、3つの力の釣り合いから求めることができる。粒子の終端速度は、粒径の2乗及び粒子と流体の密度差に比例し、粘性率に反比例する。従って、粒子の密度が同じであれば、細かい粒子ほど終端速度は小さくなり、ゆっくり堆積することになる。このことは、水中だけでなく空気中でも成り立つが、空気の粘性率は水の粘性率の約1/100であるので、空気中では粘性の影響が現れにくい。落下させる物体のサイズを極端に違うものにするか、落下させる距離を極端に長くしなければ、終端速度に違いは出にくい。一方、風船が空気中を落下する場合には、風船のサイズが大きい程、風船の密度は空気の密度に近づき、空気との密度差がゼロに近づくために終端速度は小さくなり、ゆっくり落下する。風船の場合、終端速度に与える効果は、サイズよりも空気との密度差の方がずっと大きい。

## 1. はじめに

山梨大学教育学部科学教育コース理科教育系の学部生を対象として、教科専門の地学一般（学部1年生対象）や地球変動学（同2年生対象）の講義を2013年度から担当して、8年が経過した。両講義では、身近な地学現象を題材として取り上げ、それらのメカニズムを理解するために、学生への質問と回答を繰り返す対話形式で授業を行ってきた。本総説のテーマである『なぜ細かい粒子はゆっくり堆積するのか？』に関しては、大雨や洪水の後に川を見に行った時の様子を聞くことから始めるが、近年、大雨や洪水の後に川を見に行った経験がある学生はほとんどいないので、ペットボトルを用いた簡単な実験を行い、洪水時及び洪水後の川の状態を学生に示している（図1）。水と土砂が入ったペットボトルを良く振って台の上に置いて見ると、水の中では様々な粒度（粒径）を持つ粒子が混ざり合い、洪水時の川の様子にコーヒー牛乳色に濁った状態になっている（図1A）。ペットボトルをそのままの状態ですぐ置いて、時間が経過した後に見てみると、透明な水の中に地層が現れる（図1B）。

<sup>#</sup> 山梨大学大学院総合研究部教育学域

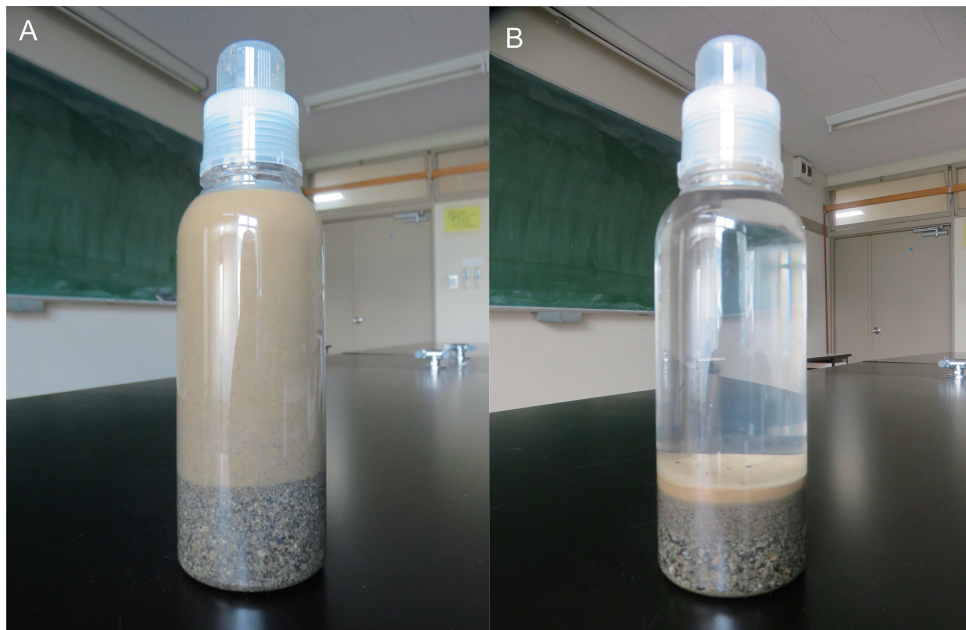


図1 洪水時 (A) と洪水後 (B) の状態

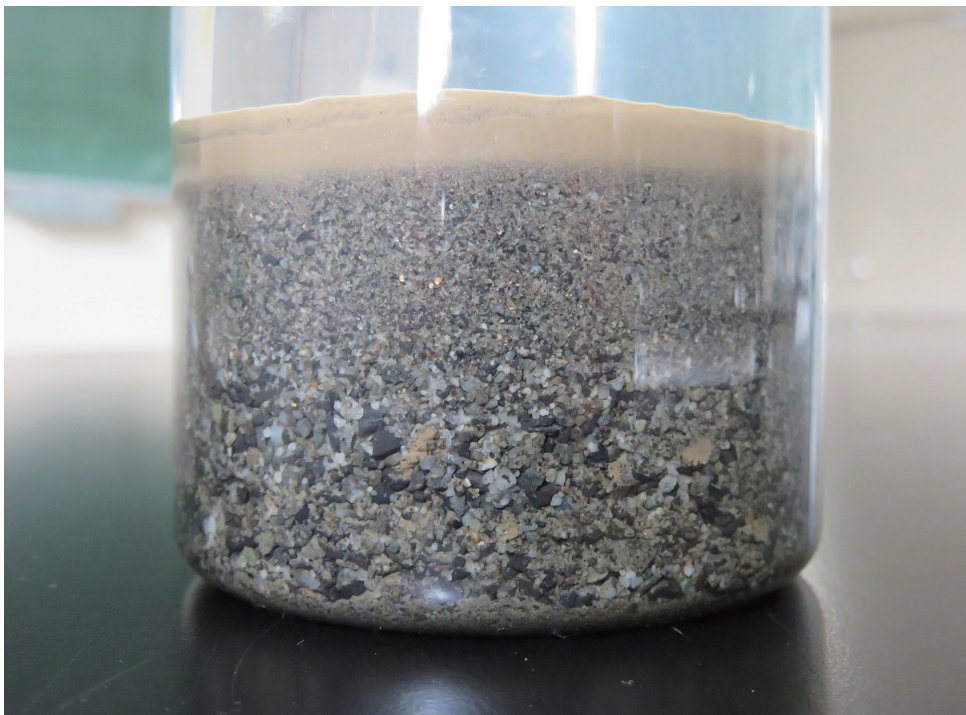


図2 洪水後の地層に見られる級化層理 (graded bedding)

地層の断面を良く見ると、礫や粗い砂が底の方に堆積し、上方に向かうに従って砂の粒子が細かくなって行くことに気づく(図2)。粒子が細かくなって行く現象を級化(grading)と言い、地層に見られる級化構造を地質学では級化層理(graded bedding)と呼んでおり、地層の上下判定に利用している。級化層理という専門用語を知らなくても、この現象を知っている学生は比較的多い。しかし、上方に向かうに従い粒子が細くなる理由については、正しく答えられる学生は少ない。論理的に説明

すると、礫や粗い砂が底の方に堆積しているのは早く落下するからであり、逆に細かい粒子が上方に堆積しているのはゆっくり落下するからである。当たり前のことかも知れないが、粒子の大きさ（粒径）によって落下速度が異なるのである。

ではなぜ、細かい粒子はゆっくり堆積するのか？毎年、理科教育系の学生15名前後が私の講義を受講しているが、この問いに答えられた学生はこれまで一人もいない。2019年度から担当している教職大学院の大学院生にも聞いて見たが、きちんと答えられた院生はいなかった。最も多い誤解答は、『密度が同じだとすれば）粗い粒子は重量が大きいので、重たい方が早く落下する』というものである。この解答を受けて、『それでは、重たい玉と軽い玉をピサの斜塔から同時に落下させたら、どちらが先に落下するか？』と質問すると、皆が『同時である』と答える。物理学でガリレオの落体の法則を習っている学生は、物体の重さに関係なく落下速度は同じになることを知っているからである。但し、落体の法則は、物体の大きさや空気の粘性を考えない場合に成り立つ。さらに、『大きな風船と小さな風船をピサの斜塔から同時に落下させたら、どちらが先に落下するか？』と質問すると、『同時である』と答える者、水中の粒子と同様に『大きな風船』と答える者、空気抵抗が小さい『小さな風船』と答える者が現れ、この頃にはもう何が何だか分からない状態に陥る。中には、『水中と空気中では、物体の落下の仕方が違う』と言う者まで現れる。水中でも空気中でも、物体が落下する現象は同じ物理（physics）で説明され、水に沈まない風船は別にして、細かい粒子は水中でも空気中でもゆっくり落下する。ここでいう物理とは、『物の理（ことわり）』、すなわち『論理（logic）』のことである。

今回、このテーマを教育学部紀要に書き残そうと思った理由の一つは、将来理科の教員になろうとしている教育学部の学生や教職大学院の院生が、身近な地学現象に対して間違った理解をしていることに不安を抱いたからである。それに加えて、学生、教員を問わず、『地学は暗記科目で他の理系科目に比べて簡単だ』という声をしばしば耳にするが、こうした声にならざるに少なからず反発を覚えたからである。『地学が簡単』かどうかはともかく、『地学が暗記科目である』というのは高校の受験指導が影響している。ほとんどの理系の学生は高校生時代に地学を履修しておらず、地学を履修する多くは文系の学生であり、しかも教科書の中の用語を覚えるだけで事足りると多くの人が思っている。しかし、地学は、暗記科目ではなく、地球の理（ことわり）を探求する『論理学（logic）』なのである。地学の一分野である地質学は英語でgeologyというが、語尾に-logyと付いている学問は全て論理学である。古生物学（paleontology）、岩石学（petrology）、鉱物学（mineralogy）、地震学（seismology）、気象学（meteorology）、気候学（climatology）、地形学（geomorphology）、宇宙論（cosmology）など、地学に含まれる多くの分野には、-logyが付いており、それ故、論理（logic）を重視している。もちろん、地学は理科（science）の一分野なので、理科の根本原理である物理（physics）に基づいた論理学である。また、物理を客観的に記述する言語は、他の理系科目と同様、数学（数式）である。ここでは、特に断らない限り、液体や気体を2つまとめて流体と呼び、流体の粘性に注目して、流体中を粒子が落下する現象の物理について考える。

## II. ペットボトルの中の地層が語ること

粒子が堆積する現象の物理を考える前に、ペットボトルの中の地層は色々なことを我々に教えてくれるので、そのことについて触れておきたい。図1Bで示した洪水後の状態を見ると、水の中に堆積している地層の表層には非常に細かい粒子からなる粘土層が堆積している（図2）。粘土層の存在は、過去にその地域で洪水が発生したことを暗示している。日本各地に、焼物の陶器の産地が知られているが、萩焼、備前焼、信楽焼、唐津焼など、多くの陶器の原料である陶土は、過去に発生した洪水時などに運ばれた土砂が堆積して形成された粘土がその起源である（柿谷・伊石、1973；陣内、1974；





図3 ペットボトルの中に形成された盆地の平坦面

神谷・須藤，2001；2005；勝木，2015)。山梨県の名産品である萩焼で言えば，萩焼の原料の陶土は，山口県防府市大道地域に広範囲に産出する粘土（大道粘土）であり，元々は防府花崗岩という花崗岩体が風化してマサ化したものが洪水時に堆積して形成されたものである。この地域では，2009年7月の山口県豪雨により大規模な土石流災害が発生しており，マサ土を含む土石流が特養ホームなどに流れ込み，水が引いた後には，ペットボトルの中で見られたような粘土層が形成されていた（山本・他，2011）。大道粘土のような厚い粘土層は，大量の土砂が大量の水と共に流れて来ないと形成されないで，この地域は将来再び洪水が発生するリスクが高いと言える。

また，ペットボトルの水の中の粘土層はほぼ水平に堆積しており，このままペットボトルの水が抜けて無くなると，周りをプラスチックで囲まれたほぼ平らな陸地が出現するが，これは正に山々に囲まれた盆地に他ならない（図3）。甲府盆地を例にすれば，盆地の西側と東側から釜無川と笛吹川がそれぞれ流れ込み，盆地の南側で合流して富士川となっているが，これらの河川が集中豪雨の際に氾濫して盆地が水で満たされると一時的に湖沼と化すリスクがある（福地，2020；福地，2021）。集中豪雨が治まり，湖沼の中に流れ込んだ土砂の攪拌が止むと，細かい粒子はゆっくり堆積して平らな面が形成され，水が引くと平らな盆地が現れる。甲府盆地に限らず，盆地の持つ平らな面は，過去に何度となく発生した洪水によって形成されたものであり，日常的に河川によって運ばれる土砂の堆積では平らな面は形成されない。平らな面を残している盆地は，将来的にも洪水が発生するリスクが高いことを示している。

### Ⅲ. 粘性と粘性抵抗

水中を落下する粒子は，水による粘性（viscosity）の影響を受ける。粘性とは粘り気のことであり，水の粘性は，水の分子同士に働く分子間力が抗力（drag）として作用することが原因である（長倉・他編（1999）岩波理化学辞典参照）。粘性を持つ物体を粘性体と言う。例えば，コップの中に入った水を棒でかき混ぜる時には，棒には水の粘性による粘性力（viscous force）又は粘性抵抗（viscous

drag)が生じる。粘性抵抗は摩擦抵抗 (friction drag) とも呼ばれる。かき混ぜる時に棒が受ける粘性抵抗 ( $R_v$ ) は、棒の代表長さ (characteristic reference length;  $D$ ) とかき混ぜる代表速度 (characteristic reference velocity;  $v$ ) に比例し、比例定数を  $\eta$  とすると、

$$R_v = Dv\eta \quad (\text{Eq.1})$$

となる。 $\eta$  は粘性率 (coefficient of viscosity) と呼ばれている。ここで、代表長さとは、流体力学 (fluid mechanics) の分野で使用される用語で、流体の中にある物体を特徴づける代表的長さと流体の代表的速度のことを言うが、コップの中の水は静止しているの、ここではかき混ぜる棒の代表的速度となる。また、物体の形状が立方体であれば、代表長さは辺の長さになり、球体であれば直径となるが、形状が複雑な物体や流体の速度が一様でない場合には、選び方が難しくなる。

Eq.1は、棒が受ける単位面積当たりの粘性抵抗に相当する剪断応力 (shear stress:  $\tau = R_v/A$ ) が速度勾配 (velocity gradient:  $\partial u/\partial y$ ) に比例するというニュートンの粘性法則 (Newton's law of viscosity:  $\tau = \eta \partial u/\partial y$ ) から導き出される。ここで、棒の水との接触面積 ( $A$ ) と速度勾配 ( $\partial u/\partial y$ ) を代表長さ ( $D$ ) と代表速度 ( $v$ ) を用いて表すと、 $A = D^2$  及び  $\partial u/\partial y = v/D$  となり、 $\tau = R_v/D^2 = \eta \partial u/\partial y = \eta v/D$  より Eq.1 が得られる。Eq.1 から、棒の長さが短ければ、粘性抵抗は小さく、棒の長さが長ければ、粘性抵抗は大きくなるのが分かる。また、水を速くかき混ぜると、棒は強い粘性抵抗を受け、ゆっくりかき混ぜると粘性抵抗は小さくなることを教えてくれる。

一方、粘性率はその液体に固有の値であり、粘性率が大きい液体ほど粘性 (粘り気) は強くなり、粘性による粘性抵抗 (摩擦抵抗) は大きくなる。溶岩で言えば、粘性 (率) が低い玄武岩質マグマの溶岩はサラサラと流れるのに対して、粘性 (率) が高い安山岩質マグマやデイサイト質マグマの溶岩は塊がコロコロ転がるように流れる。火山噴火の際も、粘性 (率) が低い玄武岩質マグマでは割れ目から溶岩が水の様にバシャバシャと吹き出し、噴煙はあまり高く上がらないので、噴火自体は比較的穏やかである。これに対して、粘性 (率) が高いマグマでは爆発的な噴火を引き起こし、噴煙が数千 m から 1 万 m 以上の上空まで到達することがある。粘性 (率) が高いマグマをマグマ溜りから噴出させるには、より大きなエネルギーが必要となるので、結果として噴煙がより上空まで吹き上がるのである。

こうした粘性は、液体だけではなく、空気などの気体にも見られ、気体も粘性体である。岩波理化学辞典によると、水の粘性率が  $1.79 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $0^\circ\text{C}$ ) あるいは  $1.00 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $20^\circ\text{C}$ ) であるのに対して、空気の粘性率は  $1.71 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $0^\circ\text{C}$ ) あるいは  $1.81 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ( $20^\circ\text{C}$ ) であるので、空気の粘性率は水の粘性率の 1/100 程度である。Eq.1 より、静止した空気の中を移動する物体の速度が同じであるとすれば、空気の粘性抵抗は水の粘性抵抗の 1/100 程度なので、空気中を移動する物体の速度が十分小さければ、空気の粘性抵抗はほとんど無視できる。

#### IV. レイノルズ数

前節で示した Eq.1 より、流体の中の物体には、物体の大きさと移動速度に比例する粘性抵抗が働いているが、物体の表面には粘性抵抗とは別に、圧力に起因する圧力抵抗 (pressure drag) が働いている。一般に、流体の中の物体は、重力や浮力などの外力を受けている他、流体からの粘性抵抗と圧力抵抗が抗力として働いており、これらの力が組み合わさった状態で運動する。物体が流体中を運動することにより発生する見かけの力を慣性力 (inertial force) あるいは慣性抵抗 (inertial drag) と呼んでいる。慣性抵抗は、ニュートンの運動方程式 (Newton's equation of motion) により質量  $\times$  加速度で表される。従って、流体の中を移動する物体の表面に働く慣性抵抗 ( $R_i$ ) は、物体の質量を  $m$ 、代表速度を  $v$  とすると、 $R_i = m dv/dt$  となる。ここで、質量 ( $m$ ) 及び加速度 ( $dv/dt$ ) を物体の代表

長さ（大きさ） $D$ と代表時間（characteristic reference time） $T$ ，流体の密度 $\rho$ で表すと， $m = \rho D^3$ 及び $dv/dt = (D/T)/T = D/T^2$ となるが， $v = D/T$ より $dv/dt = v^2/D$ であるので，結局，

$$R_i = D^2 v^2 \rho \quad (\text{Eq.2})$$

と表される。Eq.2は，物体が受ける慣性抵抗は，物体の大きさの2乗と速度の2乗に比例することを示している。粘性率や密度が変化しないとすれば，物体の大きさあるいは速度が2倍になると，粘性抵抗は2倍になるが，慣性抵抗は4倍になる。

粘性抵抗（Eq.1）と慣性抵抗（Eq.2）の比（ $R_e = R_i/R_v = Dv\rho/\eta$ ）をレイノルズ数（Reynolds number）と呼んでいる。レイノルズ数 $R_e$ は，粘性抵抗の影響の大きさを示す指標であり，物体の大きさや速度が大きい程，レイノルズ数は大きくなり，レイノルズ数が大きい程，粘性抵抗の影響は小さくなる。例えば，海の中を泳ぐマグロとアジでは，体が大きなマグロの方がレイノルズ数は大きくなり，水による粘性抵抗の影響は小さくなる。また，時速200kmで走行する新幹線と時速80kmで走行する普通列車を比較すると，新幹線の方がレイノルズ数は大きくなり，空気による粘性抵抗の影響は小さくなる。ここで気をつけるのは，粘性抵抗の影響が小さいというのは，粘性抵抗が慣性抵抗に比べて小さいのであって，粘性抵抗の値自体が小さい訳ではない。物体の大きさや速度が大きくなれば，Eq.1に従って粘性抵抗は大きくなる。

レイノルズ数には，相似則（レイノルズ数の相似則）というのがある。これは，レイノルズ数が等しい2つの物体があるとすれば，2つの物体の大きさや速度，流体の粘性率が異なっていたとしても，流体と物体の関係は完全に等しくなるというものである。例えば，航空機の風洞実験（航空機を飛ばす代わりに，人工的に起こす風の中に置いて行う実験）を行う際に，いきなり実物を使用する訳にはいかないので，実物の1/10の模型を作成し，風速を10倍にして模型を使用した風洞実験を行えば，レイノルズ数は等しくなるので，空気と航空機の関係は完全に等しくなり，実物で行ったのと同じ実験となる。

## V. レイノルズ数が非常に小さい場合の抗力（ストークスの法則）

流体中の物体には，粘性抵抗と圧力抵抗を合わせた力が抗力（drag）として働く。Stokes (1851)は，ナビエ・ストークス方程式（Navie-Stokes equation）を線形化したストークス近似（Stokes' approximation）を用いて，流れが遅くレイノルズ数が非常に小さい場合に流体の中の球体に対して働く抗力を理論的に導いた。ナビエ・ストークス方程式とは，粘性を持つ流体に対する運動方程式であり，流体の密度を $\rho$ （一定），粘性率を $\eta$ （一定），速度を $\mathbf{v}(u, v, w)$ ，圧力を $p$ ，流体の単位質量に働く外力を $\mathbf{F}$ とすると，次の式のように表される。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{3\rho}\nabla\theta + \frac{\eta}{\rho}\Delta\mathbf{v} + \mathbf{F} \quad (\text{Eq.3})$$

なお， $D\mathbf{v}/Dt = \partial\mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ ， $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ， $\Delta = \nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2, \partial^2/\partial y^2, \partial^2/\partial z^2)$ ， $\theta = \nabla\cdot\mathbf{v} = \text{div}\mathbf{v} = \partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z$ である。

Eq.3において，左辺は慣性項と呼ばれ，慣性力を表している。慣性項はさらに時間微分項（ $\partial\mathbf{v}/\partial t$ ）と移流項（又は対流項； $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$ ）で構成される。また，右辺第1項は圧力項，右辺第2項は圧縮項，右辺第3項は粘性項，右辺第4項は外力項と呼ばれ，それぞれ圧力，変形力，粘性力，外力を表している。

低速で流れる流体では，Eq.3の左辺の移流項（対流項）が右辺の粘性項に比べて小さくなるので，無視することができる。非線形である移流項（対流項）をゼロに近似したものをストークス近似と言



い、レイノルズ数が非常に小さい場合に成り立つ。なお、流体の流れが時間で変化しない定常流の場合には、時間微分項もゼロとなり、慣性項を完全に無視することができる。また、低速で流れる気体や液体は非圧縮性であるので、流体の運動における質量保存則に相当する連続の式 (equation of continuity ; Eq.4)

$$\theta = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (\text{Eq.4})$$

が成り立ち、右辺第2項の圧縮項は無視することができる。さらに、右辺第4項の外力項の外力としては、一般的に重力が想定されるが、外力が重要になるのは、自由界面を持つ流れや密度が異なる流体が混在するような流れ場であり、そのような場でなければ、外力項も無視することが可能である。その結果、レイノルズ数が非常に小さい場合の流体の運動方程式 (ストークス近似) は、次のようになる。

$$\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} \quad (\text{Eq.5})$$

流体中の物体の形状として球体を想定し、球体の周りの流れを扱う場合、Eq.5は、レイノルズ数が非常に小さい  $R_e \ll 1$  の時に有効であると考えられる。Eq.5は非線形を含まない線形の式となっているので、Eq.5をEq.4と組み合わせることにより、遅い流体の中にある球体が受ける抗力を解析的に求めることができる。本総説のテーマである水中を粒子が堆積する現象は、静止した流体の中を球体がゆっくり落下する現象に近似できると考えられ、球体の運動を止めて考えた時、遅い流れの流体中にある球体が受ける抗力を考えることと等価である。以下では、ストークス近似が成り立つ遅い流れ (ストークス流れ) の中にある球体に働く抗力について考える。なお、ストークスの法則の導出に当たり、複数の『流体力学』のテキストを参照したので、主なものを記しておく (今井, 1973 ; 巽, 1982 ; 日野, 1992 ; 神部・石井, 1995 ; 社団法人日本機械学会, 2005 ; 石間・天谷, 2009 ; 水島・他, 2017)。

Eq.5にベクトル解析の公式を適用すると、Eq.4より  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  であるので、

$$\nabla p = \eta \Delta \mathbf{v} = \eta [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})] = -\eta \nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = -\eta \nabla \times \mathbf{w} \quad (\text{Eq.6})$$

となる。ここで、Eq.6の  $\mathbf{w}$  は局所的な流体粒子の自転を表す渦度 (vorticity) と呼ばれ、 $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v}$  が成り立つ。球体に働く抗力を求めるに当たり、極座標表示  $(r, \theta, \phi)$  を用い、流れは軸対象で  $\phi$  方向の流れはないとすると、 $\phi$  方向の速度  $v_\phi = 0$  となり、 $r$  方向と  $\theta$  方向の速度  $v_r$  と  $v_\theta$  はそれぞれ  $r$  と  $\theta$  の関数になる。極座標表示における  $\nabla$  (nabla) は、 $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right)$  と表されるので、渦度  $\mathbf{w}$  の成分は、速度  $v_r$  及び  $v_\theta$  を用いて次式のようになる。

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( 0, 0, \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (\text{Eq.7})$$

今、球体の半径を  $a$ 、球体から遠く離れた地点での流体の速度を  $V$  とすると、Eq.6における境界条件は、 $r = a$  の時に、 $v_r = v_\theta = 0$ 、 $r \rightarrow \infty$  の時に、 $v_r \rightarrow V \cos \theta$ 、 $v_\theta \rightarrow -V \sin \theta$ 、 $p \rightarrow p_\infty$  となる。 $p_\infty$  は球体から遠く離れた地点での流体の圧力であり、 $r$  と  $\theta$  には依存しない一定値である。これらの境界条件を満たす  $v_r$  と  $v_\theta$  の解としては、次式が知られている。

$$v_r = V \cos \theta \left( 1 - \frac{3a}{2r} + \frac{a^3}{2r^3} \right), \quad v_\theta = -V \sin \theta \left( 1 - \frac{3a}{4r} - \frac{a^3}{4r^3} \right) \quad (\text{Eq.8})$$

Eq.8をEq.7に代入して渦度  $\mathbf{w}$  の成分を求めると、



$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{v} = \left( 0, 0, -\frac{3Va}{2r^2} \sin \theta \right) \quad (\text{Eq. 9})$$

となる。さらに、Eq.9をEq.6に代入すると、次の式が得られる。

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 3\eta a V \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (\text{Eq. 10a})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{3}{2} \eta a V \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (\text{Eq. 10b})$$

球体の表面に働く力は、圧力と粘性応力による圧力抵抗と粘性抵抗であり、流れ方向の成分が抗力として球体に作用する。圧力 $p$ は、Eq.10aを $r$ について積分すれば求まる。 $r \rightarrow \infty$ の時、 $p \rightarrow p_\infty$ であるので、

$$p = \int 3\eta a V \frac{\cos \theta}{r^3} dr = p_\infty - \frac{3\eta a V \cos \theta}{2r^2} \quad (\text{Eq. 11})$$

となる。一方、球体表面に働く粘性応力は $\tau_{rr}$ 、 $\tau_{r\theta}$ 、 $\tau_{r\phi}$ の3つであるが、 $\phi$ 方向の流れはないので、 $\tau_{r\phi}$ は考えなくて良い。 $\tau_{rr}$ と $\tau_{r\theta}$ は、それぞれに対応する歪速度を $\dot{\gamma}_{rr}$ と $\dot{\gamma}_{r\theta}$ とすると、

$$\tau_{rr} = \eta \dot{\gamma}_{rr} = 2\eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = 2\eta V \cos \theta \left( \frac{3a}{2r^2} - \frac{3a^3}{2r^4} \right) \quad (\text{Eq. 12a})$$

$$\tau_{r\theta} = \eta \dot{\gamma}_{r\theta} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] = -\frac{3\eta V a^3}{2r^4} \sin \theta \quad (\text{Eq. 12b})$$

で与えられる。その結果、半径 $a$ の球体の表面における法線応力 $\sigma_n$ と接線応力 $\sigma_t$ は、Eq.11及びEq.12において $r = a$ とすると、次のように表される。

$$\sigma_n = -p + \tau_{rr} = -p_\infty + \frac{3\eta V \cos \theta}{2a} \quad (\text{Eq. 13a})$$

$$\sigma_t = \tau_{r\theta} = -\frac{3\eta V}{2a} \sin \theta \quad (\text{Eq. 13b})$$

ここで、球体表面の微小面積を $dS$ とすると、 $dS = 2\pi a^2 \sin \theta d\theta$ であり、球体に働く圧力抵抗 $R_p$ 及び粘性抵抗 $R_v$ は、Eq.13からそれぞれ次式のようになる。

$$R_p = \int \sigma_n \cos \theta dS = -p_\infty 2\pi a^2 \int_0^\pi \cos \theta \sin \theta d\theta + 3\pi \eta V a \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \eta a V \quad (\text{Eq. 14a})$$

$$R_v = - \int \sigma_t \sin \theta dS = \frac{3\eta V}{2a} 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = 4\pi \eta a V \quad (\text{Eq. 14b})$$

球体に働く抗力 $F_D$ は、 $F_D = R_p + R_v$ であるので、次式が得られる。

$$F_D = R_p + R_v = 6\pi \eta a v \quad (\text{Eq. 15})$$

Eq.15は、遅い流れの中の球体が受ける抗力は、流速、球体の半径、粘性係数に比例することを示しており、ストークスの法則 (Stokes' law) と呼ばれている。レイノルズ数を $Re = 2av\rho/\eta$ とすると、上述したように、ストークス近似は $Re \ll 1$ の場合に成立すると考えられるが、実験結果との比較では、 $Re < 1$ の時に良く一致していることが知られている (例えば、石間・天谷, 2009)。

地質学では、粒子の粒径が2mm以上のものを礫、2mm以下のものを砂、1/16mm以下のものを泥、2 $\mu$ m以下のものを粘土と呼んで区別しているが、水中に堆積する砂や泥や粘土を第一近似として球体と見なすことは可能であると考えられる。しかし、粒径2mm以上の礫の場合、粒径が大きくなるに従い、球体からかなり外れた形状をしているものが存在するので、ストークスの法則がどこまで適用できるかは不明であり、注意を要する。

VI. 水中を沈降する粒子の終端速度

ストークスの法則を用いて、静止した水中に堆積する粒子の運動について考える。上述したように、粒度の粗い砂や礫が下方に堆積し、細かい砂や粘土が上方に堆積するのは、細かい粒子の方がゆっくり堆積するからであり、堆積速度は粒度に依存する。水中を落下する粒子には、重力と浮力の他に、水の粘性による抗力が作用するが、重力と浮力が一定であるのに対して、抗力はストークスの法則 (Eq.15) に従い、粒子の沈降速度に比例して増大して行く (図4)。そして、粒子に下向きに働く重力と上向きに働く浮力及び抗力の3つの力が釣り合った時に、粒子の沈降速度は一定となり、この時の一定速度を終端速度 (terminal velocity) と呼んでいる。終端速度が大きい粒子が先に落下するので、粒子の粒径と終端速度の関係が分かれば、細かい粒子がゆっくり堆積する理由が分かることになる。

今、水中を沈降する粒子を球体に近似し、粒子の半径を  $a$ 、粒子の密度を  $\rho_p$ 、水の密度を  $\rho_f$ 、水の粘性率を  $\eta$ 、重力加速度を  $g$ 、終端速度を  $v_t$  とする時、粒子に働く重力  $F_G$ 、浮力  $F_B$ 、抗力  $F_D$  は次式で表される。

$$F_G = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_p g, \quad F_B = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_f g, \quad F_D = 6\pi \eta a v_t \quad (\text{Eq.16})$$

これら3つの力は釣り合っており、 $F_G = F_B + F_D$  という関係が成り立つ (図5)。従って、

$$\frac{4\pi a^3}{3} \rho_p g = \frac{4\pi a^3}{3} \rho_f g + 6\pi \eta a v_t \quad (\text{Eq.17})$$

となる。粒子の直径を  $D (= 2a)$  として、Eq.17から終端速度  $v_t$  を求めると、

$$v_t = \frac{4a^2}{18\eta} (\rho_p - \rho_f) g = \frac{D^2}{18\eta} (\rho_p - \rho_f) g \quad (\text{Eq.18})$$

となる。Eq.18は、ストークスの式 (Stokes' equation) と呼ばれ、レイノルズ数を  $Re = Dv_t\rho_f/\eta$  とすると、 $Re < 1$  の時に成り立つと考えられる。ストークスの式は、終端速度が粒子径の2乗及び粒子と水の密度差に比例し、粘性率に反比例することを示しており、粒子の密度が同じであれば、細かい粒子ほど終端速度が小さくなり、ゆっくり堆積することが分かる。

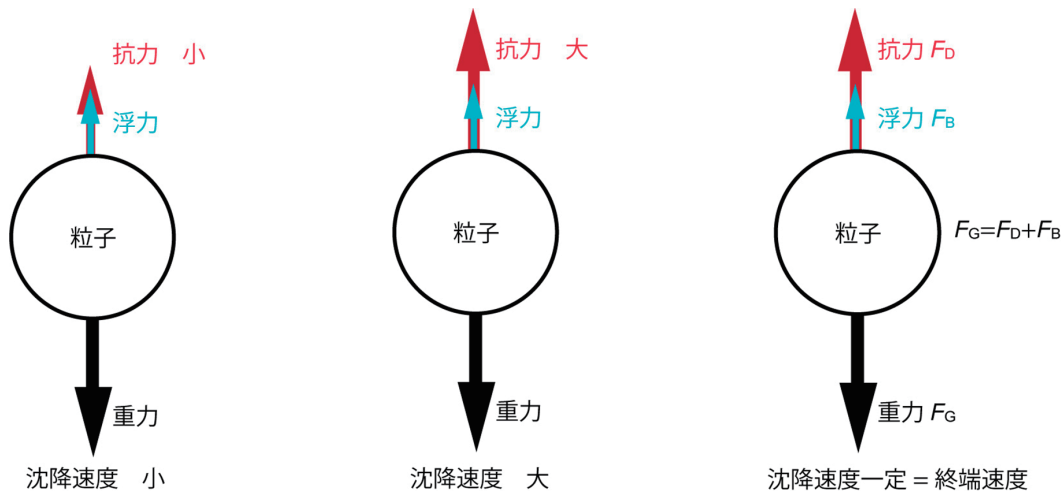


図4 水中の粒子に働く3つの力 (重力, 浮力, 抗力)  
抗力は沈降速度に比例して大きくなる。

図5 3つの力の釣り合い

## VII. 空気中を落下する物体の終端速度

ストークスの式 (Eq.18) を基にして、次に空気中を落下する物体の終端速度について考える。まず、ガリレオの落体の法則では、物体の重さに関係なく落下速度は同じになるとしているが、これは物体に大きさが無い質点の場合に成り立つことである。実際には、物体にはサイズ (体積) があり、空気による圧力抵抗や粘性抵抗が働く。ストークスの式に従うと、水中の物体と同様、サイズが大きい方が終端速度は大きくなり、先に落下することが予想される。しかし、実験室において、同じ物質でサイズと重量の異なる物体を落下させてみると、ほぼ同時に着地するように見える (図6)。これは、空気の粘性率が水の粘性率ほど大きくないことに起因している。上述したように、空気の粘性率は水の粘性率の1/100程度であるが、その結果、空気中における物体の終端速度は水中よりも約100倍大きくなる。空気の密度 (20℃ 1000hPa で  $1.189 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ) が水の密度 (20℃ で  $0.9982 \text{ g/cm}^3$ ) の約1/1000である (国立天文台編 (2020) 理科年表2020参照) ことも、終端速度をより大きくする要因となっている。終端速度が約100倍大きいということは、粘性抵抗や圧力抵抗による抗力の効果が表れるのに時間がその分掛かることになる。ストークスの法則 (Eq.15) から、空気の抗力は水の抗力の約1/100であり、空気の粘性の影響が現れにくいことが分かる。従って、空気中で落下させたサイズの異なる物体がほぼ同時に着地するように見えるのは、空気の粘性の影響が現れる前に着地するからである。落下距離を長くするか、一方の物体のサイズを極端に大きくすれば、粘性の効果が表れて、着地時間に差が現れると考えられる。ちなみに、空気中を漂っている微粒子 (エアロゾル) は、粒径が非常に小さいために終端速度は極端に遅くなり、空気中を漂っている間に偏西風に煽られて遠くまで運ばれる。九州の火山から噴出した火山灰や中国大陸起源の黄砂とPM2.5が関東地方や東北地方まで飛来してくるのは、このためである。

なお、図6では、時間が経過して落下速度が大きくなってくると、小さい球の方が大きい球よりも早く落下しているように見える。これは、落下速度が大きくなってくると、慣性抵抗の影響は大きい球の方がより顕著に表れてくるので、レイノルズ数  $R_e$  が1より大きくなり、ストークスの法則 (Eq.15) が成り立たなくなるためであると考えられる。

それでは、風船の場合はどうであろうか？ 大きな風船と小さな風船をある高さから同時に落下させる実験を行うと、大きい風船の方がゆっくりと落下する (図7)。この現象の論理 (logic) は、どのように説明されるのか？ ストークスの式 (Eq.18) に従うと、終端速度は、物体の大きさの他に、物体と空気の密度差に比例する。大きな風船と小さな風船の密度を考えると、風船のゴムの部分は同じ重量であるが、中に入っている空気の量は大きい風船の方が多いため、ゴムと風船の中の空気も含めた風船の密度は、大きい風船の方がより小さくなる。風船のサイズが大きくなる程、風船の密度は空気の密度に近づいて行き、風船と空気の密度差は次第にゼロに近づく。今、大きい風船 (サイズ  $D_L$ ) と空気の密度差を  $\Delta\rho_L$ 、小さい風船 (サイズ  $D_S$ ) と空気の密度差を  $\Delta\rho_S$  とすると、大きい風船の終端速度  $v_L$  と小さい風船の終端速度  $v_S$  の比  $v_S/v_L$  は、ストークスの式より次のように表される。

$$\frac{v_S}{v_L} = \frac{D_S^2}{D_L^2} \cdot \frac{\Delta\rho_S}{\Delta\rho_L} = \left(\frac{D_S}{D_L}\right)^2 \frac{\Delta\rho_S}{\Delta\rho_L} \quad (\text{Eq.19})$$

大きい風船の方が小さい風船よりもゆっくり落下するのは、大きい風船の終端速度が小さい風船の終端速度よりも小さい ( $v_S > v_L$ ) からであり、Eq.19は1より大きくなる ( $v_S/v_L > 1$ )。従って、

$$\left(\frac{D_S}{D_L}\right)^2 > \frac{\Delta\rho_L}{\Delta\rho_S} \quad (\text{Eq.20})$$

という関係が成り立つことが分かる。また、 $D_S < D_L$  であるので、Eq.20の左辺  $(D_S/D_L)^2$  は1より小さくなり、

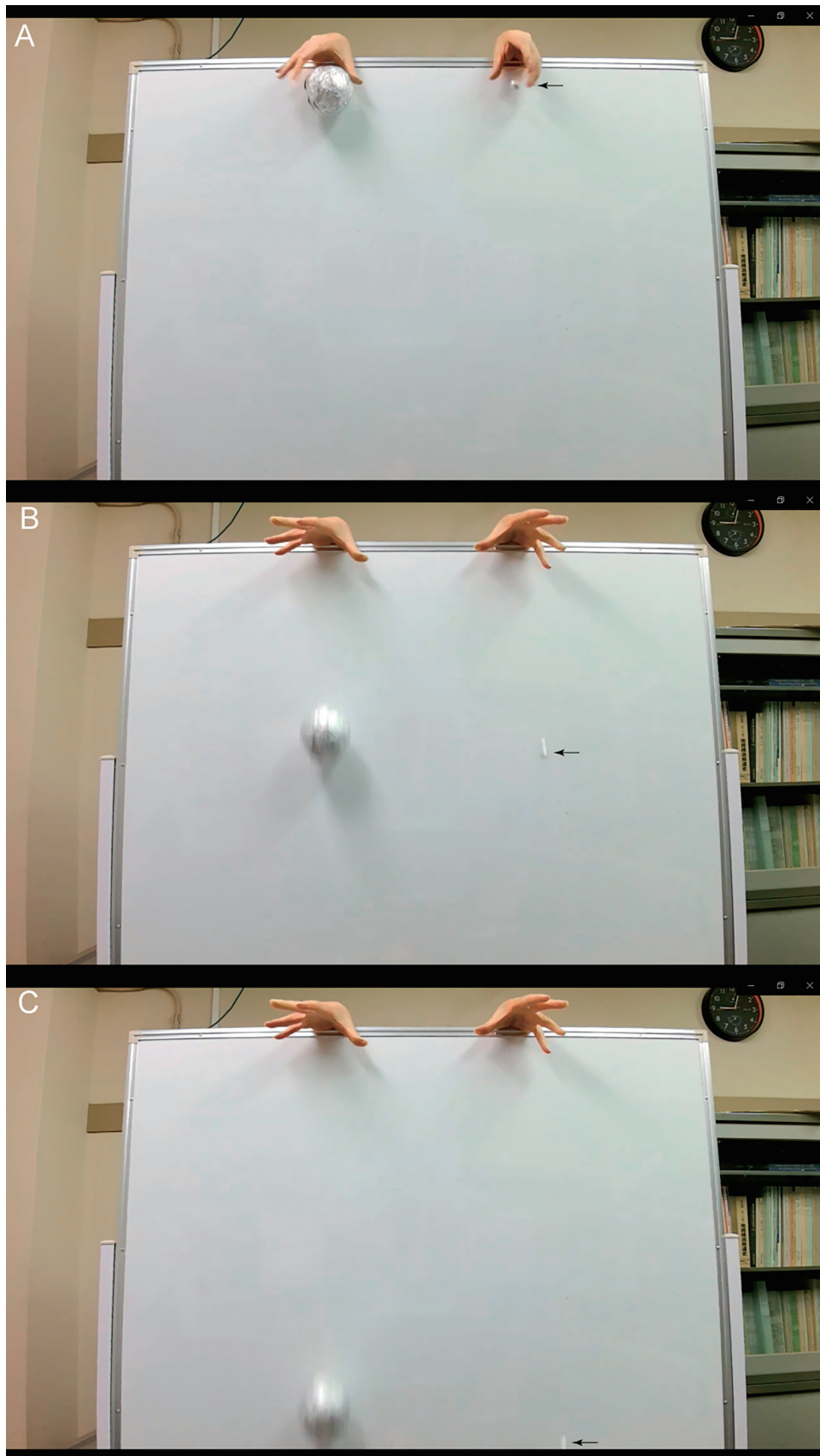


図6 大きさと重量の異なる2つの球（同じ粘土を使用）の落下実験  
大きい球：直径約9 cm, 重量約810g, 小さい球（矢印）：直径約2 cm, 重量：約7g



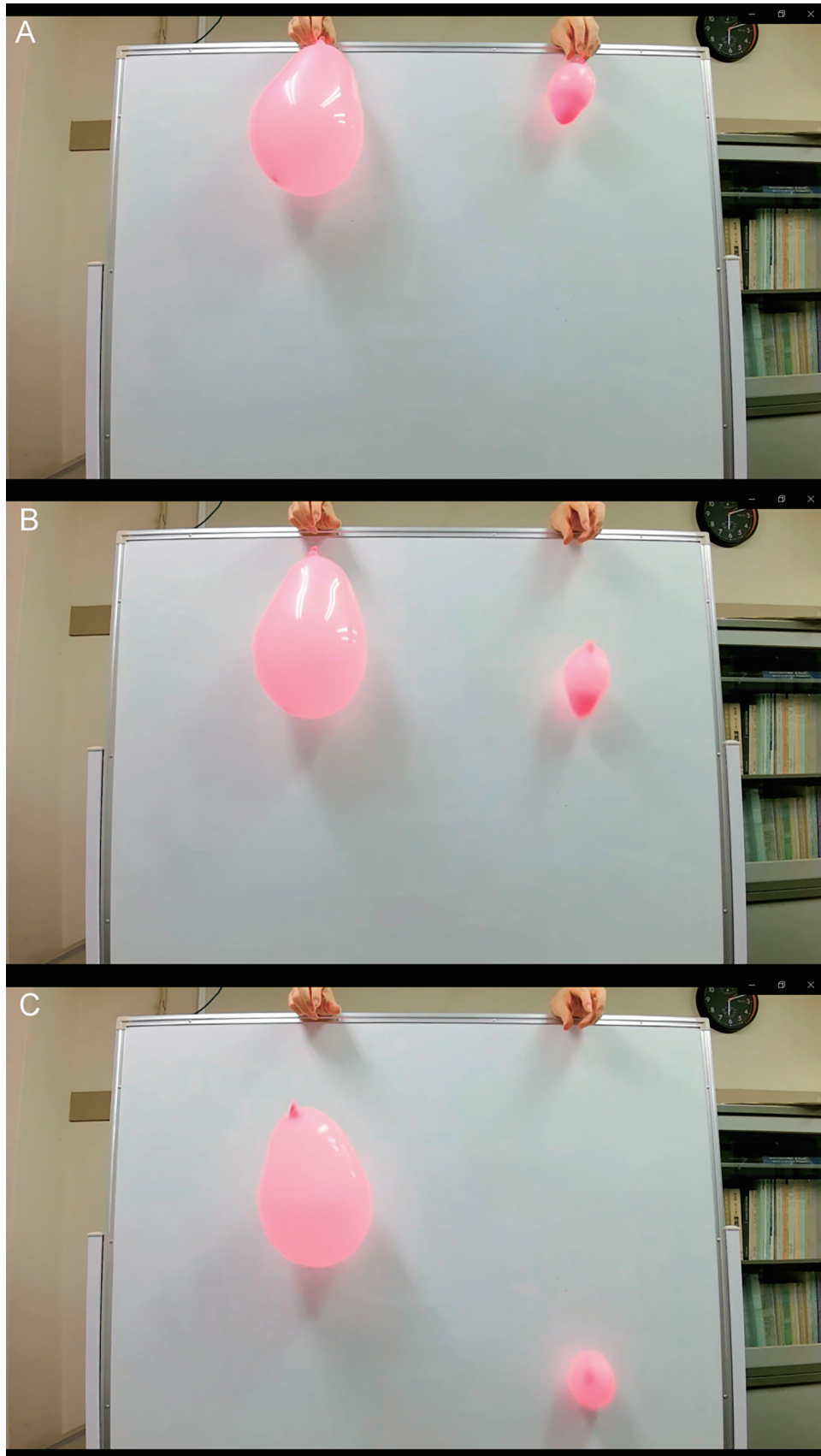


図7 大きさの異なる2つの風船の落下実験  
大きい風船：長径約27cm，小さい風船：長径約11cm，重量はいずれも約2.3g

$$1 \gg \frac{\Delta\rho_L}{\Delta\rho_S} \quad \text{or} \quad \Delta\rho_S \gg \Delta\rho_L \quad (\text{Eq.21})$$

が成り立つ。Eq.21より、大きい風船がゆっくり落下する理由は、大きい風船の密度が空気の密度に近く、小さい風船に比べて、空気との密度差がずっと小さいため終端速度が小さくなるからである。風船の場合には、終端速度に与える影響は、風船のサイズよりも空気との密度差の方が大きいことが分かる。

## VIII. まとめ

静止した流体（水及び空気）の中を落下する粒子には、重力、浮力の他に、粘性抵抗と圧力抵抗からなる抗力の3つの力が働いている。粒子を球体に近似すると、ストークスの法則により粒子に働く抗力は、粒子の半径、粘性率及び落下速度に比例する。抗力は落下速度と共に増大し、これら3つの力が釣り合った時に落下速度は一定となり、粒子は一定速度（終端速度）のまま堆積する。3つの力の釣り合いから、粒子の終端速度は、粒子径の2乗及び粒子と流体の密度差に比例し、粘性率に反比例することが分かる。従って、粒子の密度が同じであれば、細かい粒子ほど終端速度は小さくなり、ゆっくり堆積することになる。このことは、水中でも空気中でも同じであるが、空気の粘性率は水の粘性率の約1/100であるので、空気中では抗力の影響が現れにくい。落下させる物体のサイズに極端な違いを付けるか、落下距離を極端に長くするのでなければ、終端速度に差は出にくい。一方、大きい風船の密度は空気の密度により近く、小さい風船に比べて空気との密度差がずっと小さくなるため、大きい風船はゆっくり落下する。風船の場合には、終端速度に与える影響はサイズよりも空気との密度差の方がずっと大きい。

## IX. おわりに

身近な地学現象である『なぜ細かい粒子はゆっくり堆積するのか?』をテーマに、粘性流体中の物体が受ける抗力（粘性抵抗及び圧力抵抗）について解説してきた。当初は、なるべく数式を最小限にして、地学の本質である論理（logic）を重視した話を展開する予定であった。しかし、解説を続けて行く内に、本テーマに直接関係するストークスの法則がどのようにして導き出されたのかを説明せずに、論理的に話を展開できないことに気がついた。ナビエ・ストークスの方程式やストークス近似については、主に流体力学の分野から様々な解説書が出されているが、肝心のストークスの法則が導き出される過程を初心者向けに詳しく解説したテキストは見つからなかった。そこで、ナビエ・ストークスの方程式からストークス近似を経てストークスの法則を導出する過程について、できる限り分かり易い説明を本総説に加えることにした。ストークスの法則を導出するに当たっては、極座標表示を用いており、大学で応用数学を習ったことがない人には難解かもしれない。数学が苦手な人は、ナビエ・ストークスの方程式からストークスの法則の導出までを読み飛ばして貰えればと思う。本総説が、小学校、中学校、高校で理科を教える教員や大学及び大学院の学生・院生に少しでも役に立てば幸いである。

## 謝辞

本総説を作成するきっかけとなった山梨大学教育人間科学部及び教育学部科学教育コース理科教育系の地学一般及び地球変動学を受講した学部生、並びに山梨大学大学院教育学研究科（教職大学院）の初等（中等）理科の教材研究と授業構想を受講した院生諸氏に感謝する。

## 引用文献

- 福地龍郎（2020）甲府盆地の形成過程に関する一考察. 山梨大学教育学部紀要第30号, p. 103-119.
- 福地龍郎（2021）山梨県における河川氾濫に関する地形学的考察：令和2年7月豪雨災害との比較研究. 山梨大学教育学部紀要第31号, p. 155-174.
- 日野幹雄（1992）流体力学. 朝倉書店, 東京, 469pp.
- 今井 功（1973）流体力学前編. 裳華房, 東京, 428pp.
- 石間経章・天谷賢児（2009）流体力学. 英和対象「工学基礎テキスト」シリーズ, 森北出版株式会社, 東京, 153pp.
- 陣内和彦（1974）風化花崗岩に含まれる粘土とその窯業原料としての利用. 窯業協会誌82巻, 8号, p. 454-461.
- 柿谷 悟・伊石正文（1973）滋賀県信楽地域の地質と粘土鉱床. 窯業協会誌81巻, 12号, p. 587-596.
- 神谷雅晴・須藤定久（2001）萩焼とその原料粘土. 地質ニュース563号, p. 46-57.
- 神谷雅晴・須藤定久（2005）備前焼とその粘土. 地質ニュース609号, p. 43-52.
- 神部 勉・石井克哉（1995）流体力学. 裳華房, 東京, 294pp.
- 勝木宏昭（2015）唐津焼用の高アルミナ質山瀬陶土の特性. 佐賀県窯業技術研究センター平成26年度研究報告書, p. 25-30.
- 国立天文台編集（2020）理科年表2020. 丸善出版, 東京, 1174pp.
- 水島二郎・柳瀬眞一郎・百武 徹（2017）流体力学. 森北出版株式会社, 東京, 231pp.
- 長倉三郎・井口洋夫・江沢洋・岩村秀・佐藤文隆・久保亮五編集（1999）岩波理化学辞典第5版CD-ROM版, 岩波書店, 東京.
- 社団法人日本機械学会（2005）流体力学. JSMEテキストシリーズ, 丸善出版, 東京, 206pp.
- G. G. Stokes (1851) On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, Vol.9, part ii, p.8-106.
- 巽 友正（1982）流体力学. 新物理学シリーズ21, 培風館, 東京, 453pp.
- 山本晴彦・山崎俊成・有村真吾・原田陽子・高山 成・吉越 恆・岩谷 潔（2011）2009年7月21日に山口県において発生した豪雨の特徴と土砂災害の概要. 自然災害科学29巻4号, p. 471-485.

**A review on physics of familiar geoscientific phenomena:  
Why are fine grains deposited slowly?**

Tatsuro FUKUCHI<sup>#</sup>

<sup>#</sup> Faculty of Education, Graduate Faculty of Interdisciplinary Research, University of Yamanashi

**Abstract**

In order to understand the reason why fine grains are deposited slowly, which is a familiar geoscientific phenomenon, we must consider the drag caused by viscosity besides the gravity and buoyancy as a force acting on falling grains in fluid such as water or air. When the grains may be as the first approximation regarded as spheres, the drag acting on the grains is in proportion to the diameter of grains, the viscosity of fluid and the falling velocity, as shown by Stokes' law. The drag increases with increasing the falling velocity, and then each grain is deposited with a constant velocity called the terminal velocity, which is achieved when the three forces of the gravity, buoyancy and drag balance with each other. The terminal velocity of grains in fluid is proportional to the square of grain size and the difference between the densities of fluid and grains and is inversely proportional to viscosity. Therefore, when the density of grains is constant, the finer the grain size is, the smaller the terminal velocity is. This is the reason why the fine grains are deposited slowly. This phenomenon universally occurs irrespective to kinds of fluid. However, the effect of drag hardly emerges in air because the viscosity of air is about one hundredth of that of water. Unless there is an extreme difference between the body sizes or the falling length is so long, the terminal velocities are almost same. On the other hand, when balloons fall in air, the larger the size of balloon is, the more slowly the balloon falls, because the density of a bigger balloon is close to that of air and then the terminal velocity becomes smaller. In case of balloons, the effect of the difference between the densities of the balloon and air on the terminal velocity is much larger than the effect of the size.

**Keywords:** stratum, graded bedding, viscosity, viscous drag, pressure drag, drag, Reynolds number, Stokes' law