

光子場を介した複数分極系における同期現象の全量子論

山梨大学大学院

医工農学総合教育部

博士課程学位論文

2022年3月

瀬崎 陸

目次

1	序論	3
1.1	研究背景	3
1.2	研究目的	4
1.3	本論文の構成	5
2	Superradiance の一般論	6
2.1	Dicke の superradiance 理論	6
2.2	Superradiance の発光特性	11
2.3	Superradiance の古典論	15
3	蔵本モデルの一般論	20
3.1	位相縮約	20
3.1.1	リミットサイクルとアイソクロン	20
3.1.2	摂動系における位相縮約	21
3.1.3	結合振動子系の位相ダイナミクス	22
3.2	蔵本モデル	23
3.3	Coherent な振動子 ($ \omega_i - \Omega < K Z $)	26
3.4	Incoherent な振動子 ($ \omega_i - \Omega > K Z $)	28
3.5	集団同期転移	29
4	理論	32
4.1	モデル	32
4.2	光を介して結合した複数分極の Luminescence 方程式の一般形	33
5	自由光子場を介した複数分極の同期現象	38
5.1	Superradiance に対する Luminescence 方程式	38
5.1.1	Luminescence 方程式の導出	38
5.1.2	数値計算結果と考察	39
5.2	位相ダイナミクスの時間発展方程式	41
5.3	蔵本モデルとのアナロジーと同期現象の起源	42
5.4	位相ダイナミクスの計算結果と考察	43
5.5	同位相同期および逆位相同期の実現条件	45
5.6	同位相同期から逆位相同期への時間的転移	47
6	共振器 QED 系における複数分極集団の同期現象	49
6.1	共振器 QED 系における Luminescence 方程式	49
6.2	位相ダイナミクスの時間発展方程式	50
6.3	自然放出と誘導放出の協奏による新奇同期現象の発見	53
6.4	同期条件に対する物質系の不均一性の効果	56
7	総括	59

Appendix.A	光子場を介して結合した分極集団の不安定性解析	62
A.1	光を介して結合した物質系の定常状態	62
A.2	定常状態の安定性	64
A.3	非線形系における定常状態の安定性	65
A.4	位相ダイナミクスにおける安定性	66
Appendix.B	Superradiance に対するマスター方程式の導出	71
B.1	モデル	71
B.2	相互作用描像	71
B.3	Superradiance に対するマスター方程式	73
Appendix.C	振動子が2個、および不均一幅が存在する場合の蔵本モデルの解析	76
C.1	同期する場合 ($\Delta/K < 0$)	76
C.2	同期しない場合 ($\Delta/K > 0$)	77
	謝辞	79
	参考文献	80
	学会発表および投稿論文	84

1 序論

1.1 研究背景

同期現象とは、複数の振動子が互いの位相を揃えて、広義には振動子間の位相差を一定にしながら振動する現象のことである。この現象は力学系、化学系および生物系のような巨視的かつ古典的な系において既に観測されている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]。同期現象の理論の発端となる始祖的なアイデアは Winfree と Guckenheimer によって提案された [12, 13]。近年では、同期現象は現象論的な理論モデルである蔵本モデル [14, 15, 16]、数値計算によるシミュレーション [16, 17]、および数学的理論など [18, 19]、基礎的な観点から研究がなされている。さらに、同期現象をデバイスへの応用を目指した研究もなされている [11, 20]。さらに、同期現象の考えを用いることで、単一のデバイスからの出力が小さくても、複数のデバイスを適切な方法により結合させることによって、コヒーレンスを有し、より高い出力を得ることが期待されている [9, 10]。例えば、光科学や光技術に必要な不可欠であるレーザーも物質系による同期現象の 1 つであると考えられる。レーザーは誘導放出によるフィードバック過程を介して、励起された物質系からコヒーレントな光が放出される発光現象であり、様々な光共振器で実現されている [21, 22, 23]。このレーザーの起源である誘導放出は、半古典論てきな光と物質の相互作用の理論によって記述される。半古典論では、量子化された物質系と古典的な電磁場が相互作用する理論であり、レーザーは古典的な発光現象であり、かつ古典的な同期現象である。

一方で、量子力学的効果に由来する同期現象も観測されており、それは例えば superradiance (超放射) として観測されている。これは、図 1 に示したように、光を介して結合した分極集団が同位相に振動することで、協力的に光放出する発光現象であり、分極集団による同期現象であると考えられる [24, 25, 26, 27]。Superradiance の起源は自然放出であり、これは光の量子性を反映した真空揺らぎに由来する発光過程である。この真空場揺らぎの効果は、先ほどの半古典論とは異なり、光も量子力学的に扱う全量子論的な物質と光の相互作用理論を用いることで、初めて現れる効果である。つまり、superradiance はこの量子力学的効果である真空場揺らぎを起源に持つので、量子論的な同期現象であると考えられる。superradiance は、初期状態で高い反転分布を持つとき、高強度なパルス状の発光を呈し、この発光パルスのピーク強度 I_{peak} は分極数 N の 2 乗に比例し ($I_{\text{peak}} \propto N^2$)、パルス幅 τ_{width} は分極数に反比例する ($\tau_{\text{width}} \propto N^{-1}$) ことが知られている [24, 25, 26, 27]。反転分布が実現していなくても、分極間のコヒーレンス形成によって、有効な発光寿命 τ_{eff} は分極の数に反比例する ($\tau_{\text{eff}} \propto N^{-1}$) ので、通常自然放出よりも発光が早く緩和する [24]。この superradiance は、古くから既に Cs 原子ガス [28, 29]、HF 分子ガスや KCl 結晶中の O 分子イオンのような系で観測されている [30]。ところが近年では、多重量子井戸や量子ドット集合系などのような固体材料からも superradiance が観測されており [31, 32, 33, 34, 35, 36]、この発光現象のメカニズムを用いた、レーザーにとって代わるような超短パルスコヒーレント光源への応用を念頭に、superradiance の研究が盛んになっている。さらに、superradiance はレーザーでトラップされた原子系や [37, 38]、励起子系において [39, 40]、物質系のコヒーレンス性の表れである Boes–Einstein 凝縮の指標として研究に用いられる。また、superradiance は分極集団が光を介して結合して生じる同期現象であるので、光場の空間的分布や、分極の配置の仕方を適切に設計することで、分極の同期を制御できる可能性も数値計算を用いたシミュレーションによっても示唆されている

[41]. 分極集団が同位相に振動することで生じる superradiance とは対照的に、それらが逆位相で振動することで生じる subradiance という現象も観測されている [24]. これは、物質系が保持するエネルギーの緩和が通常自然放出よりも遅くなり、さらに発光も抑制される現象で、レアメタルに含まれる元素のイオン系において既に観測されている [42, 43]. この subradiance を、superradiance を制御するために応用できることを示唆した研究も存在する [44]. このように、光子場を介して形成された量子コヒーレンスに由来する同期現象、つまり superradiance および subradiance は、様々な系から観測されており、基礎研究的および応用的な観点から研究がなされている。

光を介して結合した分極による同期現象である superradiance とレーザーはそれぞれ、全量子論的な発光過程である自然放出と、古典的な発光過程である誘導放出を起源に持つ。通常、レーザーは光を古典的な電磁場として扱う半古典論によって記述される [45, 46]. しかしながら、量子力学的効果である真空場揺らぎを、現象論的にランダム力 (Langevin 力) として取り扱うことで、superradiance も半古典論の範疇で記述できてしまう [47, 48, 49]. この時、superradiance とレーザー、両者の起源は、同じ半古典論的な光と物質の相互作用を表す運動方程式で記述される。そのため、superradiance の起源である自然放出は、半古典論の範囲ではレーザーの起源である誘導放出と区別できないのである。自然放出と誘導放出をそれぞれ区別して取り扱うためには、量子化された光と、同じく量子化された物質が相互作用する全量子論的な理論が必要になる。例えば、我々は過去の研究において、共振器 QED 系における superradiance とレーザーのクロスオーバーを議論した [50]. この過去の研究では、superradiance とレーザーの両者には、物質系のコヒーレンス性を表す量子相関の形成過程に違いがあることを見出した。

古典的な同期現象を説明する理論モデルとして蔵本モデルが挙げられる。このモデルは、様々な同期現象を説明する際に有用なモデルとして有名である。前に述べたように、superradiance は光の量子性に関わる発光現象であるので、これは量子力学的効果が関与する同期現象であると見なすことができる。しかし、この様なナノスケールの系における同期現象において、量子揺らぎの効果がどのように寄与するかは明らかになっていない。さらに、量子力学的な発光現象である superradiance と、古典的な発光現象であるレーザーのクロスオーバーに関する、同期現象的観点からの包括な議論は未だなされていない。

1.2 研究目的

本研究では、まず量子力学的な効果が及ぶミクロな系における同期現象の普遍的なメカニズムを明らかにする。これは、1.1 章で述べたように、光の量子性に由来する発光現象である superradiance を同期現象的に解析することで、ミクロな量子系における同期現象の起源を明らかにする。さらに、共振器 QED 系では superradiance の起源であり、量子論的発光過程の自然放出、またレーザーの起源であり、古典的発光過程である誘導放出の両者が共存し得る。そこで、共振器 QED 系における superradiance とレーザーのクロスオーバーを同期現象的な観点から議論することで、古典的な発光現象であるレーザーに対して、量子論的発光現象である superradiance のメカニズムがどのように寄与するかを明らかにする。同期現象は主にマクロな古典系において観測されてきたが、本研究では量子力学的効果である量子揺らぎが影響するミクロな物質系における同期現象を議論する。superradiance はエネルギーの散逸を伴いながら物質系のミクロな量子状態を形成してい

る。このような非平衡的な現象を、非線形科学の1つである同期現象を用いて議論することで、非平衡非線形な量子論に関する新たな研究領域の開拓を目指す。

1.3 本論文の構成

本論文は以下の様に構成されている。まず本研究を行う上で基礎となった事項を第2章と第3章で述べる。第2章では、Dickeの superradiance の理論について説明する。superradiance の特徴である発光寿命が短縮されるメカニズムを、物質系の量子力学的状態である Dicke 状態を用いて確認する。第3章では、振動子集団の同期現象を記述する数理モデルの1つである蔵本モデルの議論について確認する。この蔵本モデルの議論において、振動子集団が同期するために振動子系が満たすべき条件が明らかにされる。その条件の導出過程について説明する。第4章では、本研究で扱う理論モデルの説明と、superradiance とレーザーを記述できる一般的な時間発展方程式を、半導体 Luminescence 方程式に基づいて導出を行う [51, 52]。第5章では、superradiance を量子論的な同期現象として解析し、量子系における同期現象の起源を明らかにする。ここでは、光子環境中に2準位系が $N = 2$ つ設置されている状況を想定し、この系の発光ダイナミクスを記述する時間発展方程式を、第4章で得られた Luminescence 方程式を用いて導出する。さらに、導出された時間発展方程式から、同期現象の観点から議論するための分極振動の位相に関する時間発展方程式を導出する。この位相に関する時間発展方程式を、蔵本モデルのアナロジーを用いて解析し、同期現象の起源、そのメカニズム、および分極同士が同期するための条件を明らかにする。第6章では、 N 個の2準位系が、単一モードの光子と相互作用する状況を想定し、同様にこの系における時間発展方程式を第4章で得られた Luminescence 方程式から導出する。同様に、導出した時間発展方程式から、分極集団の位相に関する時間発展方程式を導出し、蔵本モデルのアナロジーを用いることで共振器 QED 系における分極集団が同期するための条件を導出する。さらに、導出された同期条件が、系のパラメータに対してどのように変化するかを議論し、superradiance とレーザーが共存する系における、superradiance の発生メカニズムの役割を明らかにする。第7章において、本研究の総括を行う。

2 Superradiance の一般論

2.1 Dicke の superradiance 理論

初めに、Dicke による superradiance (超放射) の理論について簡単に説明する [24, 26]。共鳴エネルギーが $\hbar\omega_0$ である 2 準位系の原子を N 個用意する。各原子は添字 $i = 1, 2, \dots, N$ によって区別する。この系のエネルギーを

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + E \sum_{j=1}^N \sigma_j^z ; E = \hbar\omega_0 \quad (2.1)$$

で与える。ここで

$$\mathcal{H}_0 = (\text{原子の運動エネルギー}) + (\text{原子同士の相互作用}) \quad (2.2)$$

である。式 (2.1) の 2 項目は原子の内部エネルギー (原子中の電子のエネルギー状態) を表す。電子のエネルギー状態は 2 つ準位があるとし、電子スピンのアナロジーを用いて表す。つまり基底状態を down スピンと見なしそれを $|-\rangle$ 、励起状態を up スピンと見なしそれを $|+\rangle$ とすると

$$\sigma_i^z |\pm_i\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm_i\rangle \quad (2.3)$$

である。 σ_i^z は i 番目の 2 準位系のエネルギー状態を参照する演算子である。また、

$$[\mathcal{H}_0, \sigma_i^z] = 0, [\sigma_i^z, \sigma_j^z] = 0 \quad (2.4)$$

であるので、原子の状態は \mathcal{H}_0 の固有値と各 σ_i^z の固有値で指定できる。原子系の固有状態を

$$\Psi_{gM} = U_g(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n) |s_1, s_2, \dots, s_n\rangle \quad (2.5)$$

とする。ここで U_g は N 個の原子に関する波動関数、 $|s_1, s_2, \dots, s_n\rangle$ は i 番目の原子内部電子のエネルギー状態を指定する記号で、励起状態なら $s_i = +$ 、基底状態なら $s_i = -$ とする。 m は励起・基底状態にある原子の数をそれぞれ N_+, N_- としたとき、

$$M = \frac{N_+ - N_-}{2} ; N = N_+ + N_- \quad (2.6)$$

であり反転分布を表す。 \mathcal{H}_0 の固有値を E_g としたとき、原子系のエネルギー固有値 E_{gM} は

$$E_{gM} = E_g + ME \quad (2.7)$$

であり、式 (2.5) で表される状態は次の固有方程式の固有状態である。

$$\mathcal{H}\psi_{gM} = E_{gM}\Psi_{gM} \quad (2.8)$$

原子系の固有状態が原子の入れ替えに対して対称であるとき、 E_{gM} のエネルギー状態は

$$\frac{N!}{N_+!N_-!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + M\right)! \left(\frac{N}{2} - M\right)!} \quad (2.9)$$

だけ縮退している。原子が区別できなくて、原子が Boson 的なら U_g は入れ替えに対して対称で、Fermion 的なら反対称である。 \mathcal{H}_0 は U_g のみに作用する。

$$\mathcal{H}_0 U_g = E_g U_g \quad (2.10)$$

一方で Pauli 演算子 $\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z$ は i 番目原子内部の電子状態に作用する。

$$\sigma_i^x |\pm_i\rangle = \frac{1}{2} |\mp_i\rangle; \quad \sigma_i^x = \frac{1}{2} (|-i\rangle\langle+i| + |+i\rangle\langle-i|) \quad (2.11)$$

$$\sigma_i^y |\pm_i\rangle = \pm \frac{i}{2} |\mp_i\rangle; \quad \sigma_i^y = \frac{1}{2} (|-i\rangle\langle+i| - i|+i\rangle\langle-i|) \quad (2.12)$$

$$\sigma_i^z |\pm_i\rangle = \pm \frac{1}{2} |\pm_i\rangle; \quad \sigma_i^z = \frac{1}{2} (|+i\rangle\langle+i| - |-i\rangle\langle-i|) \quad (2.13)$$

この Pauli 演算子を用いて、 i 番目原子の電子のエネルギー状態を変える昇降演算子 σ_{\pm}^i を次のように与える。

$$\sigma_i^{\pm} = \sigma_i^x \pm i\sigma_i^y = |\pm_i\rangle\langle\mp_i| \quad (2.13)$$

$$\sigma_i^z = \frac{1}{2} (\sigma_i^+ \sigma_i^- - \sigma_i^- \sigma_i^+) \quad (2.14)$$

与えられ、これらの演算子は次の交換関係を満たす。

$$[\sigma_i^z, \sigma_j^{\pm}] = \pm \delta_{ij} \sigma_i^{\pm}, \quad [\sigma_i^+, \sigma_j^-] = 2\delta_{ij} \sigma_i^z \quad (2.15)$$

ここで collective な演算子を

$$R_x = \sum_{j=1}^N \sigma_j^x, \quad R_y = \sum_{j=1}^N \sigma_j^y, \quad R_z = \sum_{j=1}^N \sigma_j^z \quad (2.16)$$

$$R^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 = \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^x \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^y \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^z \right)^2 \quad (2.17)$$

で導入する。そうすると式 (2.1) は

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + ER_z \quad (2.18)$$

と書き換えることができ、また式 (2.5) より

$$R_z \Psi_{gM} = M \Psi_{gM} \quad (2.19)$$

であることがわかる。ところで、

$$[\mathcal{H}, R^2] = 0 \quad (2.20)$$

であるので、原子系の状態はさらに R^2 の固有値 $J(J+1)$; $J = -\frac{N}{2}, -\frac{N}{2}+1, \dots, 0, \dots, \frac{N}{2}-1, \frac{N}{2}$ で指定できる。

$$\mathcal{H} \Psi_{gMJ} = (E_g + ME) \Psi_{gMJ} \quad (2.21)$$

$$R^2 \Psi_{gMJ} = J(J+1) \Psi_{gMJ} \quad (2.22)$$

初期状態が完全反転分布 $J = M = \frac{N}{2}$ の状態は

$$\Psi_{g\frac{N}{2}\frac{N}{2}} = U_g(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)|+, \dots, +\rangle \quad (2.23)$$

である。ここで M を 1 つ増やす・減らす、つまり励起状態を 1 つ増やす・減らす演算子を

$$R_{\pm} = R_x \pm iR_y \quad (2.24)$$

で導入し、 R_{\pm} は次のように作用する。

$$R_{\pm}\Psi_{gMJ} = \sqrt{(J \mp M)(J \pm M + 1)}\Psi_{gM\pm 1J} \quad (2.25)$$

この演算子の交換関係は次式のようになる。

$$[R_z, R_{\pm}] = \pm R_{\pm}, [R_+, R_-] = 2R_z \quad (2.26)$$

これを用いて R^2 を R_{\pm} で書き直すと、

$$R^2 = \frac{1}{2}(R_+R_- + R_-R_+) + R_z^2 \quad (2.27)$$

である。状態 Ψ_{gMJ} の電子状態の部分を $|J, M\rangle$ と書く事にする。このとき $|J, M\rangle$ は式 (2.21)、式 (2.22) および式 (2.25) を満たすとする。完全反転分布状態を表す式 (2.23) に k 回作用させると、

$$(R_-)^k|J, J\rangle = \sqrt{2J \cdot 2(2J-1) \cdots k(2J-(k-1))}|J, J-k\rangle \quad (2.28)$$

となる ($J = 1/2$)。式 (2.28) の平方根の部分は

$$\begin{aligned} 2J \cdot 2(2J-1) \cdots k(2J-(k-1)) &= (1 \cdot 2 \cdots k) \cdot [2J \cdot (2J-1) \cdots (2J-(k-1))] \\ &= \frac{k!(2J)!}{(2J-k)!} \end{aligned}$$

$2J$ は励起状態の数で、そこから k 個減らしたので、 $2J-k$ は残った励起状態の数である。式 (2.28) を書き換えれば

$$|J, J-k\rangle = \sqrt{\frac{(2J-k)!}{(2J)!k!}}(R_-)^k|J, J\rangle \quad (2.29)$$

が得られる。 $J-k$ は残った up スピン (励起状態) を表すので、 $J-k = M$ 。これを用いて、式 (2.29) は次のように書き換えられる。

$$|J, M\rangle = \sqrt{\frac{(J+M)!}{(2J)!(J-M)!}} \left(\sum_{j=1}^N \sigma_j^- \right)^{J-M} |+, +, \dots, +\rangle \quad (2.30)$$

この式 (2.30) は、図 2.1 のようなエネルギー準位で表される。例えば、 $J = 3/2, M = 1/2$ (原子が 3 つ存在し基底状態が 1 つ、励起状態が 2 つある場合について、式 (2.30) を計算してみると、

$$\left| J = \frac{3}{2}, M = \frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|-, +, +\rangle + |+, -, +\rangle + |+, +, -\rangle) \quad (2.31)$$

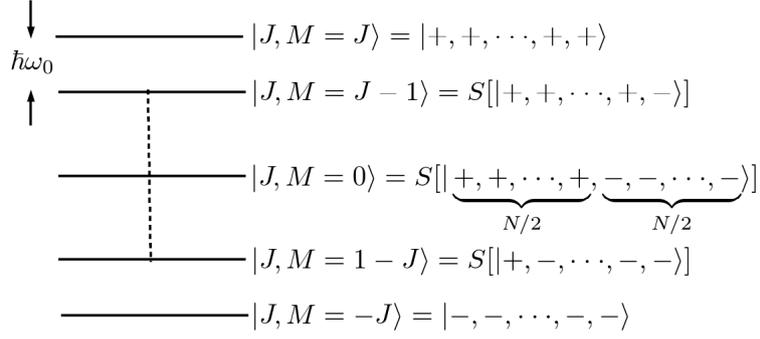


図 2.1 Dicke 状態 $|J, M\rangle$ のエネルギー準位

となる。このように原子の入れ替えに対して対称、もしくはエネルギー状態を区別しない collective な状態を Dicke 状態という。一般の Dicke 状態 $|J, M\rangle$ は式 (2.9) で表される縮退度だけ、つまり $(2J)!/[(J+M)!(J-M)!]$ の原子系の状態ケットが重ね合わされている。 N が小さいときは式 (2.31) のように簡単に書けるが原子の数が多い場合は大変なので、対称化演算子 S を用いて式 (2.30) で表される Dicke 状態を次のように略記する場合もある。

$$|J, M\rangle = S\left[\underbrace{+, +, \dots, +}_{J+M}, \underbrace{-, -, \dots, -}_{J-M}\right] \quad (2.32)$$

演算子 $\sigma_i^+ \sigma_i^-$ は i 番目の原子が励起状態にあるか否かを問い合わせる演算子で、励起状態であるならば固有値 1 を与える。基底状態ならば固有値 0 を与える。これとは逆に演算子 $\sigma_i^- \sigma_i^+$ は i 番目の原子が基底状態にあるか否かを問い合わせる演算子で、励起状態ならば固有値 0 を、基底状態ならば固有値 1 を与える。交換関係を表す式 (2.15) を用いれば次の関係式が成立する。

$$\langle J, M | \sum_i \sigma_i^+ \sigma_i^- | J, M \rangle = \langle J, M | \sum_i \left(\sigma_i^z + \frac{1}{2} \right) | J, M \rangle = J + M \quad (2.33)$$

$$\langle J, M | \sum_i \sigma_i^- \sigma_i^+ | J, M \rangle = \langle J, M | \sum_i \left(\frac{1}{2} - \sigma_i^z \right) | J, M \rangle = J - M \quad (2.34)$$

つまり、全ての原子について合成した演算子 $\sum_i \sigma_i^+ \sigma_i^-$ は励起状態にある原子の数、 $\sum_i \sigma_i^- \sigma_i^+$ は基底状態にある原子の数を固有値に持つ。系が状態 $|J, M\rangle$ にあるとき、この状態間の遷移は図 2.1 のようなエネルギー間隔が $\hbar\omega_0$ の $2J + 1 = N + 1$ 個のエネルギー準位のはしごを一番上の準位 $M = J$ からどんどん下に降りていきながら光子を放出していくようなイメージである。

次に Dicke 状態間の遷移確率を考えてみる。原子と電磁場の相互作用は dipole 相互作用で扱い、原子系は波長 $\lambda = hc/E$ に比べて十分小さい領域に存在すると仮定する。

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = -\mathbf{E}(\mathbf{0}) \cdot \sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j \quad (2.35)$$

分極演算子 \mathbf{P}_j は電子のエネルギー状態について表現をとったとき非対角成分のみを持つ

(電子のエネルギー状態を変える) 演算子であるので、 \mathbf{P}_j は次のように表現できる。

$$\sum_{j=1}^N \mathbf{P}_j = \sum_{j=1}^N \boldsymbol{\mu} \sigma_j^- + \boldsymbol{\mu}^* \sigma_j^+ = \boldsymbol{\mu} R_- + \boldsymbol{\mu}^* R_+ \quad (2.36)$$

$\boldsymbol{\mu}$ は遷移双極子モーメントである。電場 \mathbf{E} は光場に対応する電場であるが今は原子の電子状態に着目するので顕には取り扱わないことにする。1つの原子が光子を放出するレートは、

$$W_1 = |\langle -j | (\boldsymbol{\mu} \sigma_j^- + \boldsymbol{\mu}^* \sigma_j^+) | +j \rangle|^2 = |\boldsymbol{\mu}|^2 \quad (2.37)$$

であり、 j 番目電子が励起状態で見出される確率 P_+ は

$$\frac{\partial P_+}{\partial t} = -W_1 P_+ = -|\boldsymbol{\mu}|^2 P_+ \quad (2.38)$$

であるので1つの原子からは指数関数的な減衰をし、発光 ($\propto -\partial P_+ / \partial t$) も指数関数的減衰をする。一方で、一箇所に集まった N 個の原子系の光子放出レートは原子系が Dicke 状態であると仮定すれば、collective な分極演算子 R_{\pm} を用いて

$$W_N = |\langle J, M-1 | (\boldsymbol{\mu} R_- + \boldsymbol{\mu}^* R_+) | J, M \rangle|^2 \quad (2.39)$$

で与えられる。式(??)を用いれば

$$W_N = |\boldsymbol{\mu}|^2 (J+M)(J-M+1) \quad (2.40)$$

と計算できる。つまり遷移確率は原子が1つの場合とは異なり、一定ではなく原子系の大きさ J と励起状態の大きさ M に依存する。原子系が完全反転分布 $M=J$ 、励起状態と基底状態が半分ずつ $M=0$ 、すべて基底状態 $M=-J$ の場合は次のように計算できる。

$$\begin{aligned} M=J; W_N &= 2\Gamma J = |\boldsymbol{\mu}|^2 N \\ M=0; W_N &= \Gamma J(J+1) = |\boldsymbol{\mu}|^2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \\ M=-J; W_N &= 0 \end{aligned}$$

発光強度はこの遷移確率 W_N に比例するので、 N が充分に大きければ、 $M=0$ のとき、

$$W_N = |\boldsymbol{\mu}|^2 \frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \simeq |\boldsymbol{\mu}|^2 \frac{N}{2} \frac{N}{2} = |\boldsymbol{\mu}|^2 \frac{N^2}{4} \propto N^2$$

であるので、 $M=0$ のとき W_N は最大になるので、つまり発光強度のピーク値は原子数 N の2乗に比例することが分かる。また、発光スペクトルが左右対称なパルス状であるなら、発光スペクトルを時間で積分したもの、つまり面積は放出された光子に比例するので、面積は N に比例する。ピーク強度は N^2 に比例するので、面積はパルス幅とピーク強度の積に比例するので、このことからパルス幅は $\frac{1}{N}$ に比例することがわかる。このような発光を superradiance と呼ぶ。ところで、

$$\langle R_+ R_- \rangle \quad (2.41)$$

$$= \langle J, M | \left(\sum_i \sigma_i^+ \right) \left(\sum_j \sigma_j^- \right) | J, M \rangle = \sum_{i(\neq j)} \langle J, M | \sigma_i^+ \sigma_j^- | J, M \rangle + \sum_i \langle J, M | \sigma_i^+ \sigma_i^- | J, M \rangle \quad (2.42)$$

であるが、ここで異なる原子間の分極の相関 $\langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle$ が添字に依らない、つまり原子同士は同じ相関を持つと仮定すれば、

$$\langle R_+ R_- \rangle = N(N-1) \langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle + (J+M) \quad (2.43)$$

であり、(2.25) を用いれば分極の相関が次式のように得られる。

$$\langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle = \langle J, M | \sigma_i^+ \sigma_j^- | J, M \rangle = \frac{J^2 - M^2}{N(N-1)} \quad (2.44)$$

ここで $M=0$ のとき発光強度は最大になるが、そのときの分極の相関は、

$$\langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle |_{M=0} = \frac{J^2}{N(N-1)} = \frac{N^2}{4} \frac{1}{N(N-1)} = \frac{1}{4} \frac{N}{N-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{N}}$$

であるが、 N が充分大きい場合では、

$$\langle \sigma_i^+ \sigma_j^- \rangle |_{M=0} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (2.45)$$

と計算できる。つまり superradiance の場合、発光強度が最大値に達するとき分極の相関は 0.25 であることが分かる。分極の相関の直感的なイメージは異なる原子が持つ分極同士のコヒーレンス度合いを表すものであるが、superradiance の場合は分極の相関は 0 以上の値をとるので分極の向きが揃っている傾向にあると言える。 $M=0$ の時が縮退度が最大、つまり物質系のコヒーレンスが最も形成されていることになる。

2.2 Superradiance の発光特性

次に superradiance の発光の時間波形を具体的に求める [27]。原子（エネルギーギャップが $\hbar\omega_0$ の）が N 個ある場合の発光を考える。系のハミルトニアンを次のように置く。

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_0 R_z + \hbar\nu \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) + \hbar g (b^\dagger R_- + R_+ b) \quad (2.46)$$

以下、原子の共鳴周波数と光子のモード周波数は等しいと仮定する ($\omega_0 = \nu$)。発光強度

$$I = \frac{\partial}{\partial t} \langle b^\dagger b \rangle \quad (2.47)$$

を得るために、反転分布 R_z 、光子数 $b^\dagger b$ 、分極 $b^\dagger R_-$ の Heisenberg 方程式

$$\frac{\partial O}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [O, \mathcal{H}] \quad (2.48)$$

をそれぞれ求める。ここで系全体の状態を表す密度演算子を ρ として物理量 O の平均値を $\langle O \rangle = \text{Tr}[\rho O]$ で表す。

$$[R_z, \mathcal{H}] = \hbar g ([R_z, b^\dagger R_-] + [R_z, R_+ b]) \quad (2.49)$$

$$= \hbar g (b^\dagger [R_z, R_-] + [R_z, R_+] b) = -\hbar g (b^\dagger R_- - R_+ b) \quad (2.50)$$

$$[b^\dagger b, \mathcal{H}] = \hbar g([b^\dagger b, b^\dagger R_-] + [b^\dagger b, R_+ b]) \quad (2.51)$$

$$= \hbar g(b^\dagger [b, b^\dagger] R_- + R_+ [b^\dagger, b] b) = \hbar g(b^\dagger R_- - R_+ b) \quad (2.52)$$

$$[b^\dagger R_-, \mathcal{H}] = \hbar g([b^\dagger R_-, b^\dagger R_-] + [b^\dagger R_-, R_+ b]) \quad (2.53)$$

$$= \hbar g(b^\dagger [R_-, R_+] b + R_+ [b^\dagger, b] R_-) = -\hbar g(b^\dagger b R_z + R_+ R_-) \quad (2.54)$$

以上より、それぞれの運動方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = 2g \text{Im} \langle b^\dagger R_- \rangle \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial \langle R_z \rangle}{\partial t} = -2g \text{Im} \langle b^\dagger R_- \rangle \quad (2.56)$$

$$\frac{\partial \langle b^\dagger R_- \rangle}{\partial t} = -\gamma \langle b^\dagger R_- \rangle + ig(\langle b^\dagger b R_z \rangle + \langle R_+ R_- \rangle) \quad (2.57)$$

ここで分極の式(2.57)には現象論的に緩和項 $\gamma \langle b^\dagger R_- \rangle$ を導入している。さらにこの式(2.57)を断熱近似して解くと

$$\langle b^\dagger R_- \rangle = i \frac{g}{\gamma} (\langle b^\dagger b R_z \rangle + \langle R_+ R_- \rangle) \simeq i \frac{g}{\gamma} \langle R_+ R_- \rangle \quad (2.58)$$

となる。ここで誘導放出の項 $\langle b^\dagger b R_z \rangle$ は無視した。そうすると式(2.55)および式(2.56)は以下のようなになる。

$$\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = \frac{2g^2}{\gamma} \langle R_+ R_- \rangle \equiv T_1 \langle R_+ R_- \rangle \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial \langle R_z \rangle}{\partial t} = -T_1 \langle R_+ R_- \rangle = -\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} \quad (2.60)$$

ここで、いわゆる Einstein の A 係数に相当する、2準位系1つあたりの自然放出による光放出のレート T_1 は次式で与えられる。

$$T_1 = \frac{4|\boldsymbol{\mu}|^2 \omega_0^3}{3\hbar c^3} \quad (2.61)$$

$|\boldsymbol{\mu}|$ は遷移双極子モーメント、 c は光速である。そうすると、(2.60)より $\langle R_z \rangle$ がわかれば発光の様子がわかる。式(2.27)において、 $R^- R^+$ を $R^+ R^-$ で書き直してあげると次式が得られる。

$$\langle \mathbf{R}^2 \rangle = \langle R^+ R^- \rangle - \langle R_z \rangle + \langle R_z^2 \rangle \quad (2.62)$$

ここで、 $\langle \mathbf{R}^2 \rangle$ は系のトータルの角運動量を表すものであり、保存量である。そうすると $\langle \mathbf{R}^2 \rangle$ は初期時刻におけるものと同じである。具体的には、初期時刻において原子系は Dicke 状態 $|J, M\rangle$ で光子系は個数状態 $|n=0\rangle$ で系の状態が

$$|\chi\rangle = |J, M\rangle \otimes |0\rangle \quad (2.63)$$

で表されるとき、式(2.22)より

$$\langle \mathbf{R}^2 \rangle = \langle \chi | \mathbf{R}^2 | \chi \rangle = \langle J, M | \mathbf{R}^2 | J, M \rangle \otimes \langle 0 | 0 \rangle = J(J+1) \quad (2.64)$$

とかける。そうすると、

$$\langle R^+ R^- \rangle - \langle R_z \rangle + \langle R_z^2 \rangle = J(J+1) \quad (2.65)$$

これを (2.60) に代入する。ここで $\langle R_z \rangle = M(t) \equiv M$ と簡略してある。

$$\frac{dM}{dt} = T_1[M^2 - M - J(J+1)] = T_1(M+J)(M-J-1) \quad (2.66)$$

$t=0$ において $M(0) \equiv M_0$ とすると、式 (2.66) は次のように解ける。

$$\begin{aligned} \frac{1}{(M+J)(M-J-1)} dM &= T_1 dt \\ \frac{1}{2J+1} \left(\frac{1}{M-J-1} - \frac{1}{M+J} \right) &= T_1 dt \\ \int_{M_0}^{M(t) \equiv M} \left(\frac{d \log(M-J-1)}{dM} - \frac{d \log(J+M)}{dM} \right) dM &= T_1(2J+1) \int_0^t dt \\ \log \left(\frac{M-J-1}{M+J} \right) &= \log \left(\frac{M_0-J-1}{M_0+J} \right) + T_1(2J+1)t \end{aligned} \quad (2.67)$$

$$\frac{M-J-1}{M+J} = S_0 e^{T_1(2J+1)t}; \quad S_0 \equiv \frac{M_0-J-1}{M_0+J} \quad (2.68)$$

これを M について解いてあげると次式が得られる。

$$M(t) = \frac{1}{1 - S_0 e^{T_1(2J+1)t}} + \frac{J(1 + S_0 e^{T_1(2J+1)t})}{1 - S_0 e^{T_1(2J+1)t}} \quad (2.69)$$

ここで初期時刻において 2 準位系 (原子) が全て励起状態 (完全反転分布) にあった場合、つまり $|J = \frac{N}{2}, M = \frac{N}{2}\rangle$ だったとすると、 $S_0 = -\frac{1}{N}$ となるので、

$$M(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{N} e^{T_1(N+1)t}} + \frac{N}{2} \frac{1 - \frac{1}{N} e^{T_1(N+1)t}}{1 + \frac{1}{N} e^{T_1(N+1)t}} \quad (2.70)$$

であるが、

$$\frac{1}{N} e^{T_1(N+1)t} = e^{T_1(N+1)t + \log \frac{1}{N}} = e^{T_1(N+1)t - \log N} \quad (2.71)$$

に気をつけると

$$M(t) = \frac{1}{1 + e^{T_1(N+1)t - \log N}} + \frac{N}{2} \frac{1 - e^{T_1(N+1)t - \log N}}{1 + e^{T_1(N+1)t - \log N}} \quad (2.72)$$

$$= \frac{1}{1 + e^{T_1(N+1)\left[t - \frac{1}{T_1(N+1)} \log N\right]}} + \frac{N}{2} \frac{1 - e^{T_1(N+1)\left[t - \frac{1}{T_1(N+1)} \log N\right]}}{1 + e^{T_1(N+1)\left[t - \frac{1}{T_1(N+1)} \log N\right]}} \quad (2.73)$$

ここで

$$t_D \equiv \frac{1}{T_1(N+1)} \log N, \quad \Gamma \equiv \frac{T_1(N+1)}{2} \quad (2.74)$$

と置き換えてやると、

$$M(t) = \frac{1}{1 + e^{T_1(N+1)(t-t_D)}} + \frac{N}{2} \frac{1 - e^{T_1(N+1)(t-t_D)}}{1 + e^{T_1(N+1)(t-t_D)}} \quad (2.75)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2e^{-\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)} + 1}{e^{-\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)} + e^{\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)}} + \frac{N}{2} \frac{e^{-\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)} - e^{\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)}}{e^{-\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)} + e^{\frac{T_1(N+1)}{2}(t-t_D)}} \quad (2.76)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2e^{-\Gamma(t-t_D)}}{e^{\Gamma(t-t_D)} + e^{-\Gamma(t-t_D)}} - \frac{N}{2} \frac{e^{\Gamma(t-t_D)} - e^{-\Gamma(t-t_D)}}{e^{\Gamma(t-t_D)} + e^{-\Gamma(t-t_D)}} \quad (2.77)$$

そうすると双曲線関数

$$\operatorname{sech} ax = \frac{1}{\cosh ax} = \frac{2}{e^{ax} + e^{-ax}}, \quad \tanh ax = \frac{\sinh ax}{\cosh ax} = \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{ax} + e^{-ax}} \quad (2.78)$$

を思い出すと $\langle R_z \rangle = M(t)$ は次式のようになる。

$$\langle R_z \rangle = \frac{1}{2} e^{-\Gamma(t-t_D)} \operatorname{sech} \Gamma(t-t_D) - \frac{N}{2} \tanh \Gamma(t-t_D) \quad (2.79)$$

よって式 (2.47)、および式 (2.60) の関係より、双曲線関数の微分

$$\frac{d}{dt} \tanh ax = a \operatorname{sech}^2 ax, \quad \frac{d}{dt} \operatorname{sech} ax = -a \tanh ax \cdot \operatorname{sech} ax \quad (2.80)$$

をさらに思い出せば、原子系が Dicke 状態で表され、かつ初期時刻において完全反転分布であった場合の発光の時間変化は

$$I(t) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\Gamma(t-t_D)} (\tanh \Gamma(t-t_D) + 1) \operatorname{sech} \Gamma(t-t_D) + \frac{N\Gamma}{2} \operatorname{sech}^2 \Gamma(t-t_D) \quad (2.81)$$

と与えられる。ここで原子をたくさん用意 ($N \gg 1$) した状況を考えたとき、式 (2.74) は $\Gamma \simeq \frac{N T_1}{2} \propto N$ となるが、式 (2.81) の 1 項目は N 、2 項目は N^2 に比例しているので 1 項目を無視してみる。そうすると $N \gg 1$ という条件下では

$$I(t) \simeq \frac{N^2 T_1}{4} \operatorname{sech}^2 \frac{N T_1}{2} (t-t_D) \quad (2.82)$$

というように近似できる。 $\operatorname{sech}^2 ax$ は $x = 0$ のとき最大値をとり、さらにこの関数は Gauss 関数のような釣鐘のような形をしていてその半値全幅 τ_{width} は $\frac{1}{a} \log\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}\right) \propto \frac{1}{a}$ であるので、式 (2.82) から I の最大値を I_{peak} とすれば

$$I_{\text{peak}} \propto N^2, \quad \tau_{\text{width}} \propto \frac{1}{N} \quad (2.83)$$

という性質を持つ発光であることが分かった。以上のように、superradiance の発光の時間的な波形を厳密に導出することができた。一般の発光強度を表す式 (2.81) を $T_1 = 1$ とししてグラフに描いたものを図 2.2 に示す。

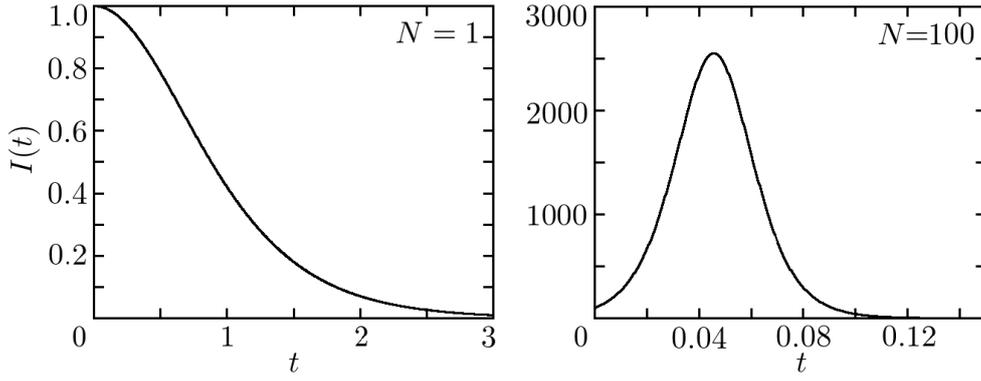


図 2.2 $N = 1$ (左) と $N = 100$ (右) の場合の発光強度 $I(t)$

2.3 Superradiance の古典論

最後に、superradiance が古典論の範囲でどのように記述されるかを見る [53, 54]。原子は電荷 e を持った質量 m の調和振動子とみなし、これが厚さが z の試料中に単位体積あたり N 個存在する (図 2.3)。まずこの試料をパルスで励起し、励起中は双極子からの輻射はないとする。励起パルスが試料を通り過ぎた時点 $t = z/c$ で全ての双極子の振幅は x_0 になっていて、双極子から放出される光を E とする。またこれらの調和振動子はすべて一様に光電場から力を受けるとする (光の波長に比べて十分小さい領域に調和振動子が存在すると考える)。調和振動子の平衡位置からのずれを x 、電場を E として、調和振動子の運動方程式は次式のようになる。

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = \frac{eE}{m} \quad (2.84)$$

また電場 E は分極を $P = Nex$ とした時の Maxwell 方程式

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{Ne}{c^2 \epsilon_0} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \quad (2.85)$$

に従う。電場 E はその振幅を E_0 として、

$$E(t, z) = 2E_0 \cos(\omega t - kz) \quad (2.86)$$

という \cos 波で表す。この時、調和振動子の振動の最大振幅を x_0 としたとき、式 (2.84) の解は電場の振動と同位相な部分と $\pi/2$ だけずれた部分との重ね合わせで表すことにして、

$$x(t) = x_0 \{u \cos(\omega t - kz) - v \sin(\omega t - kz)\} \quad (2.87)$$

と置く。式 (2.86) と式 (2.87) を式 (2.84) と式 (2.85) に代入すると E_0, u, v に関する方程式が得られる。式 (2.86)、式 (2.87) の時間・空間微分は

$$x'' = x_0 [u'' - u\omega^2 - 2v'\omega] \cos(\omega t - kz) + x_0 [-v'' + v\omega^2 - 2u'\omega] \sin(\omega t - kz) \quad (2.88)$$

$$E'' = [2E_0'' - 2E_0\omega^2] \cos(\omega t - kz) - 4E_0'\omega \sin(\omega t - kz) \quad (2.89)$$

$$E_{zz} = [2(E_0)_{zz} - 2k^2 E_0] \cos(\omega t - kz) + 4k(E_0)_z \sin(\omega t - kz) \quad (2.90)$$

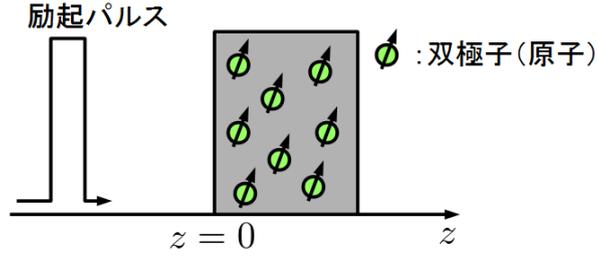


図 2.3 双極子系をパルスで励起した後の双極子振動とそこから放射の様子を考える。

であるので（関数 f の時間に関する 1 階・2 階微分をそれぞれ f', f'' 、空間に関する 2 階微分は f_{zz} で簡略してある）、式 (2.84) に関しては \cos の、式 (2.85) に関しては \sin の係数を比較すると

$$x_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\omega \frac{dv}{dt} \right) = \frac{2e}{m} E_0 \quad (2.91)$$

$$4k \frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{4\omega}{c^2} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{ex_0 N}{c^2 \epsilon_0} \left(-2\omega \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \omega^2 v \right) \quad (2.92)$$

が得られる。ここで電場の振動 ω に比べて、振幅 E_0, u, v の時間変化は十分小さいとする。つまり

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| \ll \omega v, \quad \left| \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right| \ll \left| \omega \frac{\partial v}{\partial t} \right| \quad (2.93)$$

とする。そうすると

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{e}{m\omega x_0} E_0 \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_0}{\partial t} = \frac{eNx_0\omega}{4c\epsilon_0} v \quad (2.95)$$

となる。ここで、調和振動子を励起させたパルスが通り過ぎた瞬間 τ を新しく時間の基準にとる。つまり

$$\tau = t - \frac{z}{c}, \quad z' = z \quad (2.96)$$

を用いて $(t, x) \rightarrow (\tau, z')$ という変換をする。それには、

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial z'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \tau}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial z'} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.98)$$

を用いればよくて、そうすると式 (2.94) と式 (2.95) は次式のようにになる。

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{e}{m\omega x_0} E_0 \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} = \frac{eNx_0\omega}{4c\epsilon_0} v \quad (2.100)$$

ここで $z' \rightarrow z$ とした。式 (2.99) を式 (2.100) に代入し、両辺に $z\tau$ を乗じる。

$$z\tau \frac{\partial^2 E_0}{\partial z \partial \tau} = -\frac{e^2 N z \tau}{4m c \epsilon_0} v \quad (2.101)$$

ここで再び変数変換

$$y^2 = \frac{e^2 N z \tau}{m c \epsilon_0} \quad (2.102)$$

を行う。そうすると

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{e^2 N \tau}{2 y m c \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.103)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial y}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{e^2 N z}{2 y m c \epsilon_0} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.104)$$

であるので、

$$z \tau \frac{\partial^2 E_0}{\partial z \partial \tau} = \frac{1}{4} y^2 \left(\frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2v}{y^2} \right) = -\frac{1}{4} y^2 v$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{y} \frac{\partial v}{\partial y} + v = 0 \quad (2.105)$$

が得られる。これは Bessel 型微分方程式 [55]

$$x \frac{d}{dx} \left(x \frac{dy(x)}{dx} \right) + (x^2 - \alpha^2) y(x) = 0 \quad (2.106)$$

で $\alpha = 0$ とした場合に一致する。式 (2.106) の解は次のような Bessel 関数である。

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2m + \alpha} \quad (2.107)$$

よって調和振動子の振幅 v は任意定数 v_0 、Bessel 関数を用いて次のように得られる。

$$v = v_0 J_0 \left(\sqrt{\frac{z \tau}{c}} \omega_P \right) \quad (2.108)$$

ここで、

$$\omega_P = \sqrt{\frac{e^2 N}{m \epsilon_0}} \quad (2.109)$$

これは荷電粒子の集団が振動するときのプラズマ振動数に対応する。つまり複数調和振動子の集団は、振動子から放射された電場によって集団的に振動しているということになる。この解 (2.109) を式 (2.99) に代入すれば電場の振幅 E_0 が得られる。ここで Bessel 関数 J_0 の微分は

$$\frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x) \quad (2.110)$$

であるので、これを用いれば

$$E_0 = \frac{m \omega x_0 v_0 \omega_P}{2e} \sqrt{\frac{z}{c \tau}} J_1 \left(\sqrt{\frac{\tau z}{c}} \omega_P \right) \quad (2.111)$$

が得られる。 J_1 を展開したときの初項だけとれば、 $J_1(x) \simeq x/2 + O(x^2)$ なので、 $E_0 \propto \omega_P^2 \propto N$ となる。そうすると光の強度 I は $T \propto E_0^2 \propto N^2$ という調和振動の数 N の 2 乗に比例するという superradiance の性質が得られる。また特徴的な振動数を表す式 (2.109) の逆数

$$\tau_P \equiv \frac{1}{\omega_P} = \sqrt{\frac{m \epsilon_0}{e^2 N}} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (2.112)$$

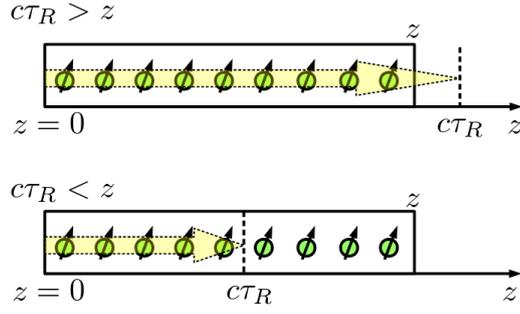


図 2.4 $\tau_R > z/c$ (上) と $\tau_R < z/c$ (下) の場合における光の伝播の様子。

は Arecchi が導入した協力時間に対応する [56]。ここで、 z は試料の厚さだと思って一定値とし、 E_0 が $\tau = 0$ 近傍で 0 になる τ_R を探してみる。 $J_1(x)$ は最初の 2 項までとってみると、

$$\frac{m\omega x_0 v_0 \omega_P}{2e} \sqrt{\frac{z}{c\tau_R}} J_1\left(\sqrt{\frac{\tau_R z}{c}} \omega_c\right) \simeq \frac{m\omega x_0 v_0 \omega_P}{2e} \sqrt{\frac{z}{c\tau_R}} \left(1 - \frac{z\tau_R}{8c} \omega_P^2\right) = 0$$

$$\tau_R = \frac{8c}{z} \cdot \frac{1}{\omega_P^2} = \frac{8c}{z} \tau_P^2 \propto \frac{1}{N} \quad (2.113)$$

となる。 E_0 の概形は $e^{-x} \cos x$ のような振動しながら減衰していく形であるが、最初の $E_0 = 0$ になるまでの時間は N に反比例している。これは複数調和振動子系からの発光を特徴付ける定数で superradiance 寿命と呼ばれており、双極子の数に比例して早く双極子系は緩和する。誘導放出が生じないためには、双極子系から生じた光が直ちに試料から出て行かないければならない。つまり光が試料を通過する時間 z/c よりも τ_R が長い必要がある。つまり、

$$\tau_R > \tau_P > \frac{z}{c} \quad (2.114)$$

という条件が導かれる。この時、試料全体を覆う形で光が伝播するので試料中全ての双極子がコヒーレントに結合することができる。 $\tau_R < z/c$ では、 $c\tau_R$ の範囲でしかコヒーレンスを形成できずそこからの superradiance による光が、範囲外に存在する双極子と相互作用することで誘導放出が生じると考えられる (図 2.4)。 $\tau_R = 1$ の場合で双極子系からの輻射の大きさ $|E_0(\tau)/E_0(0)|^2$ をグラフにしたものを図 2.5 に示す。ここで $E_0(0) = 2m\omega x_0 v_0/e$ である。図 2.5 からわかるように、 $\tau = \tau_R = 1$ までの間に双極子系が保持していたエネルギーのほとんどを放出していることがわかる。 $\tau = 1$ 以降は、誘導放出による小さな立ち上がりが見られる。以上から、superradiance の性質である発光強度が原子の数の 2 乗に比例して大きくなること、原子の数に比例して原子系の緩和が早くなるのが古典論の範囲からでも得られる。

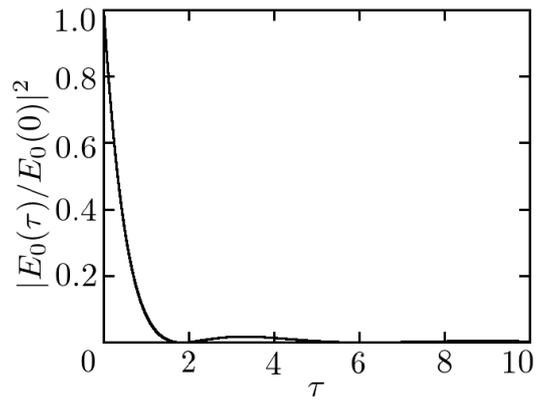


図 2.5 $\tau_R = 1$ とした場合の双極子系から放射される発光の大きさ

3 蔵本モデルの一般論

3.1 位相縮約

ここではまず、同期現象を記述する理論モデルを導出する方法の1つである位相縮約について説明する。これは、位相空間上の系の状態を表す状態点がある閉軌道上に沿って周期的に回転しているとする。この位相空間上に位相を定義することで、力学系を記述する方程式から、位相の変数のみで表された運動方程式を得ることである [57, 58, 59]。

3.1.1 リミットサイクルとアイソクロン

ある系の運動方程式が \mathbf{X} を物理量を表す変数として次式のように表せるとする。

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.1)$$

$\mathbf{X}(t)$ というのはある時刻 t における系の状態を表し、位相空間 (X_1, X_2, \dots, X_N) 上の1つの状態点である。この状態点 \mathbf{X} が、図 3.1(a) で示されているような閉曲線上を周期的に運動しているとする。この時、この閉曲線をリミットサイクル (limit cycle: LC) と呼び、このような系の運動をリミットサイクル運動と呼ぶ。(3.1) の解であるようなリミットサイクルを $\mathbf{X}_0(t)$ とし、このサイクル上で位相 (phase) を

$$\phi(\mathbf{X}_0(t)) \equiv \omega t \quad (3.2)$$

と定義する。ただし、本来は状態点の角周波数は時間的に一定ではないが、長時間平均したと考え、 ω という一定の角周波数でリミットサイクル上を回転しているものとする。

ここで、図 3.1(b) のように、系に弱い外力が一瞬加わったとして状態点がリミットサイクルから少しずれたとし、その時刻を t_0 とし、その時の状態点を \mathbf{X}_1 としておく。外力が弱ければ、十分時間が経過すればこの状態点はリミットサイクル上に戻ってくると考えられる。つまり \mathbf{X}_1 はリミットサイクル近傍の周りを回転しながら最終的にあるリミットサイクル上の点に到達する。この点の位相を $\phi(\mathbf{X}_0(t_1)) = \phi_1$ とし、リミットサイクル上に無い状態点 \mathbf{X}_1 の位相を

$$\phi(\mathbf{X}_1) \equiv \phi(\mathbf{X}_0(t_1)) = \phi_1 \quad (3.3)$$

とすることにして、リミットサイクル以外の位相空間上にも位相を定義することができる。つまり位相空間上の状態点は LC 上のいずれかの状態点の位相に対応させるのである。そうすると、 \mathbf{X}_1 以外にも位相が ϕ_1 になるような状態点が複数存在し、それらを全部集めた集合のことを ϕ_1 に関するアイソクロンと呼び、図 3.1(b) の赤い曲線に相当する。図 3.1(b) で言うならば、このアイソクロン上に存在する状態点の位相は、全てリミットサイクル上の位相 $\phi_1 = \phi(\mathbf{X}_0(t_1))$ と同一視するのである。アイソクロン上の点は各周期ごとと同じアイソクロン上に存在する。初期時刻 t_0 で系の状態が \mathbf{X}_1 であれば、近似的に時刻 t における状態点 \mathbf{X}_1 の位相は式 (3.3) を用いて、

$$\phi(\mathbf{X}_1(t)) = \phi_1 + \omega t \quad (3.4)$$

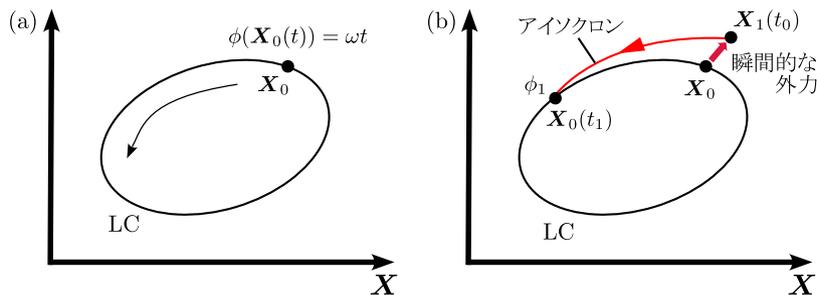


図 3.1 リミットサイクル (LC) とアイソクロンの概略図。(a) 系の状態を位相空間上 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_N)$ で表現した時、系の状態点時間が共にある閉曲線上を周期的に移動するとき、この曲線をリミットサイクルと呼び、この時の系の運動をリミットサイクル運動と呼ぶ。(b) 瞬間的な外力を受けた後、 $\mathbf{X}_1(t_0)$ から $\mathbf{X}_0(t_1)$ に戻る時に系の状態点描く軌道がアイソクロンであり、この曲線上の状態点の位相を、LC 上の位相と同一視する。

である。状態点 \mathbf{X}_1 だけでなく、任意の状態点 \mathbf{X} で式 (3.4) のような関係が成り立つとすれば、(3.4) より、

$$\frac{d\phi(\mathbf{X}(t))}{dt} = \omega \quad (3.5)$$

であることがわかる。また、

$$\frac{d\phi(\mathbf{X}(t))}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X})$$

であるので、

$$\nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \omega \quad (3.6)$$

とも書ける。

3.1.2 摂動系における位相縮約

先の系に弱い摂動が働く状況を考える。この時、式 (3.1) は摂動の大きさを e として

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) + e\mathbf{G}(\mathbf{X}) \quad (3.7)$$

と変更する。そうすると、式 (3.6) より

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{X}(t))}{dt} &= \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot [\mathbf{F}(\mathbf{X}) + e\mathbf{G}(\mathbf{X})] \\ &= \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X}) + \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot e\mathbf{G}(\mathbf{X}) \\ \frac{d\phi(\mathbf{X}(t))}{dt} &= \omega + \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) \cdot e\mathbf{G}(\mathbf{X}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

ここで、摂動が十分小さいとして、リミットサイクル \mathbf{X}_0 からのズレが e に比例するとすれば、無摂動系におけるリミットサイクルを位相の関数として

$$\mathbf{X}_0(\phi) \equiv \mathbf{X}_0\left(\frac{\phi}{\omega}\right) \quad (3.9)$$

のように再定義しておく、 \mathbf{X} は

$$\mathbf{X}(t) \simeq \mathbf{X}_0(\phi) + O(e) \quad (3.10)$$

と近似できる。この時、式 (3.8) 右辺第 2 項をリミットサイクル \mathbf{X}_0 近傍で Taylor 展開する。すると、

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}) &\equiv \frac{\partial\phi(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} \simeq \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} + \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{X}'} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} O(e) \\ &\equiv \mathbf{Z}(\phi) + O(e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(\mathbf{X}) &\simeq \mathbf{G}(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} + \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{X})|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} O(e) \\ &= \mathbf{G}(\mathbf{X}_0) + O(e) \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{Z}(\phi)$ は位相感受関数で

$$\mathbf{Z}(\phi) \equiv \left. \frac{\partial\phi(\mathbf{X})}{\partial\mathbf{X}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_0} \quad (3.11)$$

で定義されている。そうすると e の 1 次まで残せば、式 (3.8) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{X}(t))}{dt} &= \omega + [\mathbf{Z}(\phi) + O(e)] \cdot [\mathbf{G}(\mathbf{X}_0) + O(e)] \\ \frac{d\phi(\mathbf{X}(t))}{dt} &= \omega + e\mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{X}_0) \end{aligned} \quad (3.12)$$

これが摂動下における系の位相方程式である。このように系の運動方程式を位相だけで閉じた方程式に落とし込むことを位相縮約という。

3.1.3 結合振動子系の位相ダイナミクス

N 個の LC 運動している振動子系

$$\frac{d\mathbf{X}_j}{dt} = \mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) \quad (3.13)$$

$$\phi(\mathbf{X}_j(t)) = \omega_j t \quad (3.14)$$

が互いに弱い相互作用によって結合しているような状況を考える (式 (3.13)、および式 (3.14) は摂動が無いとき、つまりリミットサイクル運動の場合)。この時 j 番目の振動子に関する運動方程式が

$$\frac{d\mathbf{X}_j}{dt} = \mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) + e \sum_{k=1}^N A_{jk} \mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) \quad (3.15)$$

と書けるとする。 $N \times N$ 行列 $\mathbf{A} = [A_{jk}]$ は k 番目の振動子から j 番目のものへの結合の大きさを表す。この式 (3.15) に対して位相縮約を行う。

$$\begin{aligned} \frac{d\phi(\mathbf{X}_j(t))}{dt} &= \nabla_{\mathbf{X}_j}\phi(\mathbf{X}_j) \cdot \frac{d\mathbf{X}_j}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}_j}\phi(\mathbf{X}_j) \cdot [\mathbf{F}_j(\mathbf{X}_j) + e \sum_{k=1}^N A_{jk} \mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k)] \\ &= \omega_j + \nabla_{\mathbf{X}_j}\phi(\mathbf{X}_j) \cdot e \sum_{k=1}^N A_{jk} \mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) \end{aligned}$$

先と同じように、

$$\mathbf{X}_j(t) \simeq \mathbf{X}_{j0}(\phi) + O(\lambda e), \quad \mathbf{X}_{j0}(\phi) \equiv \mathbf{X}_{j0} \left(\frac{\phi}{\omega_j} \right) \quad (3.16)$$

とすれば、先と同様に

$$\frac{d\phi(\mathbf{X}_j(t))}{dt} = \omega_j + e \sum_{k=1}^N A_{jk} \mathbf{Z}(\phi_j) \mathbf{G}_{jk}(\phi_j, \phi_k) \quad (3.17)$$

が得られる。ただし、

$$\mathbf{Z}(\phi_j) \equiv \left. \frac{\partial \phi(\mathbf{X}_j)}{\partial \mathbf{X}_j} \right|_{\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_0} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{G}_{jk}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) \equiv \mathbf{G}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) \Big|_{\mathbf{X}_j = \mathbf{X}_{j0}, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k0}} \quad (3.19)$$

である。

3.2 蔵本モデル

先ほど導出した式 (3.19) において、 N 個の振動子が一様に結合 ($A_{jk} = \text{const.}$) しており、相互作用を $e\mathbf{Z}(\phi_j) \cdot \mathbf{G}_{jk}(\phi_j, \phi_k) = KN^{-1} \sin(\phi_j - \phi_k)$ のように設定し、 j 番目の振動子の位相を ϕ_j 、固有振動数を ω_j で表したとき、次式が得られる。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j) \quad (3.20)$$

これは、図 3.2 で表されるような、 N 個の振動子が、相互作用係数 K の大きさに一様に結合している系の位相ダイナミクスを表す式で、蔵本モデルと呼ばれる [14, 16, 57]。ここで簡単な例として、固有振動数が同じ ω の振動子 2 つが K で結合しているときを考える。それらが従う位相に関する運動方程式は

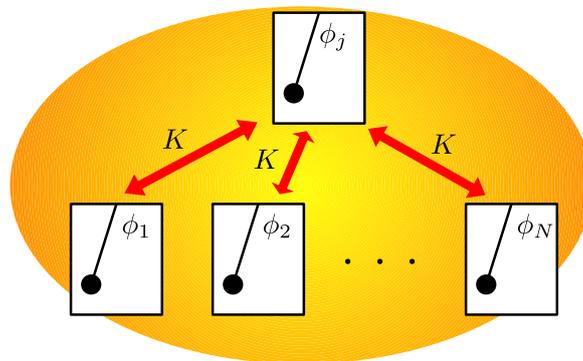


図 3.2 蔵本モデルの概略図。振動子集団が一様に相互作用係数 K の大きさに結合することで、 j 番目の振動子の位相は、他の振動子からの影響を受ける。

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega - \frac{K}{2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \quad (3.21)$$

$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega - \frac{K}{2} \sin(\phi_2 - \phi_1) \quad (3.22)$$

である。ここで $K < 0$ の場合を考え、位相差 $\psi = \phi_1 - \phi_2$ がどうなるかを調べる。そうすると式 (3.21) から式 (3.22) を引くことで、

$$\frac{d\psi}{dt} = |K| \sin \psi \quad (3.23)$$

のような位相差に関する方程式が得られる。これは変数分離型の手法で解くことができる。

$$\int_{\psi_0}^{\psi} \frac{1}{\sin \psi} d\psi = |K| \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \ln \left| \tan \frac{\psi}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{\psi_0}{2} \right| = |K|t$$

両辺の自然対数をとった後、 \tan^{-1} をとることで次式が得られる。

$$\psi = 2 \tan^{-1} \left(\tan \frac{\psi_0}{2} e^{|K|t} \right) \quad (3.24)$$

そうすると、十分時間が経過 ($t \rightarrow \infty$) したときを考えると、 $e^{|K|t} \rightarrow \infty$ であるので、 $\tan^{-1}(\tan(\psi_0/2)e^{|K|t}) \rightarrow \infty$ となり

$$\psi = 2 \tan^{-1}(\infty) = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\psi = \phi_1 - \phi_2 = \pi \quad (3.25)$$

が得られる。つまり、互いに逆位相で振動することになり、 $K < 0$ の場合は振動子間に互いの位相差を広げるような反発的な相互作用が作用することに相当する。一方で $K > 0$ の場合、式 (3.24) は

$$\delta = 2 \tan^{-1} \left(\tan \frac{\psi_0}{2} e^{-Kt} \right) \quad (3.26)$$

である。十分時間が経過 ($t \rightarrow \infty$) したとき、 $e^{-Kt} \rightarrow 0$ より、 $\tan^{-1}(\tan(\psi_0/2)e^{-Kt}) \rightarrow 0$ であるので、

$$\psi = \phi_1 - \phi_2 = 0 \quad (3.27)$$

という結論が得られる。つまり、2つの振動子は同位相で振動することになり、 $K > 0$ の場合は、振動子間に互いの位相を引き込むような引力的な相互作用が作用することに相当する。振動子の数が少ない場合は解析的に解けるかもしれないが、一般に振動子の数が多い場合は困難である。式 (3.20) で表される蔵本モデルは顕に各振動子からの相互作用を考慮している。そこで、複数の振動子を粗視化した、平均場のような1つの巨視的な振動子を導入することを考える。これにより、ある i 番目の振動子に着目し、これと巨視的な振動子と相互作用しているという2体の系に考え直すことができる。それをするには秩序変数

$$Z(t) = |Z(t)| e^{i\Theta(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j(t)} \quad (3.28)$$

を導入することで可能で、十分に時間が経過したとき、

$$|Z|(t) = |Z| = \text{const.}, \quad \Theta = \Omega t \quad (3.29)$$

という関係が成すると仮定すると、式 (3.28) より

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j) &= -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_j - \phi_i) = -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \text{Im}[e^{i(\phi_j - \phi_i)}] \\ &= -\text{Im} \left[\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\phi_j} \right) e^{-i\phi_i} \right] = -\text{Im}[|Z|e^{i\Theta}e^{-i\phi_i}] \\ &= -|Z|\text{Im}[e^{i(\Theta - \phi_i)}] = |Z|\sin(\phi_i - \Theta) \end{aligned}$$

であるので式 (3.20) は次式のように書き直せる。

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i - K|Z|\sin(\phi_i - \Theta) \quad (3.30)$$

この式 (3.30) は、図 3.3 で表されるように、 i 番目の振動子と、粗視化された振動子集団を表す平均場との 2 体の相互作用の問題に帰着されたことを表す。図 3.4 に表されているように、秩序変数 $|Z|(0 \leq |Z| \leq 1)$ は複数ある振動子のうちどれくらい同期しているかを表す指標みたいなもので、これを具体的に求めれば振動子系が同期しているかどうか分かる。ここで、巨視的な振動子との位相差を表す新しい変数

$$\psi_i = \phi_i - \Theta, \quad -\pi < \psi_i \leq \pi \quad (3.31)$$

を導入する。そうすると (3.30) は

$$\frac{d\psi_i}{dt} = \omega_i - \Omega - K|Z|\sin \psi_i \quad (3.32)$$

と書き直せる。また位相差 ψ を持つ振動子の状態密度を

$$n(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\psi - \psi_j) \quad (3.33)$$

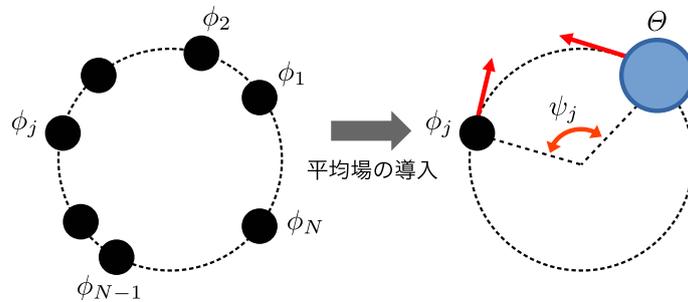


図 3.3 平均場を用いた場合の蔵本モデルの概略図。各振動子の位相（黒点）を、単位円周上（点線の円）に表現した。水色の大きい点は振動子集団を粗視化した平均場を表す。

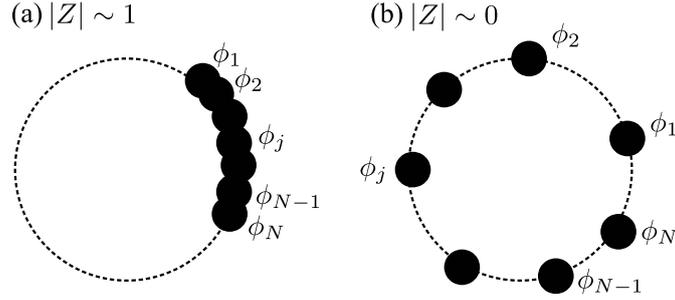


図 3.4 秩序変数の概略図。(a) $|Z| \sim 1$ は、全ての振動子の位相が概ね揃っている状態を表し、 $|Z| = 1$ では全ての振動子の位相は完全に揃っている状態を示す。(b) $|Z| \sim 0$ では、各振動子は同期せずにそれぞれが持つ固有振動数によって振動する状態を表す。

と表すと、式 (3.28) は

$$|Z| = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\psi_j} = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\psi - \psi_j) \right) e^{i\psi}$$

$$|Z| = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi n(\psi) e^{i\psi} \quad (3.34)$$

と直せる。式 (3.32) を見ると、 $|\omega_i - \Omega|$ が十分小さく、相互作用の部分 $|Z|K \sin \psi_i$ が効いてくるとき巨視的な振動子に引き込まれてこれと同期すると考えられる。 N 個ある振動子のうち巨視的振動子と同期している振動子の分布を n_{coh} と表し、この振動子を coherent な振動子と呼ぶ。一方で、 $|\omega_i - \Omega|$ が大きい場合、相互作用を振り切って元々の固有振動数で回ろうとするときは同期しないと考えられる。この振動子の分布を $n_{\text{incoh}}(\psi)$ と書いて、この分布に従う振動子を incoherent な振動子と呼ぶ。そうすると位相差の分布を表す式 (3.33) は

$$n(\psi) = n_{\text{coh}}(\psi) + n_{\text{incoh}}(\psi)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j \in \text{coherent}} \delta(\psi - \psi_j) + \frac{1}{N} \sum_{j' \in \text{incoherent}} \delta(\psi - \psi_{j'}) \quad (3.35)$$

と coherent 振動子分布と incoherent 振動子分布の和で表せる。ここから具体的に $n_{\text{coh}}, n_{\text{incoh}}$ を求める。

3.3 Coherent な振動子 ($|\omega_i - \Omega| < K|Z|$)

図 3.5(a) のように、十分に時間が経過したとき、振動子は巨視的な振動子に引き込まれて同期（位相差が一定）しながら振動していると考えられる。その時の位相差 ψ は式 (3.32) の定常解を求めればよくて、

$$\psi_i = \sin^{-1} \left(\frac{\omega_i - \Omega}{K|Z|} \right) \text{ or } \omega_i = \Omega - K|Z| \sin \psi_i \quad (3.36)$$

が得られる。そうすると式 (3.34) より

$$n_{\text{coh}}(\psi) = \frac{1}{N} \sum_{j \in \text{coherent}} \delta \left[\psi - \sin^{-1} \left(\frac{\omega_j - \Omega}{K|Z|} \right) \right] H(\cos \psi) \quad (3.37)$$

である。ここで $H(x)$ は Heaviside 階段関数

$$H(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (3.38)$$

で、 \sin^{-1} が主値 ($|\sin^{-1} x| < \frac{\pi}{2}$) をとることをこの階段関数で表している。振動子の振動数の状態密度を

$$f(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(\omega - \omega_j) \quad (3.39)$$

で定義すると、式 (3.37) は

$$(3.37) = \int_{|\omega - \Omega| < K|Z|} d\omega \frac{1}{N} \sum_{j \in \text{coherent}} \delta(\omega - \omega_j) \delta \left[\psi - \sin^{-1} \left(\frac{\omega - \Omega}{K|Z|} \right) \right] H(\cos \psi)$$

$$n_{\text{coh}}(\psi) = \int_{|\omega - \Omega| < K|Z|} d\omega f(\omega) \delta \left[\psi - \sin^{-1} \left(\frac{\omega - \Omega}{K|Z|} \right) \right] H(\cos \psi) \quad (3.40)$$

と書ける。ここで δ 関数を ω の関数として処理したい。そうすると次の δ 関数の性質を思い出す必要がある。

$$\delta(F(x)) = \sum_{\{a|F(a)=0\}} \frac{1}{|F'(a)|} \delta(x - a) \quad (3.41)$$

そうすると、

$$\frac{d}{d\omega} \left[\psi - \sin^{-1} \left(\frac{\omega - \Omega}{K|Z|} \right) \right] = \frac{-1}{K|Z|} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega - \Omega}{K|Z|} \right)^2}} \quad (3.42)$$

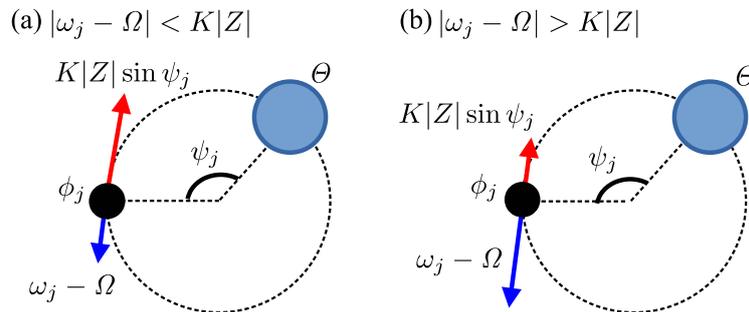


図 3.5 (a)coherent と (b)incoherent な振動子の概略図。(a)coherent な振動子は、振動子間に作用する同期させる相互作用の大きさが、振動子間の周波数離調の大きさを上回ることで、振動子と平均場は引き込まれ、平均場と同期する。(b)incoherent な振動子は、逆に、振動子間に作用する同期させる相互作用の大きさが振動子間の周波数離調よりも小さいと、振動子は位相を引き込む相互作用を振り切るので、平均場と同期しない。

であるので、

$$\left| \frac{d}{d\omega} \left[\psi - \sin^{-1} \left(\frac{\omega - \Omega}{K|Z|} \right) \right] \right|_{\omega = \Omega + K|Z| \sin \psi} = \frac{1}{K|Z| \cos \psi} \quad (3.43)$$

が得られる。よって δ 関数の部分は次式のように書き直される。

$$\delta \left[\psi - \sin^{-1} \left(\frac{\omega - \Omega}{K|Z|} \right) \right] = K|Z| \cos \psi \delta[\omega - (\Omega + K|Z| \sin \psi)] \quad (3.44)$$

よって式 (3.39) を、式 (3.44) を用いて積分の処理をすれば、coherent 振動子の分布が次式のように得られる。

$$n_{\text{coh}}(\psi) = K|Z| \cos \psi f(\Omega + K|Z| \sin \psi) H(\cos \psi) \quad (3.45)$$

3.4 Incoherent な振動子 ($|\omega_i - \Omega| > K|Z|$)

図 3.5(b) で表されているように、振動子は巨視的な振動子に引き込まれず、式 (3.32) に従いながら同期しないまま振動する。この場合直接 ψ_i を求めるのは難しいので、位相差の分布を次のように書き直す。

$$n_{\text{incoh}}(\psi) = \int_{|\omega - \Omega| > K|Z|} d\omega \rho(\psi, \omega) f(\omega) \quad (3.46)$$

このとき分布関数 $\rho(\psi, \omega)$ は次の（分布に関する）連続の方程式に従うものとする。

$$\frac{\partial \rho(\psi, \omega)}{\partial t} + \frac{\partial (v(\psi) \rho(\psi, \omega))}{\partial \psi} = 0 \quad (3.47)$$

$$v = \omega - \Omega - K|Z| \sin \psi \quad (3.48)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\psi, \omega) d\psi = 1 \quad (3.49)$$

式 (3.47) より定常状態では、

$$\frac{\partial (v(\psi) \rho(\psi, \omega))}{\partial \psi} = 0 \Rightarrow v(\psi) \rho(\psi, \omega) = \text{const.} \equiv C$$

$$\rho(\psi, \omega) = \frac{C}{v} = C \frac{1}{|\omega - \Omega - K|Z| \sin \psi|} \quad (3.50)$$

であり、 C は規格化条件 (3.49) より、

$$C = \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{|\omega - \Omega - K|Z| \sin \psi|} d\psi \right]^{-1}$$

から得られる。定積分は実行できて、公式

$$\int \frac{1}{A + B \sin x} dx = \frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2}} \tan^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}} \left(A \tan \frac{x}{2} + B \right) \right]; \quad (A > B) \quad (3.51)$$

を用いれば、

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{(\omega - \Omega)^2 - (K|Z|)^2} \quad (3.52)$$

と定まる。よって分布関数 ρ は次式のように書ける。

$$\rho(\psi, \omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sqrt{(\omega - \Omega)^2 - (K|Z|)^2}}{|\omega - \Omega - K|Z| \sin \psi|} \quad (3.53)$$

よって式 (3.46) は、

$$\begin{aligned} n_{\text{incoh}}(\psi) &= \int_{|\omega - \Omega| > K|Z|} d\omega \frac{f(\omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{(\omega - \Omega)^2 - (K|Z|)^2}}{|\omega - \Omega - K|Z| \sin \psi|} \\ &= \int_{\Omega + K|Z|}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{(\omega - \Omega)^2 - (K|Z|)^2}}{|\omega - \Omega - K|Z| \sin \psi|} + \int_{-\infty}^{\Omega - K|Z|} d\omega \frac{f(\omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{(\omega - \Omega)^2 - (K|Z|)^2}}{|\omega - \Omega - K|Z| \sin \psi|} \\ &= \int_{K|Z|}^{\infty} dx \frac{f(x + \Omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{|x - K|Z| \sin \psi|} + \int_{-\infty}^{-K|Z|} dx \frac{f(x + \Omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{|x - K|Z| \sin \psi|} \\ &= \int_{K|Z|}^{\infty} dx \frac{f(x + \Omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{|x - K|Z| \sin \psi|} + \int_{\infty}^{K|Z|} (-dx) \frac{f(-x + \Omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{|-x - K|Z| \sin \psi|} \\ &= \int_{K|Z|}^{\infty} dx \frac{f(x + \Omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{x - K|Z| \sin \psi} + \int_{K|Z|}^{\infty} dx \frac{f(x + \Omega)}{2\pi} \frac{\sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{x + K|Z| \sin \psi} \\ &= \int_{K|Z|}^{\infty} dx \frac{f(x + \Omega)}{2\pi} \sqrt{x^2 - (K|Z|)^2} \left[\frac{1}{x - K|Z| \sin \psi} + \frac{1}{x + K|Z| \sin \psi} \right] \end{aligned}$$

$$n_{\text{incoh}}(\psi) = \int_{K|Z|}^{\infty} dx \frac{f(x + \Omega)}{\pi} \frac{x \sqrt{x^2 - (K|Z|)^2}}{x^2 - (K|Z| \sin \psi)^2} \quad (3.54)$$

と求められる。(3.54) より、

$$n_{\text{incoh}}(\psi \pm \pi) = n_{\text{incoh}}(\psi) \quad (3.55)$$

であることがわかる。

3.5 集団同期転移

3.3 章、および 3.4 章の議論から coherent と incoherent な振動子の分布を求められたので、式 (3.34)、および式 (3.36) から秩序変数 $|Z|$ が求められる。

$$|Z| = \int_{-\pi}^{\pi} d\psi n_{\text{coh}}(\psi) e^{i\psi} + \int_{-\pi}^{\pi} d\psi n_{\text{incoh}}(\psi) e^{i\psi} \quad (3.56)$$

ここで、incoherent 振動子からの寄与だが、式 (3.55) で表される性質より

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\psi n_{\text{incoh}}(\psi) e^{i\psi} = 0 \quad (3.57)$$

であるので $|Z|$ には寄与しない。これは次のように確かめることが出来る。実数値関数 $F(x), G(x)$ がそれぞれ

$$F(x \pm \pi) = F(x), \quad G(x \pm \pi) = -G(x) \quad (3.58)$$

という性質をもつとする。このとき次の積分を考える。

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)G(x)dx \quad (3.59)$$

これは式 (3.58) で表される性質を用いると

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)G(x)dx = \int_0^{\pi} F(x)G(x)dx + \int_{-\pi}^0 F(x)G(x)dx \quad (3.60)$$

右辺の第2項目は $X = x + \pi$ という変数変換を施すと

$$\int_{-\pi}^0 F(x)G(x)dx = \int_0^{\pi} F(X - \pi)G(X - \pi)dX = - \int_0^{\pi} F(X)G(X)dX \quad (3.61)$$

であることがわかるので、式 (3.61) を式 (3.60) に代入すれば、式 (3.59) は

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)G(x)dx = 0 \quad (3.62)$$

と計算できる。

$$F(\psi) = n_{\text{incoh}}(\psi), \quad G(\psi) = e^{i\psi} \quad (3.63)$$

というように対応させることができるので、式 (3.56) が導かれ、よって coherent 振動子の寄与だけを考えればよい。そうすると式 (3.45) より、 $|Z|$ 実数なので右辺は実部をとればよくて

$$\begin{aligned} |Z| &= \text{Re} \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\psi n_{\text{coh}}(\psi) e^{i\psi} \right] \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\psi K|Z| \cos^2 \psi f(\Omega + K|Z| \sin \psi) H(\cos \psi) \\ |Z| &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi K|Z| \cos^2 \psi f(\Omega + K|Z| \sin \psi) \end{aligned} \quad (3.64)$$

という $|Z|$ に関する自己無撞着な方程式が得られた。 $|Z|$ を十分小さいとして $f(\Omega + K|Z| \sin \psi)$ を $|Z|$ について展開する。

$$\begin{aligned} (3.64) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi K|Z| \left[f(\Omega) + K|Z| \sin \psi f'(\Omega) + (K|Z| \sin \psi)^2 \frac{f''(\Omega)}{2} + O(|Z|^3) \right] \cos^2 \psi \\ &= K|Z| \left[\frac{\pi}{2} f(\Omega) + \frac{\pi}{16} K^2 |Z|^2 f''(\Omega) \right] \end{aligned}$$

であるので、式 (3.64) は次式のように書き換えられる。

$$|Z| \left[\left(\frac{\pi}{2} f(\Omega) K - 1 \right) + \frac{\pi K^3 f''(\Omega)}{16} |Z|^2 \right] = 0 \quad (3.65)$$

この式は Ginzburg-Landau 方程式の形になっている。これより自明な解 $|Z| = 0$ と非自明な解

$$|Z| = \sqrt{\frac{16}{\pi K^3 |f''(\Omega)|} \left(\frac{\pi f(\Omega)}{2} K - 1 \right)} \quad (3.66)$$

が得られる。ここで、 K は K_c 近傍周辺の系の振舞を見るとして式 (3.66) 中の $1/K^3$ を K_c 周りで Taylor 展開する。

$$\frac{1}{K^3} = \frac{1}{K_c^3} - \frac{3}{K_c^4}(K - K_c) + \frac{6}{K_c^5}(K - K_c)^2 + \dots \quad (3.67)$$

つまり $K \simeq K_{rmc}$ を考えようという訳なので、

$$\frac{1}{K^3} \simeq \frac{1}{K_c^3} = \text{const.} \quad (3.68)$$

である。よって式 (3.66) は次のように書き換えられる。

$$|Z| = \sqrt{\frac{\pi^3 f(\Omega)^4}{|f''(\Omega)|} (K - K_c)} \quad (3.69)$$

図 3.6 で表されるように、この非自明な解は K が境界値

$$K_c = \frac{2}{\pi f(\Omega)} \quad (3.70)$$

より小さいか大きいかで存在するかないかが決まる。

- (1) $K < K_c$ の場合、非自明な解は存在しない。つまりこの状況では $|Z| = 0$ のみが解である。つまり全ての振動子はランダムに振動している状況に対応する。
- (2) $K > K_c$ の場合、 $|Z| = 0$ とは別に

$$|Z| \propto \sqrt{K - K_c} \quad (3.71)$$

という解が存在する。つまり、この状況では $\sqrt{K - K_c}$ に比例して、集団的な同期が成長する。

まとめると、蔵本モデルは結合係数 K という大きさに一様に結合した振動子系が同期するか否かは、 K が境界値 K_c より大きい小さいかで決まるということを教えている。

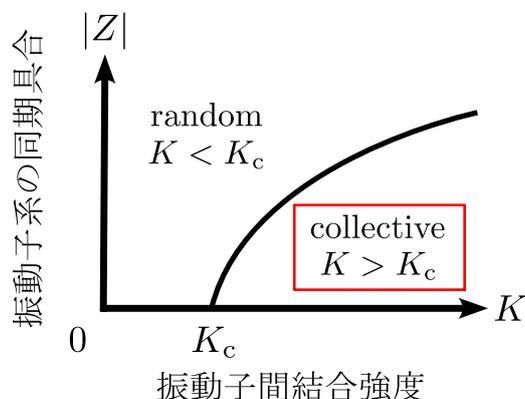


図 3.6 蔵本予想の概略図

4 理論

4.1 モデル

本研究では、物質系および光子系が量子化された全量子論的なモデルを用いる。そのようなモデルとして、図 4.1 で示したような、 N 個の 2 準位系が、光子系と相互作用する系を想定する。この系を表す Hamiltonian は以下の通りである。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{tls}} + \mathcal{H}_{\text{rad}} + \mathcal{V} \quad (4.1)$$

$$\mathcal{H}_{\text{tls}} = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_j \sigma_j^z \quad (4.2)$$

$$\mathcal{H}_{\text{cav}} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (4.3)$$

$$\mathcal{V} = \sum_{j=1}^N \hbar g_{j\mathbf{k}} (b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- + \sigma_j^+ b) \quad (4.4)$$

式 (4.1) は全系の Hamiltonian を表し、それを構成する式 (4.2) は物質系、式 (4.3) は光子環境系および式 (4.4) は物質系と光子系の相互作用をそれぞれ表す Hamiltonian である。ここで、 ω_j は j 番目の 2 準位系の共鳴周波数、 $\omega_{\mathbf{k}}$ は波数 \mathbf{k} を持つ光子周波数で本研究では線形分散であるとする $\omega(\mathbf{k}) = c|\mathbf{k}|$ 。また、 $b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}}^\dagger$ は波数 \mathbf{k} を持つ光子の消滅・生成演算子、 σ_j^\pm, σ_j^z は j 番目の 2 準位系に作用する Pauli のスピン行列である。本研究では Pauli 行列を以下のように定義する。

$$\sigma_j^x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\sigma_j^+ \equiv \sigma_j^x + i\sigma_j^y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_j^- \equiv \sigma_j^x - i\sigma_j^y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

$g_{j\mathbf{k}}$ は j 番目の 2 準位系と、波数 \mathbf{k} を持つ光子との結合の大きさを表す相互作用定数である。ただし、本研究では、2 準位系集団は光子と一様に結合することを想定するため、相互作用係数の 2 準位系と波数に関する添字に対する依存性は無視する ($g_{j\mathbf{k}} \rightarrow g$)。また、各系の演算子は以下の交換関係を満たすとする。

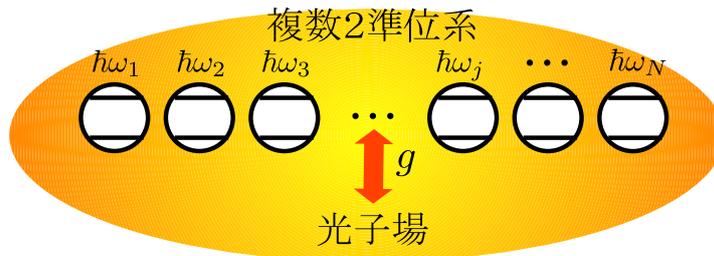


図 4.1 本研究で用いる系のモデルの概略図

$$[\sigma_j^z, \sigma_k^\pm] = \pm \sigma_k^\pm \delta_{jk}, \quad [\sigma_j^+, \sigma_k^-] = 2\sigma_k^z \delta_{jk} \quad (4.7)$$

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (4.8)$$

ただし、Lie 積は $[X, Y] = XY - YX$ で定義される。この光子系の交換関係 (4.8) が、光子系の量子性を反映している。それを見るために、光子系の演算子に関する Heisenberg の不確定性関係を考える。ある物理量を表す演算子 O について、その平均値からの揺らぎを ΔO とする。Robertson 不等式

$$(\Delta X)^2 (\Delta Y)^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [X, Y] \rangle|^2 \quad (4.9)$$

において、 $X = b_{\mathbf{k}}$ 、 $Y = b_{\mathbf{k}}^\dagger$ として適用することで、以下の関係式が得られる。

$$\Delta b_{\mathbf{k}} \Delta b_{\mathbf{k}}^\dagger \geq \frac{1}{2} \quad (4.10)$$

つまり、光子のエネルギー分散は最低でも $1/2$ 以上存在することを表す。これが零点エネルギーの起源であると考えることができ、交換関係 (4.8) を要請することで量子力学的な効果を理論に含めることができる。

4.2 光を介して結合した複数分極の Luminescence 方程式の一般形

系の発光ダイナミクスを記述する Luminescence 方程式を導く [51]。導出方法としては系のハミルトニアン (4.1) を用いて、Heisenberg 運動方程式

$$i\hbar \frac{\partial O}{\partial t} = [O, \mathcal{H}] \quad (4.11)$$

を用いて各種物理量の運動方程式を得る。ここで O はある観測可能な物理量を表す演算子である。基本的な作業は Heisenberg 方程式の右辺にある Lie 積 $[X, Y]$ を計算することである。計算するときには次の性質を用いると便利である。

$$[X, YZ] = Y[X, Z] + [X, Y]Z \quad (4.12)$$

$$[XY, Z] = X[Y, Z] + [X, Z]Y \quad (4.13)$$

系の Hamiltonian (4.1) と Heisenberg 方程式 (4.11) を用いて以下の方程式群が得られる。

$$\frac{\partial b_{\mathbf{k}}}{\partial t} = -\omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} - i \sum_m ig \sigma_m^- \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_j^-}{\partial t} = -i\omega_j \sigma_j^- + \sum_{\mathbf{k}} 2ig \sigma_j^z b_{\mathbf{k}} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \sigma_j^z}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} ig (b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- - \sigma_j^+ b_{\mathbf{k}}) \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial (b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^-)}{\partial t} = -i(\omega_j - \omega_{\mathbf{k}}) b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- + ig \left[2\sigma_j^z b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \left(\sigma_j^z + \frac{1}{2} \right) + \sum_{m(\neq j)} \sigma_m^+ \sigma_j^- \right] \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial(b_{\mathbf{k}}^{\dagger}b_{\mathbf{k}})}{\partial t} = -\sum_{j=1}^N ig(b_{\mathbf{k}}^{\dagger}\sigma_j^{-} - \sigma_j^{+}b_{\mathbf{k}}) \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial(\sigma_j^{+}\sigma_k^{-})}{\partial t} = i(\omega_j - \omega_k)\sigma_j^{+}\sigma_k^{-} - \sum_{\mathbf{k}} 2ig(\sigma_j^z b_{\mathbf{k}}^{\dagger}\sigma_k^{-} - \sigma_k^z \sigma_j^{+}b_{\mathbf{k}}) \quad (4.19)$$

観測される物理量の値である期待値を取るために、系全体の状態を表す密度演算子を ρ を用いて物理量 O の平均値を次のように取る。

$$\langle O \rangle = \text{Tr}[\rho O] \quad (4.20)$$

このような演算子の平均値に関する時間発展方程式を得ることで、数値計算を行うことができるようになる。Heisenberg 方程式 (4.11) の平均値をとれば、次のようになる。

$$i\hbar \frac{\partial \langle O \rangle}{\partial t} = \langle [O, \mathcal{H}] \rangle \quad (4.21)$$

ところで、例えば O_1 に関する時間発展方程式を (4.21) から得ようとした時、新たに演算子が2つの掛かった項 $O_1 O_2$ が相互作用 Hamiltonian (4.4) との Lie 積から生じる。 O_1 の時間発展を知るには、この新たに現れた $O_1 O_2$ に関する時間発展方程式が必要になる。そのために、物理量 $O_1 O_2$ についての Heisenberg 方程式を導出することになるが、先の場合と同様な理由により、とさらに $O_1 O_2 O_3$ のような演算子がさらに1つ掛かった項が現れる。さらに $O_1 O_2 O_3$ の Heisenberg 方程式を導出しようとする、 $O_1 O_2 O_3 O_4$ のような演算子の積の次数が増え続けるのである。つまり、このままでは有限の変数で閉じた連立方程式が得られないのである (Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy)。一般に N 個の積で表された演算子の平均値 (N 次の平均値) $\langle N \rangle \equiv \langle O_1 O_2 \cdots O_N \rangle$ の Heisenberg 方程式は次式のような形になる。

$$i\hbar \frac{\partial \langle N \rangle}{\partial t} = \mathcal{F}[\langle N \rangle] + \mathcal{G}[\langle N + 1 \rangle] \quad (4.22)$$

\mathcal{F} の項は相互作用の無い Hamiltonian、 \mathcal{G} の項は相互作用 Hamiltonian から派生する項をまとめたものである。本研究では、有限個の密度行列要素で閉じた連立方程式を得るために、次のような取り扱いをする。ある次数の平均値 $\langle M \rangle$ を次のように次数が M 未満の平均値と M 以下の相関関数に分解する、いわゆる Cluster-expansion truncation を用いる [52, 60]。

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &= \langle M \rangle_S + \langle M - 2 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle + \langle M - 4 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle^2 + \cdots \\ &\quad + \langle N - 3 \rangle_S \Delta \langle 3 \rangle + \langle N - 5 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle \Delta \langle 3 \rangle + \cdots + \Delta \langle M \rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

ただし、ここで言う”次数”とは、何個の演算子がかけ合わさっているかを表す指標とする。このように分解したところで、次数 $M - 1$ の量まで考慮しそれ以上の次数については切り捨てて、 $\langle 1 \rangle, \Delta \langle 2 \rangle, \Delta \langle 3 \rangle, \cdots, \Delta \langle M - 1 \rangle$ で閉じた方程式の組を扱う方法を用いる。つまり、

$$\begin{aligned} \langle M \rangle &\simeq \langle M \rangle_S + \langle M-2 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle + \langle M-4 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle^2 + \cdots \\ &\quad + \langle N-3 \rangle_S \Delta \langle 3 \rangle + \langle N-5 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle \Delta \langle 3 \rangle + \cdots + \langle 1 \rangle \Delta \langle M-1 \rangle \end{aligned} \quad (4.24)$$

と近似する。ここで $\langle M \rangle_S$ は M 個の 1 次の平均値が掛かっている量、つまり

$$\langle M \rangle_S = \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle \cdots \langle O_M \rangle \quad (4.25)$$

である。また (4.23) の各項は、考えられ得る演算子の組み合わせについて総和をとるものとする。例えば (4.23) の 2 項目であれば、

$$\begin{aligned} \langle M-2 \rangle_S \Delta \langle 2 \rangle &= \sum_{P(1,2,\dots,M)} \langle O_{j_1} \rangle \langle O_{j_2} \rangle \cdots \langle O_{j_{M-2}} \rangle \Delta \langle O_{j_{M-1}} O_{j_M} \rangle \\ &= \langle O_1 \rangle \langle O_2 \rangle \cdots \langle O_{M-2} \rangle \Delta \langle O_{M-1} O_M \rangle + \langle O_2 \rangle \langle O_3 \rangle \cdots \langle O_{M-1} \rangle \Delta \langle O_1 O_M \rangle + \cdots \end{aligned} \quad (4.26)$$

である。 $P(1, 2, \dots, M)$ は演算子を区別する添字 $i, 2, \dots, M$ に関する順列を表し、すべての添字の並び方について総和をとるという意味である。ただし、 $\langle \cdots \rangle$ 内で並べ替えて同じになるものは同一視する。例えば $\langle O_1 O_3 \rangle \langle O_2 O_4 \rangle$ と $\langle O_1 O_3 \rangle \langle O_2 O_4 \rangle$ は同じものとし、総和を計算するとき後者を加えてはいけないことに注意する。本研究では、2 次までの密度行列要素までを考慮することにし、3 次以上の量については切り捨てる。(4.23) を用いて $N = 2, 3$ の場合について書き下すと次式が得られる。

$$\langle XY \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle + \Delta \langle XY \rangle \quad (4.27)$$

$$\langle XYZ \rangle = \langle X \rangle \langle Y \rangle \langle Z \rangle + \langle X \rangle \Delta \langle YZ \rangle + \langle Y \rangle \Delta \langle XZ \rangle + \langle Z \rangle \Delta \langle XY \rangle + \Delta \langle XYZ \rangle \quad (4.28)$$

本研究では、2 次までの行列要素を扱うわけなので、式 (4.28) の右辺末項の $\Delta \langle XYZ \rangle$ はここでは無視するということである。以上のことを踏まえて Heisenberg 方程式の平均値をとって、 $\langle 1 \rangle, \Delta \langle 2 \rangle$ に関する運動方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \langle b_{\mathbf{k}} \rangle}{\partial t} = -\omega_{\mathbf{k}} \langle b_{\mathbf{k}} \rangle - i \sum_m ig \langle \sigma_m^- \rangle \quad (4.29)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^- \rangle}{\partial t} = -i\omega_j \langle \sigma_j^- \rangle + \sum_{\mathbf{k}} 2ig \langle \sigma_j^z \rangle \langle b_{\mathbf{k}} \rangle \quad (4.30)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^z \rangle}{\partial t} = -2g \sum_{\mathbf{k}} \left[\text{Im} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle \langle \sigma_j^- \rangle + \text{Im} \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle \right] \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle}{\partial t} = -i(\omega_j - \omega_{\mathbf{k}}) \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle + ig \left[2 \langle \sigma_j^z \rangle \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle + \left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + \sum_{m(\neq j)} \Delta \langle \sigma_m^+ \sigma_j^- \rangle \right] \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle}{\partial t} = \sum_{j=1}^N 2g \left[\text{Im} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle \langle \sigma_j^- \rangle + \text{Im} \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle \right] \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \Delta \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle}{\partial t} = i(\omega_j - \omega_k) \Delta \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle - \sum_{\mathbf{k}} 2ig \left[\langle \sigma_j^z \rangle \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_k^- \rangle - \langle \sigma_k^z \rangle \Delta \langle \sigma_j^+ b_{\mathbf{k}} \rangle \right] \quad (4.34)$$

ここで、 $2\text{Re}\langle X \rangle = \langle X \rangle + \langle X \rangle^*$, $2i\text{Im}\langle X \rangle = \langle X \rangle - \langle X \rangle^*$ を用いた。本研究では、コヒーレント励起を想定しないので、1次の密度行列要素 $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle$ および $\langle \sigma_j^- \rangle$ の時間発展は着目しない。これは、それらの初期時刻における値を0に取ることに相当する。後に述べるが、光を介して結合した2準位系同士による協力効果を取り扱い、本研究では $\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle$ の量によって表現されるが、この相関量がどのように形成されるかの過程に着目する。この時、コヒーレント励起を与えると、予め相関が形成されている状況に相当することになるので、このような励起過程は無視する。本研究では、 $\langle b_{\mathbf{k}} \rangle(t) = 0$, $\langle \sigma_j^- \rangle(t) = 0$ となるが、式(4.27)より次のことが分かる。

$$\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle = \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle \langle b_{\mathbf{k}} \rangle + \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle = \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle \quad (4.35)$$

$$\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle = \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \rangle \langle \sigma_j^- \rangle + \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle = \Delta \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle \quad (4.36)$$

$$\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle = \langle \sigma_j^+ \rangle \langle \sigma_k^- \rangle + \Delta \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle = \Delta \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle \quad (4.37)$$

よって、本研究では表記を簡略化するために、 Δ を用いずに表記する。よって、以上を踏まえて、 N 個の2準位系が光を介して結合している系の Luminescence 方程式は以下のように与えられる。

$$\frac{\partial \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle}{\partial t} = -i(\omega_j - \omega_{\mathbf{k}} - i\gamma) \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle + ig \left[2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle + \left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + \sum_{m(\neq j)} \langle \sigma_m^+ \sigma_j^- \rangle \right] \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^z \rangle}{\partial t} = -2g \sum_{\mathbf{k}} \text{Im} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle}{\partial t} = \sum_{j=1}^N 2g \text{Im} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle}{\partial t} = i(\omega_j - \omega_k) \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle - \sum_{\mathbf{k}} 2ig \left[\langle \sigma_j^z \rangle \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_k^- \rangle - \langle \sigma_k^z \rangle \langle \sigma_j^+ b_{\mathbf{k}} \rangle \right] \quad (4.41)$$

上記の式において、 $\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_j^- \rangle$ は古典的な分極に対応する photon-assisted polarization で γ は現象論的に導入された緩和定数である。また、 $\langle \sigma_j^z \rangle$ は j 番目の2準位系のポピュレーションに相当する占有率、 $\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \rangle$ は波数 \mathbf{k} を持つ光子数、および $\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle$ は j 番目と k 番目の2準位系がコヒーレントかを表す指標に相当する2準位系間相関であり、光を介して結合した2準位系同士による協力効果を表す重要な量である。式(4.39)は、 j 番目2準位系のポピュレーションが photon-assisted polarization を源として発光することによって、緩和

する過程を表す方程式になっている。また、式 (4.40) は、その 2 準位系から放出されて生成される光子数の単位時間あたりの生成率を表す。さらに、式 (4.41) は、photon-assisted polarization を源に放出された発光によって相関が形成されることを表す。これらの時間発展を決める photon-assisted polarization は式 (4.38) によって決まる。この式の右辺第 2 項はレーザーの起源である古典的な誘導放出の効果を表し、第 3、4 項目は光を量子化して初めて現れる効果であり、それぞれ自然放出、光を介して結合した 2 準位系による協力的光放出を表している。半古典論的な理論階層では、誘導放出の効果しか扱えず、また、superradiance は光学 Maxwell-Bloch 方程式のような半古典論でも記述可能なことから、レーザーと superradiance が同一視される場合がある。しかし、全量子論的な理論構築によって、古典的な誘導放出と、量子論的な自然放出および協力的光放出を区別して導出することができ、superradiance の発生メカニズムが量子論的な発光過程によって生じることを示せるような理論構築を行うことができた [50]。

5 自由光子場を介した複数分極の同期現象

5.1 Superradiance に対する Luminescence 方程式

5.1.1 Luminescence 方程式の導出

本節では、自由光子場を介した複数分極集団による同期現象の例として、光の量子性が関わる発光現象である superradiance と subradiance を同期現象的に解析する。このような解析によって、ミクロな量子系における同期現象の普遍的なメカニズムを明らかにすることを目的とする。そのために、ここでの議論では superradiance が生じる単純な系として、2 準位系が $N = 2$ 個の場合を想定する。2 準位系が 2 個の場合でも、理論的にも superradiance が発生することが予測されており [26, 61]、実験的にも観測されている [42]。この場合の superradiance のダイナミクスは、5 つの密度行列要素で記述される。つまり、1 番目、2 番目の 2 準位系のポピュレーション $\langle \sigma_l^z \rangle(t)$ ($l = 1, 2$)、1 番目と 2 番目の 2 準位系間の相関 $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t)$ 、および 1 番目、2 番目の 2 準位系に光子によって誘起される分極 (photon-assisted polarization) $\langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_l^- \rangle(t)$ ($l = 1, 2$) によって表される。これら密度行列要素の時間変化を調べるための運動方程式は、半導体 Luminescence 方程式の手法に基づいて以下のように導出される [51, 52]。

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_l^z \rangle(t) = -2g \sum_{\mathbf{k}} \text{Im} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_l^- \rangle(t), \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t) = i\Delta \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t) - 2ig \sum_{\mathbf{k}} \left(\langle \sigma_1^z \rangle(t) \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_2^- \rangle(t) - \langle \sigma_2^z \rangle(t) \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_1^- \rangle^*(t) \right) \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_l^- \rangle(t) = i(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_l + i\gamma) \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_l^- \rangle(t) + ig \left[\left(\langle \sigma_l^z \rangle(t) + \frac{1}{2} \right) + \langle \sigma_l^+ \sigma_l^- \rangle(t) \right] \quad (5.3)$$

ここで、 \bar{l} は l 番目の 2 準位系とは別の 2 準位系であることを表す。また、 Δ は 1 番目と 2 番目の 2 準位系間の共鳴周波数の離調を表し、 $\Delta = \omega_1 - \omega_2$ によって定義される。また、photon-assisted polarization の緩和定数 γ は現象論的に導入した。式 (5.1) は、photon-assisted polarization をソースとした発光過程によって 2 準位系のポピュレーションが緩和するダイナミクスを表す。Photon-assisted polarization の時間発展は式 (5.3) によって記述されており、その右辺第 2 項が、通常の 2 準位系単独での自然放出による発光過程を表し、第 3 項が、superradiance に発生に必要な 2 準位系同士が協力的に光放出をする発光過程を表す。元の Luminescence 方程式には、光を量子論的に扱って初めて現れる自然放出と協力的光放出の発光過程だけでなく、古典的な発光過程である誘導放出も含まれていた。しかし、本節では、2 準位系はその共鳴波長に比べて十分に狭い領域に存在すると想定し、誘導放出の効果を無視する。superradiance は、2 準位系同士が均一な光を介して結合することで形成する Dicke 状態間を介して自然放出することで生じる発光現象である [24, 25, 26, 27]。この時、superradiance による 2 準位系間のコヒーレンス形成効果が支配的となる。これは、誘導放出による遷移レートよりも、superradiance による遷移レートが大きいためである [24]。それ故、誘導放出の効果は無視できるのである。つまり、本節では、光子場の真空揺らぎによって引き起こされる、自然放出と協力的光放出の発光過程のみに注目するのである。

一般に、photon-assisted polarization の時間発展は、他のポピュレーションと 2 準位系間相関の時間発展と比べて、十分に早く終了することが知られている [62]。この時、式 (5.3) に対して断熱近似を施すことが可能になる。つまり、photon-assisted polarization を $\partial \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_l^- \rangle(t) / \partial t = 0$ ($l = 1, 2$) によって解くことが許され、その定常解の虚部は次式のように与えられる。

$$\text{Im} \langle b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_l^- \rangle = \frac{g\gamma}{(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_l)^2 + \gamma^2} \left[\left(\langle \sigma_l^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + \text{Re} \langle \sigma_l^+ \sigma_l^- \rangle \right] - \frac{g(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_l)}{(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_l)^2 + \gamma^2} \text{Im} \langle \sigma_l^+ \sigma_l^- \rangle \quad (5.4)$$

この時、superradiance 発生に重要な 2 準位系間相関であるが、物質系のコヒーレンスを表すのはその実部である [26, 50]。そこで、本研究では式 (5.4) の右辺第 3 項の、2 準位系間相関の虚部を含む項は考慮せず、後の章においてもこの仮定を用いる。さらに、断熱近似下での発光ダイナミクスは、 γ の値に依存しないことが知られている [62]。よって、 $\gamma \rightarrow 0$ のように取ることも許されるので、このことを用いて

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_l)^2 + \gamma^2} = \pi \delta(\Omega_{\mathbf{k}} - \omega_l) \quad (5.5)$$

という関係式を用いた。つまり、断熱近似下では 2 準位系の共鳴周波数と同じモードを持つ光子のみが寄与することになる。この定常解 (5.4) を、式 (5.1) および式 (5.2) に代入することで、光放出による 2 準位系のポピュレーションと 2 準位系間相関の時間発展方程式は以下ようになる。

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma_l^z \rangle(t) = -G_l \left[\left(\langle \sigma_l^z \rangle(t) + \frac{1}{2} \right) + \text{Re} \langle \sigma_l^+ \sigma_l^- \rangle(t) \right] \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t) &= i\Delta \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t) + G_2 \langle \sigma_1^z \rangle(t) \left[\left(\langle \sigma_2^z \rangle(t) + \frac{1}{2} \right) + \langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t) \right] \\ &\quad + G_1 \langle \sigma_2^z \rangle(t) \left[\left(\langle \sigma_1^z \rangle(t) + \frac{1}{2} \right) + \langle \sigma_2^+ \sigma_1^- \rangle^*(t) \right] \end{aligned} \quad (5.7)$$

ただし、 l 番目の 2 準位系の遷移レートは $G_l = V\omega_l^2 g^2 / (\pi c^3)$ によって定義される。ここで、 c は光速度、 V は系の体積である。もし、式 (5.6) の右辺に存在する、協力的光放出を表す 2 準位系間相関の実部 $\text{Re} \langle \sigma_l^+ \sigma_l^- \rangle(t)$ を無視した時、式 (5.6) は単独の 2 準位系が通常自然放出によって緩和するダイナミクスを記述することになる。つまり、2 準位系間相関 $\text{Re} \langle \sigma_l^+ \sigma_l^- \rangle(t)$ は、光放出を促進または抑制する役割を持っていることがわかる。ここで最後に、自然放出による発光過程と量子相関を伴った協力的光放出による発光過程の両者は、光を量子化して初めて現れる発光過程であり、量子力学的な効果が由来していることを強調しておく。

5.1.2 数値計算結果と考察

ここでは、上記のような superradiance と subradiance を記述する時間発展方程式を数値計算によって解くことで、2 準位系間の相関の時間発展と、この協力効果がポピュレー

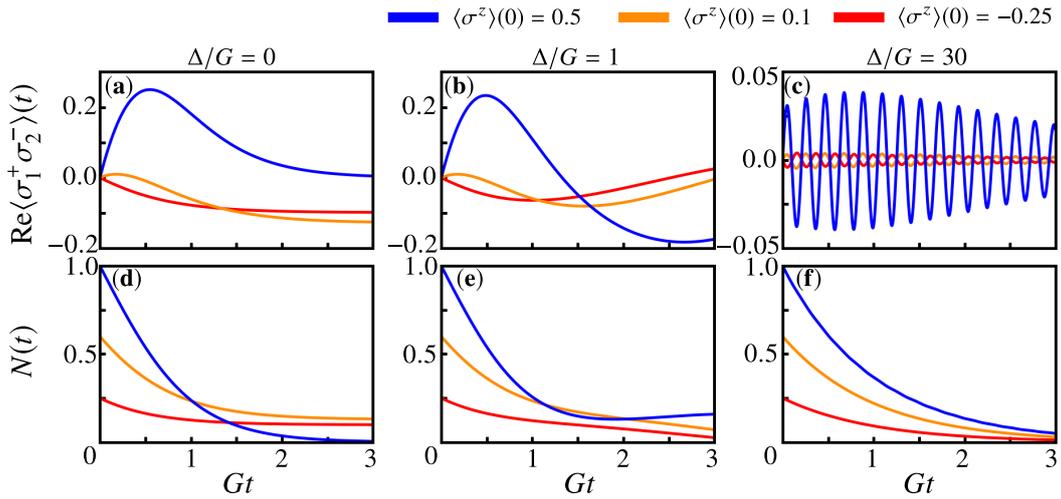


図 5.1 数値計算による superradiance と subradiance のダイナミクスのシミュレーション結果。(a)、(b)、(c) は 2 準位系間の相関の実部、(d)、(e)、(f) は 2 準位系のポピュレーションの時間発展をそれぞれ表す。ここで、 $N(t) = \langle\sigma^z\rangle + 1/2$ である。また、(a)、(d) は $\Delta/G = 0$ 、(b)、(e) は $\Delta/G = 1$ 、および (c)、(f) は $\Delta/G = 30$ に対応している。各図において、青線は $\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.25$ 、橙線は $\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.1$ 、および赤線は $\langle\sigma^z\rangle(0) = -0.25$ を設定した場合の結果をそれぞれ表す。時刻は G^{-1} によって規格化されている。

シヨンの時間変化にどのように影響するかを明らかにする。ここで 2 準位系の遷移レートの添字 l に対する依存性は、本研究では無視する。つまり、 $G_1 = G_2 = G$ である。また、 G はエネルギーもしくは時間の単位 (G^{-1}) として用いる。初期時刻における 2 つの 2 準位系のポピュレーションは同じ値を設定する。つまり、 $\langle\sigma_1^z\rangle(0) = \langle\sigma_2^z\rangle(0) = \langle\sigma^z\rangle(0)$ とする。また、他の密度行列要素に関しては 0 とする。2 準位系の占有率の依存性を無視した場合、2 つの 2 準位系のポピュレーションの時間発展は、それぞれ一致するので、2 つのポピュレーションの時間発展は、その添字を落とした占有率 $\langle\sigma^z\rangle(t)$ の時間発展方程式を用いる。図 3 (a),(b) と (c) は、2 準位系相関の時間発展を表し、それぞれ $\Delta/G = 0, 1$ と 30 の場合に対応する。また、図 5.1(d)、(e) と (f) は 2 準位系のポピュレーションの時間発展を表し、それぞれ $\Delta/G = 0, 1$ と 30 の場合に対応する。また、初期時刻におけるポピュレーションとして、 $N(0) = \langle\sigma^z\rangle(0) + 1/2 = 1, 0.6,$ と 0.25 のような 3 つの条件を与えた。

初めに、図 5.1(a) で示された、2 つの 2 準位系が共鳴の場合における ($\Delta/G = 0$)、初期のポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle(0)$ に対する発光ダイナミクスの依存性を議論する。まず、完全反転分布を与えた場合 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.5$) では、分極間相関は初期段階では正の方向に成長し、最大値 0.25 までに達する。その後、0 に緩和していく。しかし、完全ではない反転分布を与えた場合 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.1$)、分極間相関は、初期時刻付近では正の方向に成長するが、0.25 までには到達しない。また、すぐに負の方向に成長した後、ある一定値を保ちながら定常状態に至る。次に、反転分布が実現していない場合 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = -0.25$)、2 準位系間相関は最初から正の方向に成長せず、負の方向に成長し、定常値で一定になる。これら 2 準位系間相関の時間発展は、図 5.1(d) に示されているように、ポピュレーションのダイナミクスに反映されている。完全反転分布が形成されている場合、ポピュレーションの緩和は、通常自然放出によるものと比べて早くなっている。これは、通常の自

然放出による脱励起に相当する図 5.1(f) と比較すれば明らかである。正の値を持つ 2 準位系間相関は、分極同士が同位相になっており、つまり、2 準位系の緩和レートを増加させるような superradiance が生じていることを表す。対照的に、負の値を持つ 2 準位系間相関は、分極同士は互いに逆位相の状態になっており、これによって、自然放出が抑制されて subradiance が生じていることを表している。完全反転分布以外の条件 ($\langle \sigma^z \rangle(0) = 0.1, -0.25$) については、初期段階では相関を伴った協力的光放出の効果が小さく、通常 of 自然放出による発光過程のみでポピュレーションは緩和するが、2 準位系間相関が正から負に切り替わることで、subradiance の発生によってその緩和は抑制される。

次に、発光ダイナミクスの 2 準位系間の共鳴周波数離調 ($\Delta = \omega_1 - \omega_2$) に対する依存性を議論する。図 5.1(a) と (b) を比較すると、2 準位系同士が非共鳴の場合 ($\Delta/G = 1$)、2 準位系間相関は一定にはならず、正值と負値の間を振動している様子が見て取れる。この相関の振動の周期は 2 準位系間の共鳴周波数離調 Δ で決まり、つまり、周期は $2\pi/\Delta$ である。図 5.1(c) のように、 Δ がさらに大きい場合 ($\Delta/G = 30$) でも、相関は成長せず、振動の周期はさらに短くなっていることがわかる。ここで、2 準位系間相関の時間発展が、ポピュレーションの時間発展にどのように影響しているか見る。 $\Delta/G = 1$ の場合、ポピュレーションも、相関と同様に振動していることがわかる。これはつまり、2 準位系の非共鳴性が superradiance と subradiance の発生を阻害していることを表す。さらに、 $\Delta/G = 30$ の場合、相関は全く成長せず、通常 of 自然放出による発光過程が支配的となる。このため、ポピュレーションは遷移レート G で指数関数的に現象している。よって、2 準位系の非共鳴性 Δ が、光と物質の相互作用の大きさに相当する 2 準位系の遷移レート G に対して十分大きい場合は、superradiance と subradiance は発生しない。

上述のように、光を介して結合した 2 準位系間の量子相関は、光放出を促進させるような superradiance と、それを抑制するような subradiance の発生に寄与する重要な量である。また、superradiance または subradiance が発生するかは、2 準位系の非共鳴性と遷移レートの比率 Δ/G で決まり、さらに反転分布が形成されているかどうかにも依存する。

5.2 位相ダイナミクスの時間発展方程式

前節では、光を介して結合した 2 準位系間の量子相関は、複数分極からの協力的光放出である superradiance と subradiance を発生させ、両者のいずれかが生じるかは、2 準位系の非共鳴性 Δ 、2 準位系の遷移レート G 及び初期時刻における反転分布 $\langle \sigma^z \rangle(0)$ に依存することを示した。この superradiance と subradiance は分極集団による、同期現象であると考えられることができる。前節では superradiance と subradiance が生じる条件下で数値計算によって解析を行なった。本節では、同期現象の現象論とのアナロジーによって、2 準位系間の協力的光放出を定量的かつ解析的に議論する。

2 準位系間の相関は、光を介して結合した 2 つの分極の間の位相関係を表している。そこで、この位相に関する情報を抽出するために、相関をその絶対値 $R(t) = |\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle|$ と、図 5.2(a) で表されるような分極間の振動の位相差 $\psi(t)$ を用いて、 $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(t) = R(t)e^{i\psi(t)}$ のように表現する。前節の条件と同様に、2 準位系の遷移レート G_l と占有率 $\langle \sigma_l^z \rangle$ の 2 準位系を区別する添字 l に対する依存性は無視する。この時、光子場を介して結合した 2 つの分極の位相ダイナミクスを記述する時間発展方程式は、superradiance と subradiance を表現できる方程式 (5.6) および (5.7) から次のように得られた。

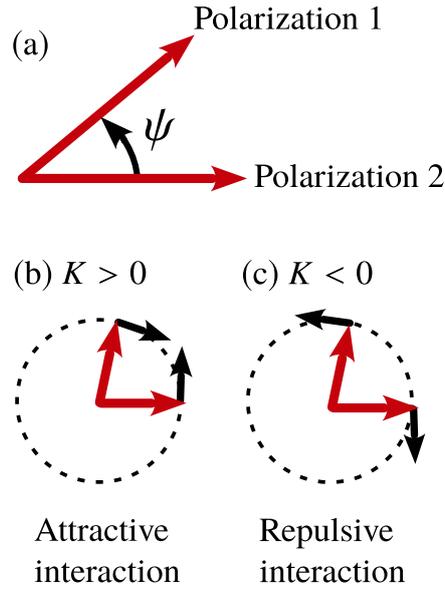


図 5.2 2つの分極による位相ダイナミクスの概略図。(a) は分極間の位相差を表す ψ の定義を示す。(b) は分極間に引力的な相互作用が作用した場合、互いに同位相になるように振動することを表す。(c) は分極間に斥力的な相互作用が作用した場合、互いに逆位相になるように振動することを表す。

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \Delta - \frac{2G\langle\sigma^z\rangle(t)}{R(t)} \left(\langle\sigma^z\rangle(t) + \frac{1}{2} \right) \sin \psi(t) \quad (5.8)$$

$$\frac{d}{dt}R(t) = 2G\langle\sigma^z\rangle(t) \left[\left(\langle\sigma^z\rangle(t) + \frac{1}{2} \right) \cos \psi(t) + R(t) \right] \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\sigma^z\rangle(t) = -G \left[\left(\langle\sigma^z\rangle(t) + \frac{1}{2} \right) + R(t) \cos \psi(t) \right] \quad (5.10)$$

5.3 蔵本モデルとのアナロジーと同期現象の起源

ここでは、5.2章で導出した位相ダイナミクスを記述する時間発展方程式を、同期現象の観点から議論する。導出された位相差に関する時間発展方程式(5.8)は以下のように蔵本モデルと同等である [16]。

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = \Delta - K(t) \sin \psi(t) \quad (5.11)$$

$$K(t) = \frac{2G\langle\sigma^z\rangle(t)}{R(t)} \left(\langle\sigma^z\rangle(t) + \frac{1}{2} \right) \quad (5.12)$$

ここで、 $K(t)$ は分極同士を同期させるような相互作用を表す。 $K(t) > 0$ の場合は、図 5.2(b) で表されるような、分極間に互いの位相を引き寄せるような引力的な相互作用が働くことで、互いに同位相になるように振動するようになり、位相差は $\psi(t) = 0$ になる。

逆に、 $K(t) < 0$ の場合は、図 5.2(c) で表されるように、分極間には互いの位相を引き離すような斥力的な相互作用が働くことで、互いに逆位相になるように振動するようになり、位相差は $\psi(t) = \pi$ になる。つまり、分極間に作用する相互作用 $K(t)$ は、光を介して結合した分極集団による同期現象である superradiance と subradiance が生じるための重要な効果である。式 (5.12) で定義されている $K(t)$ に含まれる因子 ($\langle \sigma^z \rangle(t) + 1/2$) は、式 (5.3)、(5.6) および (5.7) に現れるような自然放出を表す項から由来する。この自然放出の効果は、光を量子論的に扱うことで初めて現れる、光子場の量子力学的効果に由来する。つまり、同期現象が生じるために必要な相互作用 $K(t)$ は、光を量子論的に扱わない限り導出することはできない。元の時間発展方程式には、自然放出だけでなく古典的な誘導放出の効果も含まれていた。しかし、2 準位系集団が、その共鳴波長に比べて十分狭い領域に存在する場合は、誘導放出の寄与は無視できるので、 $K(t)$ にはこの古典的效果は寄与しない。以上より、superradiance と subradiance は、光子場の量子力学的効果である真空場揺らぎが起源となる相互作用が分極間に作用することで発生する同期現象であることが、全量子論的な理論構築によって初めて明らかになった。

5.4 位相ダイナミクスの計算結果と考察

ここでは、式 (5.8)、(5.9) および (5.10) で表された、光を介して結合した 2 つの 2 準位系に関する位相ダイナミクスの時間発展方程式を数値計算的にシミュレーションを行うことで、分極間の同期ダイナミクスの詳細を議論する。位相ダイナミクスを表す 3 つの時間依存する変数に関する時間発展の様子を図 5.3 に示した。図 5.3(a)、(b) および (c) に分極間の位相差 $\psi(t)$ 、図 5.3(d)、(e) および (f) に 2 準位系間相関の絶対値 $R(t)$ 、そして図 5.3(g)、(h) および (i) に 2 準位系のポピュレーション $N(t) = \langle \sigma^z \rangle + 1/2$ を示した。さらに、初期時刻におけるポピュレーションとして 3 つの場合を考え、図 5.3(a)、(d) および (g) は完全反転分布を与えた場合 ($\langle \sigma^z \rangle(0) = 0.5$)、図 5.3(b)、(e) および (h) は完全ではない反転分布 ($\langle \sigma^z \rangle(0) = 0.1$)、そして図 5.3(c)、(f) および (i) は反転分布が実現されていない場合をそれぞれ表している。上記の全ての場合について、2 準位系同士が共鳴な場合 ($\Delta/G = 0$) を赤線で、非共鳴な場合 ($\Delta/G = 30$) を黒線で、数値計算の結果を表している。また、 $\psi(0)$ と $R(0)$ は、もともとこれらで 1 つの相関 $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle(0)$ の値を決めるので、両者は独立に取ることはできない。本研究では、初期の位相差は $\psi(0) = \pi/2$ 、さらに十分小さい値として $R(0) = 0.01$ を設定して、これらをもって初期時刻では 2 準位系間の相関は形成されていないと想定する。これは、 $R(0)$ を 0.01 よりも小さくとっても、位相ダイナミクスに変化がないことが確かめられたからである。

最初に、2 準位系同士が共鳴な場合を考える ($\Delta/G = 0$)。完全反転分布が与えられた場合 ($\langle \sigma^z \rangle(t) = 0.5$)、位相差は $\psi(t)$ 直ちに 0 に近づいており、相関の絶対値 $R(t)$ は 0.25 まで成長していることが、図 5.3(a) および (d) からわかる。これらの現象は、図 5.3(g) が示すように、ポピュレーションが通常自然放出よりも早く緩和していることからわかるように、分極同士が同位相で振動することによって superradiance が生じていることがわかる。最終的に、 $R(t)$ は減少しながら 0 に近づいていき、位相差 $\psi(t)$ は緩やかに上昇する。不完全な反転分布が与えられた場合 ($\langle \sigma^z \rangle(t) = 0.1$)、位相差は $\psi(t)$ は初期段階では減少するが 0 には到達せず、時刻 $Gt = 0.2$ 付近からは上昇し始め、最終的に位相差は $\psi = \pi$ に到達していることが図 5.3(b) とそこの挿入図からわかる。 $R(t)$ は位相差が $\psi = \pi$ に近

づくと共に緩やかに成長していることが図 5.3(e) からわかる。これは、超放射的な相関が十分に形成されず、分極同士が互いに逆位相で振動することによって、subradiance 的な相関形成が支配的になっていることを表している。さらに、図 5.3(h) からわかるように、ポピュレーションは完全に緩和し切らない。つまり、subradiance によって光放出が抑制されていることが見て取れる。完全反転分布が形成されていない場合 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = -0.25$)、位相差 $\psi(t)$ は初期段階から増加し始め、最終的に $\psi = \pi$ で一定となることが、図 5.3(c) とその挿入図からわかる。それに伴って、相関の絶対値 $R(t)$ も初期時刻から緩やかに成長していることが、図 5.3(f) からわかる。これらの振る舞いは、分極同士は初期段階から直ちに逆位相で振動し始めて、subradiance が生じていることを示す。図 5.3(i) が示すように、光放出の抑制が反映されることで、ポピュレーションは通常 of 自然放出よりも緩和が遅くなっており、最終的にそれは保持されていることがわかる。以上で述べたように、初期時刻で与えたポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle(0)$ に依存して、superradiance と subradiance のメカニズムを分極間の位相差の時間発展に基づいて記述することができた。

次に、2準位系間が非共鳴な場合を考える ($\Delta/G = 30$)。図 5.3(a)、(b) および (c) が示すように、位相差 $\psi(t)$ の時間発展の様子は初期時刻に与えたポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle(0)$ に依存しておらず、周期 Δ で 0 と 2π の間を振動していることがわかる。これは、光と物質の結合の大きさに相当する 2準位系の遷移レート G が、2準位系間の共鳴周波数離調 Δ

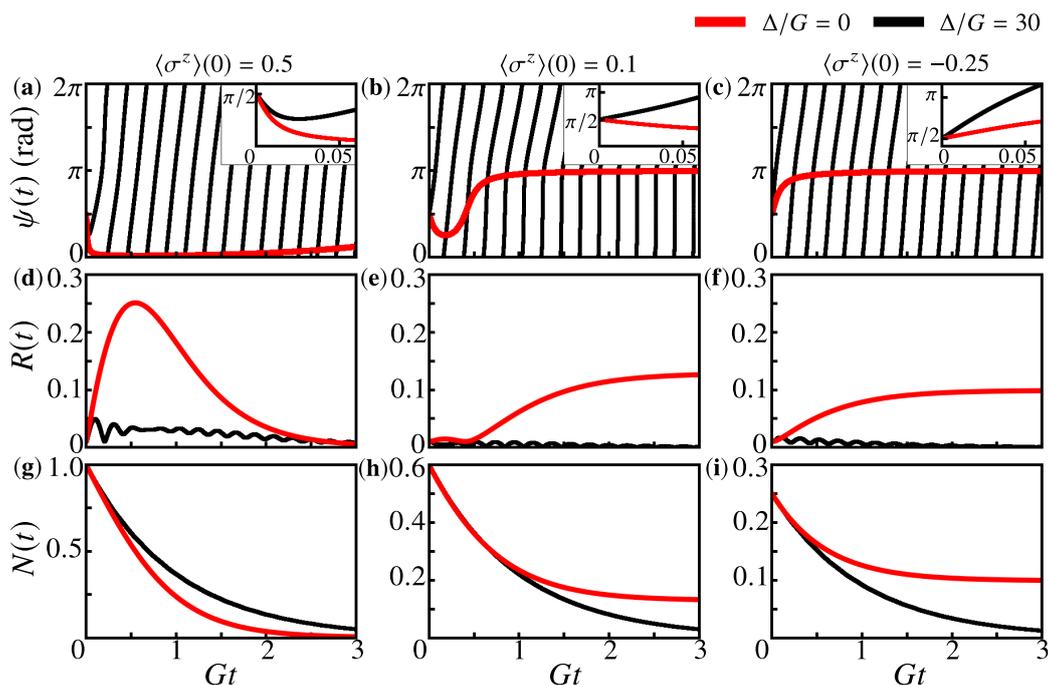


図 5.3 数値計算による、2つの分極に関する位相ダイナミクスのシミュレーション結果。(a)、(b)、(c) は分極間の位相差、(d)、(e)、(f) は 2準位系間相関の絶対値、および (g)、(h)、(i) はポピュレーションの時間発展をそれぞれ表す。また、(a)、(d)、(g) は $\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.5$ 、(b)、(e)、(h) は $\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.1$ 、および (c)、(f)、(i) は $\langle\sigma^z\rangle(0) = -0.25$ の場合をそれぞれ表す。各図において赤線は $\Delta/G = 0$ 、黒線は $\Delta/G = 30$ 設定した場合の結果をそれぞれ表す。時刻は G^{-1} によって規格化されている。

に比べて小さいためであり、つまり、分極間に作用する同期させる相互作用が寄与しないことが理由である。図 5.3(d)、(e) および (f) からわかるように、相関の絶対値 $R(t)$ は成長せず、ポピュレーションは遷移レート G で通常 of 自然放出的に緩和していることが図 5.3(g)、(h) および (i) からわかる。

前述の通り、2 準位系間が非共鳴な場合 ($\Delta/G = 30$) では、光を介して結合した 2 つの分極の位相ダイナミクスはほとんど依存しない。しかし、図 5.3(a)、(b) および (c) 内の挿入図が示すように、初期時刻付近における位相差 $\psi(t)$ の振る舞いが異なることについては注目すべきである。完全反転分布 ($\langle \sigma^z \rangle(0) = 0.5$) の場合、2 準位系同士が共鳴 ($\Delta/G = 0$) および非共鳴 ($\Delta/G = 30$) な場合共に、位相差 $\psi(t)$ は減少している。不完全な反転分布 ($\langle \sigma^z \rangle(0) = 0.1$) の場合、位相差 $\psi(t)$ は、2 準位系同士が共鳴な場合は減少しているが、非共鳴な場合は増加している。反転分布が実現していない ($\langle \sigma^z \rangle(0) = -0.25$) 場合、共鳴、非共鳴な場合共に増加していることがわかる。これらの初期時刻近傍における位相差が、初期のポピュレーションに依存して異なる点については、分極の同期現象を記述する時間発展方程式 (5.11) および (5.12) を用いて理解できる。これについては後の節において説明する。

5.5 同位相同期および逆位相同期の実現条件

図 5 の挿入図が示していたように、初期時刻付近において、分極間の位相差 $\psi(t)$ が減少または増加するか、さらに同位相または逆位相で同期するかは、初期時刻におけるポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle(0)$ と、2 準位系の非共鳴性と、2 準位系と光の結合の大きさの比 Δ/G に依存していることが明らかになった。このような分極間の同期現象のパラメータに対する依存性は、分極の同期現象を記述し、蔵本モデルに相当する式 (5.11) から理解することができる。式 (5.11) からわかるように、分極間の位相差 $\psi(t)$ の時間発展が、2 準位系の非共鳴性 Δ と、分極間に作用する相互作用 $K(t)$ の大きさの両者の大小関係、および $K(t)$ の符号に依存することがわかる。つまり、分極間に作用する相互作用 $K(t)$ の大きさが、2 準位系間の共鳴周波数離調 Δ より大きければ、分極同士は同期することが可能になり、さらに、 $K(t) > 0$ であれば互いに同位相で、逆に $K(t) < 0$ であれば互いに逆位相で同期するようになる。もし、相互作用 $K(t)$ が非共鳴性 Δ より小さい場合、分極同士は同期することができず、位相差 $\psi(t)$ は周期 Δ によって単調に増加することになる。それゆえ、初期時刻において、位相差が $\psi(0) = \pi/2$ から減少し、同位相で同期するためには次式のような条件が要請される。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta}{G} < \left| \frac{2\langle \sigma^z \rangle(0)}{R(0)} \left(\langle \sigma^z \rangle(0) + \frac{1}{2} \right) \right| \\ \langle \sigma^z \rangle(0) > 0 \end{array} \right. \quad (5.13)$$

さらに、位相差が $\psi(0) = \pi/2$ から増加し、逆位相で同期するための条件は次式のように与えられる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta}{G} < \left| \frac{2\langle\sigma^z\rangle(0)}{R(0)} \left(\langle\sigma^z\rangle(0) + \frac{1}{2} \right) \right| \\ \langle\sigma^z\rangle(0) < 0 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

また、分極同士は同期せず、位相差 $\psi(t)$ が単調に増加する条件は次式のように与えられる。

$$\frac{\Delta}{G} > \left| \frac{2\langle\sigma^z\rangle(0)}{R(0)} \left(\langle\sigma^z\rangle(0) + \frac{1}{2} \right) \right| \quad (5.15)$$

初期時刻の相関の絶対値を $R(0) = 0.01$ とした時、式 (5.13)、(5.14) および (5.15) によってそれぞれ表された、3つの位相ダイナミクスが生じるための条件を、初期時刻のポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle(0)$ と、2準位系の非共鳴性と遷移レートの比 Δ/G の2つのパラメータによって図示したものを図 5.4 に表した。図 5.4 中の青い領域 “in-phase” は式 (5.13) で定義されており、そこでは分極同士は同位相で同期し、superradiance が生じることを表す。同じく赤い領域 “anti-phase” は式 (5.14) で定義されており、そこでは分極同士は逆位相で同期し、subradiance が生じることを表す。最後に、白い領域 “out-of-phase” は式 (5.15) で定義されており、そこでは分極は同期せず、superradiance と subradiance のいずれも生じない領域を表す。

完全反転分布 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.5$) の場合における図 5.3(a) の挿入図において、2準位系間共鳴 ($\Delta/G = 0$) および非共鳴 ($\Delta/G = 30$) の状況は図 5.4 中の大きい黒点 (i) および (ii) にそれぞれ対応している。両方の条件は同位相領域に含まれているので、初期時刻近傍では、それぞれ条件下における位相差は $\psi(t)$ は減少し、同位相で同期しようとしていることがわかる。次に、不完全な反転分布 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.1$) の場合における図 5.3(b) の挿入図において、共鳴および非共鳴の状況は図 5.4 中の黒点 (iii) および (iv) にそれぞれ相当する。共鳴の場合は同位相領域に含まれるので、分極間の位相差 $\psi(t)$ は減少し、分極同士は同位相で同期しようとする。一方で非共鳴の場合は非同期の領域に含まれるので、位相差 $\psi(t)$ は単調に増加していることがわかる。最後に、反転分布が与えられていない場合 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = -0.25$) の場合における図 5.3(c) の挿入図における、共鳴および非共鳴の状況は、図 5.4 中の黒点 (v) および (vi) にそれぞれ対応している。両者の状況下では、位相差 $\psi(t)$ は増加しているが、メカニズムはそれぞれ異なる。つまり、共鳴な場合は逆位相領域に含まれるので、位相差が $\psi = \pi$ になるように緩やかに増加しているが、一方で非共鳴な場合は、非同期領域に含まれるので、位相差 $\psi(t)$ は π にならずに単調に増加していることがわかる。以上より、superradiance と subradiance を同期現象を記述する蔵本モデルに基づいて議論することで、分極が同期するためのパラメータに対する条件を明らかにすることができた。

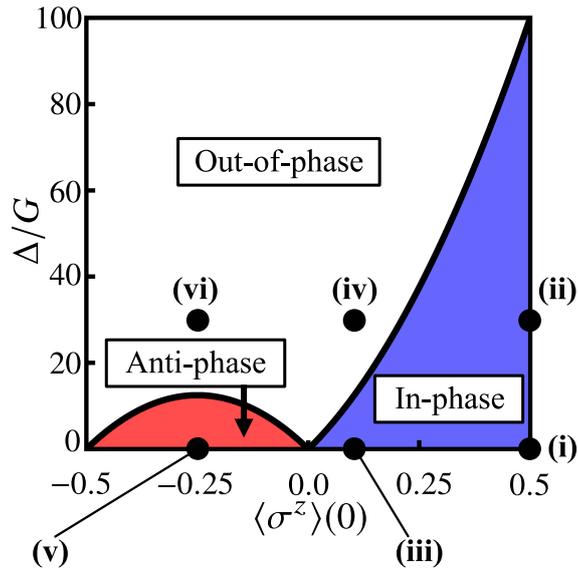


図 5.4 2つの分極が同期するための条件を表す図。分極同士が同位相で同期する条件が青の領域、逆位相で同期する条件が赤の領域、また、分極同士が同期しない条件が白の領域でそれぞれ表されている。図中の黒点は、図 5-3 の数値計算において与えたパラメータを表している。(i) は $(\langle\sigma^z\rangle(0), \Delta/G) = (0.5, 0)$ 、(ii) は $(0.5, 30)$ 、(iii) は $(0.1, 0)$ 、(iv) は $(0.1, 30)$ 、(v) は $(-0.25, 0)$ 、および (vi) は $(-0.25, 30)$ を表す。

5.6 同位相同期から逆位相同期への時間的転移

図 5.3(b) で表されるように、2準位系間が共鳴 ($\Delta/G = 0$) で、不完全な反転分布 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.1$) が与えられた時、時刻 $Gt = 0.2$ 付近において、位相差は同位相で同期しようとして $\psi(t) = 0$ に近づこうとしているが、突然、逆位相で同期しようとして位相差が $\psi(t) = \pi$ に変化している振る舞いが見られる。この、分極同士が同位相で同期しようとする状況から、最終的に逆位相で同期する現象が、初期のポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle(0)$ に対してどのように依存しているかを明らかにするために、位相差 $\psi(t)$ の時間発展を、 $-0.5 \leq \langle\sigma^z\rangle(0) \leq 0.5$ の範囲にわたって調べ上げたものを図 5.5 に示す。

完全反転分布の場合 ($\langle\sigma^z\rangle(0) = 0.5$)、位相差 $\psi(t)$ は $\pi/2$ より下回って変化しているので、常に同位相の状態である。しかしながら、初期のポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle(0)$ が 0.5 より小さくなった時、同位相同期から逆位相同期への転移が見られるようになった。さらに、初期のポピュレーションが $\langle\sigma^z\rangle(0) = 0$ より小さい場合、つまり反転分布が実現していない場合では、初期段階から逆位相で同期するようになっており、先に述べたような転移は見られない。つまり、分極同士の同位相同期から逆位相同期への転移は、完全反転分布を除く、反転分布が実現している場合のみに生じていることが明らかになった ($0 < \langle\sigma^z\rangle(0) < 0.5$)。このような転移は、5.2 で述べた分極同士の同期現象を記述する蔵本モデル (5.11) を用いて理解することができる。式 (5.11) で表されているように、もし分極間に作用する相互作用 $K(t)$ が $K(t) > 0$ であれば、位相差は同位相 $\psi(t) = 0$ になるように変化し、逆に $K(t) < 0$ の場合では、逆位相 $\psi(t) = \pi$ になるように変化する。式 (5.12) からわかるように、分極同士を同期させる相互作用 $K(t)$ は、時間的に変化する $\langle\sigma^z\rangle$ と $R(0)$ を含んでいるので、

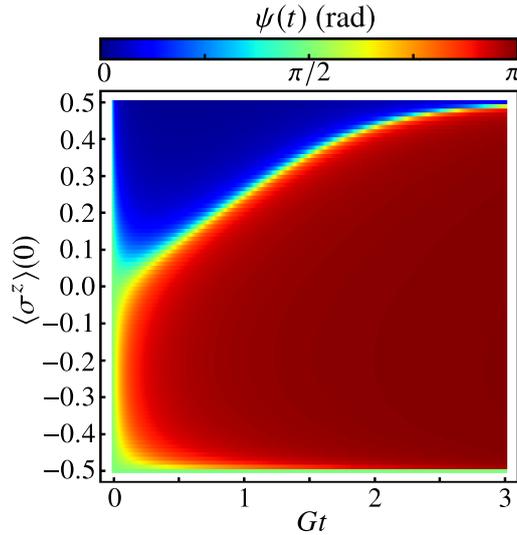


図 5.5 分極間の位相差 ψ の時間発展を、 $-0.5 \leq \langle \sigma^z \rangle(0) \leq 0.5$ の範囲で、数値計算によってシミュレーションした結果。時刻は G^{-1} によって規格化されている。

この相互作用 $K(t)$ もまた、時間的に変化するのである。特に、相互作用 $K(t)$ の符号は、2準位系のポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle(t)$ が正か負かの値をとるかで決まる。つまり、 $K(t)$ の符号は反転分布が実現しているかどうかで決まるのである。もし、初期時刻において反転分布が実現している場合 ($0 < \langle \sigma^z \rangle(0) < 0.5$)、分極間に作用する相互作用 $K(t)$ は正、つまり分極間の位相差 $\psi(t)$ を小さくするような引力的な相互作用が初期段階では働くので、位相差は小さくなるように変化する。ところが、superradiance は、2準位系が保持していたエネルギーが光として外部へ散逸する非平衡的な発光過程である。つまり、ポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle(t)$ が時間的に減少していくのである。よって、ある時刻 t^* を境に、ポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle(t)$ は、反転分布の状態 $\langle \sigma^z \rangle = 0$ を下回る事になる。この t^* は、分極の位相差が同位相から逆位相へ変化し始める時間に対応し、同位相同期から逆位相同期への転移が生じる時間に相当する。前述のように、superradiance はエネルギー散逸を伴う同期現象であるから故に、古典的な同期現象では見られないような、量子系に特有の時間的な同位相の同期現象から逆位相の同期現象への遷移が生じたと考えることができる。

6 共振器 QED 系における複数分極集団の同期現象

6.1 共振器 QED 系における Luminescence 方程式

本章では、5章では無視した誘導放出の効果も考慮することで、古典論的なレーザーと量子論的な superradiance を同期現象の観点から包括的に議論する。誘導放出の効果を取り込むために、ここでは、光子環境は単一モード周波数 ν の光子のみを取り扱う。つまり、光共振器を導入し、 N 個の 2 準位系をその共振器内に閉じ込めた系を想定する。この系のダイナミクスを記述する Luminescence 方程式は以下の通りになる [50]。

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^z \rangle}{\partial t} = -2g \text{Im} \langle b^\dagger \sigma_j^- \rangle \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = \sum_{j=1}^N 2g \text{Im} \langle b^\dagger \sigma_j^- \rangle - \kappa \langle b^\dagger b \rangle \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle}{\partial t} = i(\omega_j - \omega_k) \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle - 2ig \left[\langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger \sigma_k^- \rangle - \langle \sigma_k^z \rangle \langle b^\dagger \sigma_j^- \rangle^* \right] \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial \langle b^\dagger \sigma_j^- \rangle}{\partial t} = i(\nu - \omega_j + i\gamma) \langle b^\dagger \sigma_j^- \rangle + ig \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq j)} \langle \sigma_m^+ \sigma_j^- \rangle \right] \quad (6.4)$$

ここで、式 (6.1) および (6.4) においては $j = 1, 2, \dots, N$ であり、式 (6.3) においては、 $j \neq k, j, k = 1, 2, \dots, N$ とする。また、 γ, κ はそれぞれ現象論的に導入された photon-assisted polarization の緩和レート、および共振器光子の損失レートをそれぞれ表す。2 準位系の占有率、共振器光子数及び 2 準位系間相関の時間発展は photon assisted polarization に依存する。photon assisted polarization の時間変化は一般に、他の密度行列要素の時間変化に比べて極めて速いことが知られている。そこで、今までの議論と同様に photon assisted polarization は時間微分の項を無視して得られる定常解を用いる。その解を、2 準位系間相関の時間発展方程式に代入することで次式が得られる。

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^z \rangle}{\partial t} = -\frac{G}{1 + \delta_j^2} \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq j)} \text{Re} \langle \sigma_m^+ \sigma_j^- \rangle \right] + P \left(\frac{1}{2} - \langle \sigma_j^z \rangle \right) \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{G}{1 + \delta_j^2} \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq j)} \text{Re} \langle \sigma_m^+ \sigma_j^- \rangle \right] - K_{\text{cav}} \langle b^\dagger b \rangle \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle}{\partial t} &= i(\omega_j - \omega_k) \langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle + \frac{G}{1 + \delta_k^2} \langle \sigma_k^z \rangle \left[\left(\langle \sigma_k^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_k^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq k)} \langle \sigma_m^+ \sigma_k^- \rangle \right] \\ &\quad + \frac{G}{1 + \delta_j^2} \langle \sigma_k^z \rangle \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq j)} \langle \sigma_j^+ \sigma_m^- \rangle \right] \end{aligned} \quad (6.7)$$

ここで、 $G = 2g^2/\gamma$ は孤立 2 準位系の遷移レート、 $\delta_j = (\nu - \omega_j)/\gamma$ は共振器モードと j 番目 2 準位系との周波数離調をそれぞれ表す。式 (6.5) は、右辺第 1 項の光の量子性を反映した自然放出の効果と、右辺第 3 項の光を介して結合した 2 準位系同士による協力的光放出による発光過程だけでなく、右辺第 2 項の古典的な発光過程である誘導放出によっても 2 準位系のポピュレーションの緩和が生じることを表す。式 (6.6) は、先ほど述べた 3 つの発光過程により共振器内の光子が増加していくことを表す。そして、式 (6.7) は物質系のコヒーレンスが量子論的效果である自然放出によってだけでなく、古典的な誘導放出によっても形成されることを表す。また、今までの議論と異なる点としては、誘導放出の発光過程が加わるだけでなく、例えば式 (6.5) において、物質系と単一光子系の離調 δ_j に由来する因子が現れている。前セクションでは、無限のモードが存在する光子の中から、2 準位系の共鳴周波と共鳴な光子のみが寄与することから、物質系と光子系の離調に相当するような因子は現れなかった。しかし、ここでは光子を単一モードしか持たない共振器光子を想定しているため、物質系と光子系の離調が顕に式 (6.5) の右辺第 4 項のように加わるのである。また、式 (6.5) から分かるように、ポピュレーションの緩和は単独 2 準位系の遷移レート G と比べて $1/(1 + \delta_j^2)$ 倍遅くなることが分かる。これは、物質系と光子系が互いに共鳴な相互作用ができずに、見かけ上、両者の結合の大きさが弱くなっているためだと考えられる。

6.2 位相ダイナミクスの時間発展方程式

今までの議論と同様に、分極間の相関は互いの位相関係を表すと考え、2 準位系間相関からそれを抽出することを行う。つまり、 j 番目と k 番目に関する 2 準位系間相関を、 $\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle = R_{jk} \exp[i\psi_{jk}]$ ($\psi_{jk} = \phi_j - \phi_k$, $R_{jk} = |\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle|$) のように、その振幅 $R_{jk}(t)$ およびそれら 2 つの分極振動の位相差 $\psi_{jk}(t)$ のようにその振幅と位相因子に分離する。これを式 (6.5)、(6.6) および (6.7) に代入することで、共振器 QED 系における分極集団の同期現象のダイナミクスを記述する時間発展方程式を次式のように導出することができた。

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^z \rangle}{\partial t} = -\frac{G}{1 + \delta_j^2} \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq j)} R_{mk} \cos \psi_{mj} \right] + P \left(\frac{1}{2} - \langle \sigma_j^z \rangle \right) \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{G}{1 + \delta_j^2} \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle + \sum_{m(\neq j)} R_{mk} \cos \psi_{mj} \right] - K_{\text{cav}} \langle b^\dagger b \rangle \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} R_{jk} \frac{\partial \psi_{jk}}{\partial t} = & \Delta_{jk} R_{jk} - \frac{G \langle \sigma_k^z \rangle}{1 + \delta_k^2} \left\{ \left[\left(\langle \sigma_k^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_k^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle \right] \sin \psi_{jk} - \sum_{m(\neq k)} R_{mk} \sin \psi_{mj} \right\} \\ & - \frac{G \langle \sigma_j^z \rangle}{1 + \delta_j^2} \left\{ \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle \right] \sin \psi_{jk} - \sum_{m(\neq j)} R_{jm} \sin \psi_{km} \right\} \end{aligned} \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_{jk}}{\partial t} = & \frac{G\langle\sigma_j^z\rangle}{1+\delta_k^2} \left\{ \left[\left(\langle\sigma_k^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma_k^z\rangle\langle b^\dagger b \right] \cos\psi_{jk} + \sum_{m(\neq k)} R_{mk} \cos\psi_{mj} \right\} \\ & + \frac{G\langle\sigma_k^z\rangle}{1+\delta_j^2} \left\{ \left[\left(\langle\sigma_j^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma_j^z\rangle\langle b^\dagger b \right] \cos\psi_{jk} + \sum_{m(\neq j)} R_{jm} \cos\psi_{km} \right\} \end{aligned} \quad (6.11)$$

この導出された分極振動の位相ダイナミクスの時間発展方程式 (6.10) を用いて、共振器 QED 系における同期現象論的な解析を行う。ただし、本研究では次の仮定を設ける。1 つ目は、2 準位系の共鳴周波数分布は平均値が ω_0 、分散が Δ の Gauss 分布

$$f(\omega) = \frac{1}{\Delta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta^2}} \quad (6.12)$$

を想定し、各 2 準位系と光子系との離調 δ_j ($j = 1, \dots, N$) を全て $\delta_0 = \nu - \omega_0$ に置き換える。2 つ目は、2 準位系占有率と相関の振幅の 2 準位系を区別する添字の依存性を無視する。つまり、 $\langle\sigma_j^z\rangle \rightarrow \langle\sigma^z\rangle$, $R_{jk} \rightarrow R$ である。このような仮定のもとで、共振器 QED 系の分極集団の位相ダイナミクス (6.8)、(6.9)、(6.10) および (6.11) は以下ようになる。

$$\frac{\partial\langle\sigma_j^z\rangle}{\partial t} = -\frac{G}{1+\delta_0^2} \left[\left(\langle\sigma_j^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma_j^z\rangle\langle b^\dagger b \right] + R \sum_{m(\neq j)} \cos\psi_{mj} + P \left(\frac{1}{2} - \langle\sigma_j^z\rangle \right) \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial\langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = \sum_{j=1}^N \frac{G}{1+\delta_0^2} \left[\left(\langle\sigma_j^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma_j^z\rangle\langle b^\dagger b \right] + R \sum_{m(\neq j)} \cos\psi_{mj} - K_{\text{cav}}\langle b^\dagger b \rangle \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} R \frac{\partial\psi_{jk}}{\partial t} = & \Delta_{jk} R - \frac{G\langle\sigma_j^z\rangle}{1+\delta_0^2} \left\{ 2 \left[\left(\langle\sigma_j^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma_j^z\rangle\langle b^\dagger b \right] \sin\psi_{jk} \right. \\ & \left. - R \left[\sum_{m(\neq k)} \sin\psi_{mj} + \sum_{m(\neq j)} \sin\psi_{km} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial t} = & \frac{G\langle\sigma_j^z\rangle}{1+\delta_0^2} \left\{ 2 \left[\left(\langle\sigma_j^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma_j^z\rangle\langle b^\dagger b \right] \cos\psi_{jk} \right. \\ & \left. + R \left[\sum_{m(\neq k)} \cos\psi_{mj} + \sum_{m(\neq j)} \cos\psi_{km} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

2 準位系が $N = 2$ の場合であれば解析は容易であるが、多体 $N \gg 1$ の場合は、すべての 2 準位系に関する組み合わせを考慮した位相差の時間発展方程式 (6.10) を扱うのは現実的ではない。そこで、次式で定義されるような複素数秩序変数を導入することで、分極集団を粗視化したような平均場を定義する [15, 16]。

$$Z = |Z|e^{i\theta} = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N e^{i\phi_m} \quad (6.17)$$

ここで、 $|Z|$ は同期の大きさを表す秩序変数、 θ は平均場の位相を表す。これによって、ある着目した j 番目の分極と、式 (6.17) で定義された平均場の 2 体の相互作用の問題に帰着することができる。まず、式 (6.15)、及び (6.16) の R が係数として掛かっている項は、秩序変数の定義式 (6.17) を用いて次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m(\neq k)} \sin \psi_{mj} + \sum_{m(\neq j)} \sin \psi_{km} \\ &= \sum_m \sin \psi_{mj} - \sin \psi_{kj} + \sum_m \sin \psi_{km} - \sin \psi_{kj} \\ &= N|Z| \sin(\theta - \phi_j) + N|Z| \sin(\theta - \phi_k) - 2 \sin \psi_{kj} \\ &= -N|Z| \sin(\phi_j - \theta) - N|Z| \sin(\phi_k - \theta) + 2 \sin \psi_{jk} \end{aligned} \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m(\neq k)} \cos \psi_{mj} + \sum_{m(\neq j)} \cos \psi_{km} \\ &= \sum_m \cos \psi_{mj} - \cos \psi_{kj} + \sum_m \cos \psi_{km} - \cos \psi_{kj} \\ &= N|Z| \cos(\theta - \phi_j) + N|Z| \cos(\theta - \phi_k) - 2 \cos \psi_{kj} \\ &= N|Z| \cos(\phi_j - \theta) + N|Z| \cos(\phi_k - \theta) + 2 \cos \psi_{jk} \end{aligned} \quad (6.19)$$

次に、分極振動の位相差 (6.15) の両辺で総和 \sum_k をとり、秩序変数の定義 (6.17) を用いることで、 j 番目と k 番目の分極間の振動の位相差に関する方程式 (6.15) を、 j 番目の分極振動の位相 ϕ_j の時間発展方程式に帰着することができる。相関の振幅の時間発展方程式 (6.15) も同様に、両辺で総和 \sum_k をとって、秩序変数の定義 (6.17) を用いれば、それぞれの時間発展方程式は次式のようになる。

$$R \frac{\partial \phi_j}{\partial t} = \omega_j R - \frac{G \langle \sigma_j^z \rangle}{1 + \delta_0^2} \left\{ 2 \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle \right] + (N - 2) R \right\} |Z| \sin(\phi_j - \theta) \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{G \langle \sigma_j^z \rangle}{1 + \delta_0^2} \left\{ 2 \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + 2 \langle \sigma_j^z \rangle \langle b^\dagger b \rangle \right] + (N - 2) R \right\} |Z| \cos(\phi_j - \theta) + \frac{G \langle \sigma_j^z \rangle}{1 + \delta_0^2} R N |Z|^2 \quad (6.21)$$

ただし、式 (6.20) を導出する際に、 $\sum_{m=1}^N \partial \phi_m / \partial t = \sum_{m=1}^N \omega_m$ を仮定した。これは分極同士が結合する前と後において共鳴周波数の総和は不変であることを表し、ある種のエネルギー保存そくに相当する。前章 5 の位相ダイナミクスとは異なり、物質系と光子系の離調

δ_0 が分極の位相ダイナミクスに影響していることが、式 (6.15) から分かる。ただし、本研究ではこの離調の影響には着目しないので、共振器モードは物質系の共鳴周波数の平均値と共鳴させることで、物質系と光子系のエネルギー離調の影響を無視する ($\delta_0 = \nu - \omega_0 = 0$)。最終的に、共振器 QED 系における分極集団の、平均場を用いて表された同期ダイナミクスを表す時間発展方程式は以下の通りである。

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial t} = \omega_j - K|Z| \sin(\phi_j - \Theta) \quad (6.22)$$

$$K = \frac{G\langle\sigma^z\rangle}{R} \left[2 \left(\langle\sigma^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 4\langle\sigma^z\rangle\langle b^\dagger b \rangle + (N-2)R \right] \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = G\langle\sigma^z\rangle \left\{ \left[2 \left(\langle\sigma^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 4\langle\sigma^z\rangle\langle b^\dagger b \rangle - (N-2)R \right] |Z| \cos(\phi_j - \Theta) + R|Z|^2 N \right\} \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial \langle\sigma^z\rangle}{\partial t} = -G \left[\left(\langle\sigma^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma^z\rangle\langle b^\dagger b \rangle + R\{N|Z| \cos(\phi_j - \Theta) - 1\} \right] \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial \langle b^\dagger b \rangle}{\partial t} = NG \left[\left(\langle\sigma^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 2\langle\sigma^z\rangle\langle b^\dagger b \rangle + R\{N|Z| \cos(\phi_j - \Theta) - 1\} \right] - \kappa\langle b^\dagger b \rangle \quad (6.26)$$

式 (6.22) は分極集団が相互作用 K によって一様に結合している蔵本モデルに相当する [15, 16]。さらに、式 (6.23) で定義されている、分極間に作用する相互作用 K の中には、第 1 項で表される自然放出だけでなく、第 2 項で表される誘導放出の効果も含まれている。つまり、分極集団は光の量子性を反映した真空場揺らぎ、つまり自然放出をトリガーとして同期するだけでなく、古典的な発光過程である誘導放出によっても同期することが明らかになった。また、前章 5 において、自然放出の効果が起源となった同期現象では、2 準位系のポピュレーションに応じて、分極間に作用する相互作用が変化することを述べた。つまり、反転分布が実現している場合では分極間には引力的な、そうでない場合は斥力的な相互作用が働くことによって同位相または逆位相で同期するのであった。しかし、分極間に作用する相互作用の定義 (6.23) から分かるように、誘導放出の場合は、反転分布が実現しているか否かに関わらず、分極間には引力的な相互作用のみが作用する。これは、誘導放出によって分極集団は、同位相にのみで同期することを表している。反転分布が実現していない場合、自然放出を起源とする相互作用は斥力的、誘導放出を起源とする相互作用は引力的に分極集団に作用することになる。この場合、共振器光子数に応じてそれぞれの効果に由来する相互作用の大小関係は変化することが予想される。しかし、本研究では、この点に関する議論は行わず、今後の展望とする。

6.3 自然放出と誘導放出の協奏による新奇同期現象の発見

前節 6.2 で導出した分極振動の位相に関する時間発展方程式 (6.22) は、3 章で説明したように、一様に結合した振動子集団の同期現象を記述する蔵本モデルと同等である。この

蔵本モデルの議論を用いることで、振動子集団が同期するための条件を導出することができる。そこで、分極振動の位相の時間発展方程式 (6.22) に対しても同様な議論を用いることで、共振器 QED 系における分極集団が同期するための条件を導出することができる。その導出方法は 3 に詳しく述べているので、ここでは蔵本モデルの議論から得られた同期条件の結果に対して [15, 16]、我々が導出した分極集団の位相ダイナミクス (6.22) を適用させる。つまり、同期するための閾値 K_c の中に含まれている振動子の固有周波数に関する分布として、式 (6.12) で与えられる 2 準位系の共鳴周波数分布として仮定した Gauss 分布を、また、振動子間に一様に作用する結合係数 K としては、式 (6.23) で定義されている我々が導出した分極間に働く相互作用係数を適用すればよい。よって式 (3.66) より、共振器 QED 系における分極集団の秩序変数 $|Z|$ が次式の様に得られた。

$$|Z| = \sqrt{\frac{\Delta^2}{K^3} \left(K - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi} \Delta \right)} \quad (6.27)$$

ここで、 Δ は物質系の不均一幅である。この実数の秩序変数 (6.27) から、共振器 QED 系における分極集団が同期するための条件として、次式が要請される。

$$\frac{G\langle\sigma^z\rangle}{R} \left[2 \left(\langle\sigma^z\rangle + \frac{1}{2} \right) + 4\langle\sigma^z\rangle\langle b^\dagger b \rangle + (N-2)R \right] - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi} \Delta > 0 \quad (6.28)$$

この条件式を、共振器光子数 $\langle b^\dagger b \rangle$ について変形し、ポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle$ に関する関数として表現する場合は次式で表される。

$$\langle b^\dagger b \rangle > \frac{R}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta}{G} \frac{1}{\langle\sigma^z\rangle^2} - \frac{1 + (N-2)R}{4} \frac{1}{\langle\sigma^z\rangle} - \frac{1}{2} \quad (6.29)$$

この条件式 (6.29) の不等号を等号に変えた式は、分極集団が同期するか否かを表す境界線を表す。我々の議論は、superradiance の発生メカニズムである、式 (6.28) 第 1 項で表される光の量子性を反映した自然放出と、第 3 項のような量子相関で表された分極同士の協力的光放出、レーザーの発生メカニズムである第 2 項で表されるような誘導放出の効果をそれぞれ区別して扱える。そこで、条件式 (6.28) を用いて、古典的なレーザーのみを想定した場合と、superradiance のみを想定した場合における分極集団の同期条件を導出する。まず、レーザーの発生機構によって同期する条件を考える。これは、条件式 (6.28) の量子力学的な発光過程である左辺第 1 項、第 3 項を無視して考えることに相当する。つまり、この場合の同期条件は次式のようになるはずである。

$$\frac{G\langle\sigma^z\rangle}{R} \cdot 4\langle\sigma^z\rangle\langle b^\dagger b \rangle - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi} \Delta > 0 \quad (6.30)$$

この条件式についても、 $\langle b^\dagger b \rangle$ について変形すると、次式の様に変形される。

$$\langle b^\dagger b \rangle > \frac{R}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Delta}{G} \frac{1}{\langle\sigma^z\rangle^2} \quad (6.31)$$

一方で、superradiance の発生機構によって同期する条件を考える場合は、条件式 (6.28) の左辺第 2 項の誘導放出の効果を無視すればよくて、この場合の同期条件は次式のように与えられる。

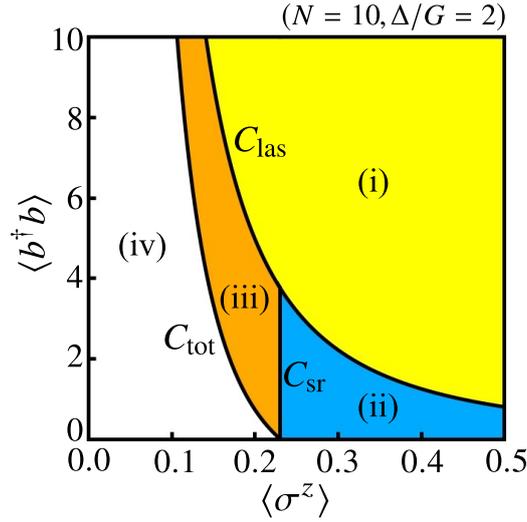


図 6.1 共振器 QED 系における分極集団が、様々な過程によって同期するための条件を示した図。黄色で示された (i) の領域はレーザーの発生機構が支配的となって同期するパラメータ、青色で示された (ii) の領域は superradiance の発生機構が支配的となって同期するパラメータ、橙色で示された (iii) の領域はレーザーと superradiance、両者の発生機構の協奏によって同期するパラメータの条件をそれぞれ表している。白色で示された (iv) の領域は、分極集団が同期できないパラメータ条件を表す。この図は、 $N = 10$ 、 $\Delta/G = 2$ および $R = 1/4$ を与えた場合である。

$$\frac{G\langle\sigma^z\rangle}{R}\left[2\left(\langle\sigma^z\rangle+\frac{1}{2}\right)+(N-2)R\right]-\frac{2\sqrt{2\pi}}{\pi}\Delta>0 \quad (6.32)$$

superradiance のみを考える場合では、共振器光子を含む項を無視したので、 $\langle b^\dagger b \rangle$ については変形できない。しかし、式 (6.32) から、ポピュレーションに関する条件式が次式のよう to 得られる。

$$\langle\sigma^z\rangle>\frac{1+(N-2)R}{4}\left[\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{32R}{\{1+(N-2)R\}^2}\frac{\Delta}{G}}-1\right] \quad (6.33)$$

以上の、(i) レーザーの発生機構によって同期が生じる、(ii) superradiance の発生機構によって同期が生じる、および (iii) 両者の発生機構が共存することで同期が生じる場合の 3 つに関する条件を導出した。これらを横軸に 2 準位系のポピュレーション $\langle\sigma^z\rangle$ 、縦軸に共振器光子数 $\langle b^\dagger b \rangle$ にとって、分極集団が同期するための条件を、図 6.1 のように図示することができた。

ただし、図 6.1 を得る際に、 $N = 10$ 、 $\Delta/G = 2$ として、さらに 2 準位系間相関の振幅は $R = 1/4$ とした。Dicke の superradiance の理論によれば、2 準位系間の相関は最大で $1/4$ の値を取ることができ、この時では物質系のコヒーレンス性が最も高い状態にあるので、この値を採用した。図 6.1 において、レーザーの発生機構である誘導放出が支配的に寄与することで分極集団が同期するパラメータ領域を、(i) で示した黄色の領域で表している。この領域の境界線を C_{las} として、この曲線は式 (6.31) において、不等号を等号に置き換えたもので定義されている。次に、superradiance の発生機構である光の量子性が関

わる発光プロセス、つまり自然放出および協力的光放出が支配的に寄与することで分極集団が同期するパラメータ領域を、(ii) で示した青色の領域で表している。この領域の境界線を C_{sr} として、この直線は式 (6.33) で定義されている。さらに、共振器 QED 系において特有な、レーザーおよび superradiance の両者の発生機構が共存する場合で分極が同期するパラメータ領域を、(iii) で示した橙色の領域で表している。この領域の境界線を C_{tot} として、この曲線は式 (6.29) で定義されている。最後に、同期しない領域を、(iv) で示した白色に領域で表した。この非同期の領域は、分極集団が同期するための条件式 (6.28) を満たさない領域として定義されている。以上のように、振動子集団の同期現象を記述する蔵本モデルのアナロジーから、共振器 QED 系の分極集団が同期するための条件を導出することができた。

6.4 同期条件に対する物質系の不均一性の効果

最後に、前節 6.3 で導出された、共振器 QED 系の分極集団が同期するための条件の、物質系の不均一幅 Δ に対する依存性を見ることにする。具体的には、物質系の不均一幅と、2 準位系と光子系の相互作用の大きさに相当する遷移レートの比 Δ/G を変化させた時の、3 つの同期過程を表すそれぞれの領域の振る舞いを調べる。3 つの同期過程それぞれによって同期するための条件 (6.29)、(6.31) および (6.33) を用いて、 Δ/G を様々な値を用いて求めた、分極集団の同期条件を図 6.2 に示す。

図 6.2 の (a)、(b)、(c)、(d)、(e) および (f) はそれぞれ、 $\Delta/G = 0, 1, 2, 4, 5$ および 10 の場合にそれぞれ対応する。ただし、2 準位系の総数は $N = 10$ とし、2 準位系間相関の絶対値は $R = 1/4$ とした。 Δ を小さくしていくことは、同期現象の観点から言えば、分極同士の同期を阻害する影響が小さくなることに相当する。つまり、分極集団としては同期しやすい状況になるので、同期可能な領域が、非同期領域と比べて相対的に広がっていることが分かる。不均一幅が 0、つまり全ての 2 準位系が共鳴である場合には、非同期領域は消失して (i) のレーザーのメカニズムによって同期する過程を表す領域に覆われる。この時、 $\langle b^\dagger b \rangle = 0$ 上は、共振器が存在しない場合に対応しており、共振器光子数に依存するレーザーの発生機構によるものではなく、むしろ superradiance のメカニズムによって分極集団が同期する領域であることに注意したい。 Δ を大きくしていくことは、同期現象の観点から言えば、先ほどの場合とは逆に分極同士の同期を阻害する影響が大きくなることに相当する。つまり、分極集団としては同期し難い状況になるので、同期可能な領域が、非同期領域と比べて相対的に狭くなっていることが分かる。

ここで、(i) のレーザーのメカニズムで同期する領域に着目する。図 6.2 から分かるように、物質系の不均一幅が大きくなるにつれて、(i) の領域は縮小していく。この時、図 6.3(f) が示している様に、(iii) の領域が加わることで、レーザーのメカニズムのみを考えた時よりも、分極集団が同期できる領域が広いことが分かる。つまり、古典的な誘導放出だけでなく、量子論的な発光過程である自然放出と協力的光放出が加わることで、レーザーの発生機構によって同期するための条件が緩和されていると考えることができる。また、2 準位系に完全反転分布 $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ を与えたとする。この時、 $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ 上の、(i) と (iii) のそれぞれの共振器光子数 $\langle b^\dagger b \rangle$ の値の差を、それぞれの境界線の定義式 (6.29) および (6.31) から計算すると、 $1 + (N - 2)R/2$ となった。これは、2 準位系の数が多くなる程、 $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ 上における (iii) の領域が広がる。つまり、2 準位系の数を増やすこと

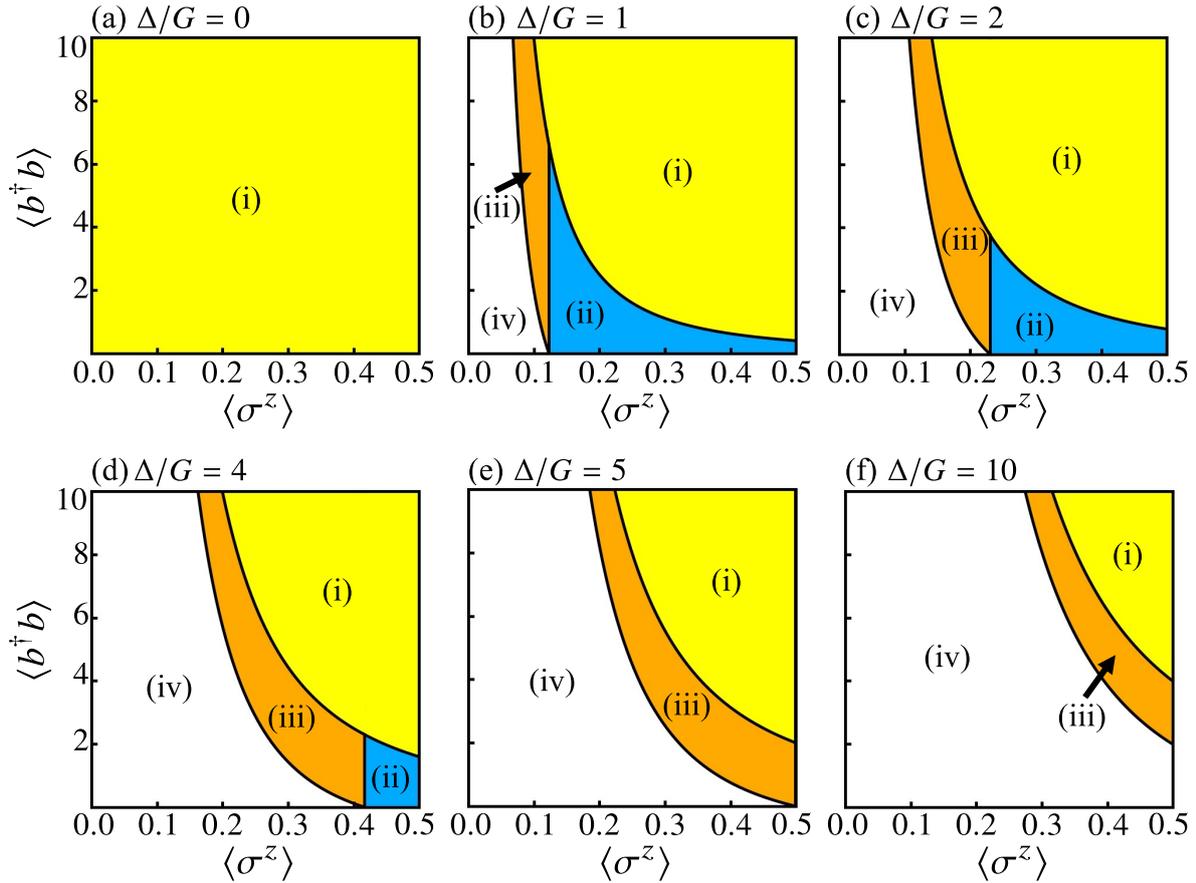


図 6-2 共振器 QED 系における分極集団の同期条件の、物質系の不均一性 Δ に対する依存性。(a)、(b)、(c)、(d)、(e) および (f) はそれぞれ、 $\Delta/G = 0, 1, 2, 4, 5$ および 10 の場合にそれぞれ対応する。ただし、 $N = 10, R = 1/4$ とした。

で、光を介して結合した 2 準位系間の協力効果が強くなり、この補助的な効果によってレーザーの発生メカニズムによって同期する条件を緩和することができると考えられる。ここで、共振器光子数は共振器の光閉じ込め効果に依存する。つまり、光閉じ込めが弱い場合は共振器内に光子が蓄積されないので、共振器光子数 $\langle b^\dagger b \rangle$ はより小さい値を取ると考えられる。逆に、それが強い場合は共振器内に光子が蓄積されていくので、 $\langle b^\dagger b \rangle$ はより大きい値をとると考えられる。以上より、レーザーの発生機構による同期条件が緩和されるというのは、共振器の光閉じ込め効果が弱くレーザー発振が生じない場合でも、superradiance の発生メカニズムである、光の量子力学的効果に由来する自然放出と協力的光放出の手助けにより、レーザー発振が可能になることを意味している。

次に、(ii) の superradiance のメカニズムで同期する領域に着目する。図 6.2 から分かるように、不均一幅を大きくしていくと、(ii) で示された領域は消失することがわかる。つまり、superradiance のメカニズムで分極集団が同期するためには、不均一幅に関してある閾値が存在することが考えられる。そのメカニズムで同期する領域 (ii) が消失するのは、式 (6.33) で定義された直線が、 $\langle \sigma^z \rangle$ 軸上を軸方向に $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ を超えて移動した時である。ポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle$ は定義上、その最大値は $1/2$ までしかとれない。よって、分極集団が superradiance のメカニズムで同期するためには、式 (6.33) で与えられる σ^z の値

が、 $\langle \sigma^z \rangle = 1/2$ 以下である必要がある。このことから、2準位系の総数 N 、2準位系の遷移レート G および物質系の不均一幅 Δ が満たすべき条件として、次式が要請される。

$$\frac{1 + (N - 2)R}{4} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{32R}{\{1 + (N - 2)R\}^2} \frac{\Delta}{G}} - 1 \right] \leq \frac{1}{2} \quad (6.34)$$

よって、この式 (6.34) から、分極集団が superradiance のメカニズムによって同期するために、 N, G, Δ が満たすべき条件が次の様に得られる。

$$\Delta \leq \Delta_c \quad (6.35)$$

$$\Delta_c = \frac{\sqrt{2\pi}}{8R} G [2 + (N - 2)R] \Big|_{R=1/4} = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} G (N + 6) \quad (6.36)$$

物質系の不均一幅に関する閾値 Δ_c は式 (6.36) で定義されている。この定義から、2準位系の数 N をより多くすることで、許される不均一幅の許容範囲が広がり、分極集団を superradiance のメカニズムによって同期させやすくする、つまり superradiance の発生を容易にさせることがわかる。

以上より、共振器 QED 系における分極集団を、同期現象の理論モデルの 1 つである蔵本モデルのアナロジーを用いることで、分極集団がレーザーのメカニズムが支配的となって同期、superradiance のメカニズムが支配的となって同期、および両者のメカニズムが共存することによって同期するという 3 つが生じるための条件を明らかにすることができた。さらに、光の量子性に関わる superradiance の発生メカニズムによって、分極集団が同期するための条件が緩和されることも明らかにすることができた。また、superradiance のメカニズムで分極集団が同期するための、物質系の不均一幅に関する条件も明らかにすることができた。

7 総括

本研究では、量子化された電磁場である光子を介して結合した分極集団による同期現象に着目し、以下の通りの量子力学的な効果が無視できないナノスケールにおける同期現象に関する新たな知見を得ることができた。

(1) 分極集団による同位相同期と逆位相同期の発生メカニズム

光を介して結合した分極同士が、同位相で同期、または逆位相で同期するかは、2準位系のポピュレーションに依存していることが明らかになった。分極間の位相関係を表す2準位系間の相関から、その位相に関する情報を抽出するために、 $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle \rightarrow Re^{i\psi}$ という変換を行った。これによって、分極間の振動の位相差 ψ に関する時間発展方程式を導出した。この方程式は、分極同士が光を介して一様に相互作用する系の同期現象を表す蔵本モデルに相当する。この分極間に作用する相互作用 K は、2準位系のポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle$ に依存して、分極間に対する働き方が変化する。2準位系が反転分布を持つ場合は ($\langle \sigma^z \rangle > 0$)、分極間には互いの位相を引き込むような引力的な相互作用が働くことで ($K > 0$)、分極同士は互いに同位相になるように振動する。逆に、2準位系が反転分布を形成していない場合、分極間には互いの位相を広げるような斥力的な相互作用が働くことで ($K < 0$)、互いに逆位相の関係になるように振動することが明らかになった。

(2) 光子場を介して結合した分極系の同期現象の起源

光子場を介して結合した分極集団の同期現象の起源が、光子の真空場揺らぎであることが初めて明らかになった。分極同士を同期させる相互作用係数 K には、光の量子性を反映した真空場揺らぎ、つまり自然放出に相当する因子 ($\langle \sigma^z \rangle + 1/2$) が含まれている。この因子は、光を量子化した全量子論的なモデルを用いて初めて現れる効果である。このことから、分極同士を同位相または逆位相に同期させる相互作用は、光を量子化して初めて導出することができ、光子場を介して結合した分極集団の同期現象の起源が、光の量子性である真空場揺らぎであることが、初めて明らかになった。

(3) 分極集団が同位相同期、または逆位相同期する条件

導出した分極間の位相差に関する時間発展方程式から、分極同士が同位相、または逆位相で同期するための条件を導出した。分極間の位相差で表された Luminescence 方程式を用いた数値計算によるシミュレーション結果から、分極同士が同位相で、または逆位相で同期するかは、初期時刻におけるポピュレーション ($\langle \sigma^z \rangle(0)$) と、物質系の不均一性と、物質系と光との相互作用の大きさの比 (Δ/G) に依存していることが分かった。そこで、これらの条件を解明するために、蔵本モデルのアナロジーを用いることで、分極間の位相差に関する時間発展方程式から、 $\langle \sigma^z \rangle(0)$ および Δ/G で表された、同位相、逆位相で同期するための条件を導出することができた。

(4) 分極集団の同位相同期から逆位相同期への転移の存在

古典的な同期現象では見られない、分極同士が同位相の同期から逆位相の同期へ転移する振る舞いを見出した。分極間の位相差 ψ の時間発展を調べた際に、完全ではない反転分布を与えた場合 ($\langle \sigma^z \rangle(0) = 1/10$)、初期時刻付近では位相差は小さくなるように変化し、ある時点で位相差は大きくなり最終的に $\psi = \pi$ で一定となった。つまり、分極同士が同位相の同期から逆位相の同期へ転移した振る舞いを見出した。これが、どのような状況下で発生するかを、初期時刻におけるポピュレーションを $-1/2 \leq \langle \sigma^z \rangle(0) \leq 1/2$ の範囲で変えながら位相差の時間発展を調べることで明らかにした。結果として、同位相同期から逆位相同期への転移は、2準位系が反転分布を持つ場合 ($\langle \sigma^z \rangle(0) > 0$) に生じていることが分かった。このメカニズムは、分極間に作用する相互作用に着目することで、superradiance がエネルギー散逸を伴う現象であることに起因することが明らかになった。

(5) 誘導放出と自然放出の協奏による新奇同期現象の存在

共振器 QED 系における分極集団の同期条件を導出することで、superradiance の起源である自然放出と、レーザーの起源である誘導放出の協奏による、新奇同期現象の存在を明らかにした。光共振器内の単一モード光子と、 N 個の分極が一様に結合している場合における、分極集団の位相に関する時間発展方程式も同様に、2準位系間相関 $\langle \sigma_j^+ \sigma_k^- \rangle$ の時間発展方程式から、 $\langle \sigma_1^+ \sigma_2^- \rangle = Re^{i\psi}$ によって得られた。ただし、多体系であるので、分極集団を粗視化した平均場を導入し、この平均場とある1つの分極との2体の問題に帰着させた。これによって得られた分極振動の位相に関する時間発展方程式も蔵本モデルに同等であり、そのアナロジーによって分極集団が同期するための条件が導出された。この条件は、2準位系のポピュレーション $\langle \sigma^z \rangle$ 、共振器光子数 $\langle b^\dagger b \rangle$ 、2準位系お不均一性 Δ 、2準位系と光の相互作用の大きさに対応する、2準位系の遷移レート G および2準位系の総数 N に依存する形で表されている。この条件を、 $(\langle \sigma^z \rangle, \langle b^\dagger b \rangle)$ を変数とする2次元平面状に相図的に図示したことによって、レーザーの発生機構である誘導放出が支配的となって同期、また superradiance の発生機構である自然放出が支配的となって同期するだけでなく、自然放出と誘導放出の両者の協奏によって生じる同期現象の存在を示すことができた。

今後の展望

本研究では、量子化された電磁場である光子を介して結合した分極集団の同期現象を解析することで、量子力学的効果が及ぶナノスケールにおける分極の同期現象の起源と、分極同士が同期するための普遍的なメカニズムを解明した。さらに、共振器 QED 系における分極集団の同期現象においては、誘導放出および自然放出の両者の協奏によって、新奇同期現象の存在を明らかにした。今後の課題としては、この新規同期現象がレーザーと superradiance の両者とどのように異なるかを解明すること。既存の発光現象と比べた時、発光特性、コヒーレンス形成過程の違いを明確にする必要がある。また、レーザーや superradiance で生じた発光は、干渉性を有するコヒーレントな光である。このコヒーレンス性は、物質系の協力現象に由来すると考えられ、物質系のコヒーレンスが光のコヒーレンスに転写されるメカニズムを、同期現象の知見を用いて明らかにすることも重要であ

る。最終的には、これらの知見を総合して、本研究が新奇発光デバイスの設計指針となり、さらに非平衡な現象である superradiance と非線形科学である同期現象を組み合わせたことで、新たな非平衡非線形な量子論の分野を開拓につなげることを、今後の展望とする。

Appendix. A 光子場を介して結合した分極集団の不安定性解析

A.1 光を介して結合した物質系の定常状態

2つの2準位系が光を介して結合する系の Luminescence 方程式から得られる、位相ダイナミクスの時間発展方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta - 2G \langle \sigma_j^z \rangle \left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin \psi}{R} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = 2G \langle \sigma_j^z \rangle \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) \cos \psi + R \right] \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_j^z \rangle}{\partial t} = -G \left[\left(\langle \sigma_j^z \rangle + \frac{1}{2} \right) + R \cos \psi \right] \quad (\text{A.3})$$

十分に時間が経過して系が定常状態に至ったとする。この時の、各物理量を σ_z^*, R^*, ψ^* と表す (以後、 $\langle \sigma_j^z \rangle \rightarrow \sigma_z$ と略記する)。そうすると、これらの変数は以下の式を満たす。

$$\Delta - 2G \sigma_z^* \left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin \psi^*}{R^*} = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$\sigma_z^* \left[\left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) \cos \psi^* + R^* \right] = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$\left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) + R^* \cos \psi^* = 0 \quad (\text{A.6})$$

また、位相で表示する前の Luminescence 方程式から、以下の保存則的な関係式が得られる。

$$\sigma_z^2(t) + \text{Re} \langle \sigma_+^1 \sigma_-^2 \rangle(t) = \sigma_z^2(0) + \text{Re} \langle \sigma_+^1 \sigma_-^2 \rangle(0) - \Delta \int_0^t dt' \text{Im} \langle \sigma_+^1 \sigma_-^2 \rangle(t') \quad (\text{A.7})$$

今は、同期する状況を考えるとして、 $\Delta = 0$ とする。また、初期時刻に於いて相関は成長していないとすれば、上式は次式のように変更される。

$$\sigma_z^{*2} + \text{Re} \langle \sigma_+^1 \sigma_-^2 \rangle^* = \sigma_z^2(0) \quad (\text{A.8})$$

これを位相で表示すれば次式のようになる。

$$\sigma_z^{*2} + R^* \cos \psi^* = \sigma_z^2(0) \quad (\text{A.9})$$

今までの数値計算を鑑みると2つの定常状態が考えられる。1つは、超放射が生じてポピュレーションが完全に緩和する状況。もう一方は、subradianceが生じてポピュレーション

ンが保持される状況である。これらに対応する定常解が存在するかを確かめるために実際に求めてみる。まず、式 (A.4) は今の場合

$$\sigma_z^* \left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) \frac{\sin \psi^*}{R^*} = 0 \quad (\text{A.10})$$

であるが、この式が満たされる条件として3通り考えられる。それは、(i) $\psi^* = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ 、(ii) $\sigma^* = 0$ 、(iii) $\sigma_z^* + 1/2 = 0$ である。

$$\boxed{\text{(i)} \psi^* = n\pi}$$

これを式 (A.5)、(A.6) および (A.9) に用いると、次式が得られる。

$$\left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) + R^* = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\sigma_z^{*2} + R^* = \sigma_z^2(0) \quad (\text{A.12})$$

これらを組み合わせることで、定常解は次式のようになる。

$$(\sigma_z^*, R^*, \psi^*) = \left(\frac{1 - \sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3}}{2}, \frac{\sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3}}{2} - 1, n\pi \right) \quad (\text{A.13})$$

$$\boxed{\text{(ii)} \sigma^* = 0}$$

この場合、 $\sigma_z^2(0) = -1/2$ となり、初期時刻におけるポピュレーションが純虚数になるので不適。

$$\boxed{\text{(iii)} \sigma_z^* + 1/2 = 0}$$

この場合、仮定の式から、 $\sigma_z^* = -1/2$ であり、式 (A.5) から $R^* = 0$ が得られる。しかし、 ψ^* が決まらないため不定となる。

(i) に関して、 ψ^* は 2π の周期性があるので、範囲を $0 \leq \psi^* < 2\pi$ とすれば、 $n = 0, 1$ の2パターンのみである。よって最終的に定常解は以下のようになる。

$$(\sigma_z^*, R^*, \psi^*) = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1 - \sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3}}{2}, \frac{\sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3}}{2} - 1, 0 \right) \\ \left(\frac{1 - \sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3}}{2}, \frac{\sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3}}{2} - 1, \pi \right) \end{array} \right\} \quad (\text{A.14})$$

この解の中で、 $\sigma_z(0) = 1/2$ で $R^* = 0, \psi^* = 0$ の場合が超放射に対応する。また、 $\sigma_z(0) \neq \pm 1/2$ で $\psi^* = \pi$ の場合が subradiance に対応すると考えられる。ただし、 $\sigma_z(0) \neq \pm 1/2$ の場合で $\psi^* = 0$ に対応するシミュレーション結果は得られていない。

A.2 定常状態の安定性

系の運動が次式で表されるようなものを2次元の線形系と呼ぶ。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

この運動方程式は、係数行列が対角化可能であれば簡単に解ける。係数行列を U とする。その固有値を u_1, u_2 、それぞれに対応する固有ベクトルを $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ 、対角化行列を $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ 、 $\boldsymbol{\zeta} = P^{-1}\mathbf{x} = P^{-1}(x, y)^T$ とすれば、式 (A.15) は次式のようにになる。

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\zeta} = D\boldsymbol{\zeta}; D = P^{-1}UP = \begin{pmatrix} u_1 & 0 \\ 0 & u_2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

この解は、 $dx/dt = ax$ の解が $x = x_0e^{at}$ であることと同様な考えで、次式のようにになる。

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = e^{Dt}\boldsymbol{\zeta}(0) \quad (\text{A.17})$$

$\boldsymbol{\zeta}$ を \mathbf{x} に戻せば次式が得られる。

$$\mathbf{x}(t) = Pe^{Dt}P^{-1}\mathbf{x}(0) = e^{PDP^{-1}t}\mathbf{x}(0) \quad (\text{A.18})$$

この解は、与えた初期条件 $x(0), y(0)$ に応じ、 (x, y) 平面上で t をパラメータとしてある曲線を描く。定性的であるが次のような係数行列を持つ線形系を考える。

$$U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$

微分方程式で表すと次の形になる。

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{dy}{dt} = -y \quad (\text{A.21})$$

これは簡単に次のように解ける。

$$x(t) = x(0)e^{at} \quad (\text{A.22})$$

$$y(t) = y(0)e^{-t} \quad (\text{A.23})$$

ここで、一般に

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (\text{A.25})$$

について、 $f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$ を満たす (x^*, y^*) を固定点と呼ぶ。今の例の場合では、固定点は $(x^*, y^*) = (0, 0)$ である。式 (A.22) のパラメータ a に応じて、初期時刻から、どのように固定点に近づくかの様子が変わる。固有値と固有ベクトルを求めてみると、簡単に次のように求まる。

$$u_1 = a ; \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$u_2 = -1 ; \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

固定点に近づくかどうかは、固有値の符号で決まると考えられる。そして固有ベクトルは、それを単位方向ベクトルに持つ直線を表し、漸近線になっている。以上のように系の係数行列の固有値と固有ベクトルが分かれば固定点、ある意味で定常状態、にどのように近づいたり離れたりするかの振る舞いを議論できる。

A.3 非線形系における定常状態の安定性

今までの議論は線形系なら可能であるが、非線形系では露骨な線形代数的アプローチによる解析は困難である。そこで、固定点 (x^*, y^*) からのずれ $(\delta x, \delta y)$ を想定して、これの1次までを考慮することで、固定点近傍のみであるが、非線形系における固定点周りの振る舞いを線形系の場合と同様に解析できる。非線形系が次式で表されているとする。

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \quad (\text{A.28})$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (\text{A.29})$$

この式に $x(t) = x^* + \delta x(t), y(t) = y^* + \delta y(t)$ を代入して δ 付きに関しては1次まで残すと、

$$\begin{aligned} \frac{d\delta x}{dt} &= f(x^* + \delta x, y^* + \delta y) \\ &= f(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \delta x + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \delta y + O(\delta^2) \\ &\simeq \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \delta x + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \delta y \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

δy についても同様に計算すれば最終的に次式のように線形化された運動方程式が得られる。

$$\frac{d\delta x}{dt} = \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \delta x + \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \delta y \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{d\delta y}{dt} = \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} \delta x + \left. \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} \delta y \quad (\text{A.32})$$

線形代数的に表現するなら、 $\mathbf{v} = (\delta x, \delta y)^T$ とすると次のようになる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = J(x^*, y^*)\mathbf{v} \quad (\text{A.33})$$

$$J(x^*, y^*) = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} & \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{(x^*, y^*)} \quad (\text{A.34})$$

よって、非線形系の固定点周りの振る舞いは $J(x^*, y^*)$ で議論すればよい。これは、定常状態から少しずれた時の系の振る舞いを解析できると期待できる。

A.4 位相ダイナミクスにおける安定性

導出した位相ダイナミクスの式は非線形な形をしているので、固定点近傍の振る舞いを解析する事になる。処方箋は前節のように $\sigma_z \rightarrow \sigma_z^* + \delta\sigma_z, R \rightarrow R^* + \delta R, \psi \rightarrow \psi^* + \delta\psi$ を式 (A.1)、(A.2) および (A.3) に代入すればよい。計算の詳細は省くが以下の近似式を用いた。

$$\frac{1}{R^* + \delta R} \simeq \frac{1}{R^*} \left(1 - \frac{\delta R}{R^*} \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\sin(\psi^* + \delta\psi) \simeq \sin \psi^* + \delta\psi \cos \psi^* \quad (\text{A.36})$$

$$\cos(\psi^* + \delta\psi) \simeq \cos \psi^* - \delta\psi \sin \psi^* \quad (\text{A.37})$$

よって、固定点からの微小変位に関して線形化された位相ダイナミクスは以下のようなになる。ただし $\Delta = 0$ とした。

$$\frac{\partial \delta\sigma_z}{\partial t} = -G [\delta\sigma_z + \delta R \cos \psi^* - \delta\psi R^* \sin \psi^*] \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial \delta R}{\partial t} = 2G \left[\delta\sigma_z \sigma_z^* \cos \psi^* + \sigma_z^* \delta R + \delta\psi \sigma_z^* \left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) \sin \psi^* \right] \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial \delta\psi}{\partial t} = -2G \left[\delta\sigma_z \frac{\sigma_z^*}{R^*} \sin \psi^* - \delta\theta \sigma_z^* \right] \quad (\text{A.40})$$

また、 J を使う場合は、まず位相ダイナミクスの運動方程式を以下のように表す。

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = f(\sigma_z, R, \psi) \quad (\text{A.41})$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = g(\sigma_z, R, \psi) \quad (\text{A.42})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = h(\sigma_z, R, \psi) \quad (\text{A.43})$$

これを用いて次式から計算できる。

$$J(\sigma_z^*, R^*, \psi^*) = \left(\begin{array}{ccc} \frac{\partial f(\sigma_z, R, \psi)}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial f(\sigma_z, R, \psi)}{\partial R} & \frac{\partial f(\sigma_z, R, \psi)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial g(\sigma_z, R, \psi)}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial g(\sigma_z, R, \psi)}{\partial R} & \frac{\partial g(\sigma_z, R, \psi)}{\partial \psi} \\ \frac{\partial h(\sigma_z, R, \psi)}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial h(\sigma_z, R, \psi)}{\partial R} & \frac{\partial h(\sigma_z, R, \psi)}{\partial \psi} \end{array} \right) \Bigg|_{(\sigma_z^*, R^*, \psi^*)} \quad (\text{A.44})$$

よって、今の場合の J は次式のようにになる。ただし、時間 t は G で規格化したものとする。

$$J(\sigma_z^*, R^*, \psi^*) = \left(\begin{array}{ccc} -1 & -\cos \psi^* & R^* \sin \psi^* \\ 2\sigma_z^* \cos \psi^* & 2\sigma_z^* & 2\sigma_z^* \left(\sigma_z^* + \frac{1}{2} \right) \sin \psi^* \\ -\frac{2\sigma_z^*}{R^*} \sin \psi^* & 0 & 2\sigma_z^* \end{array} \right) \quad (\text{A.45})$$

超放射を発生した場合

この時の固定点は、 $(\sigma^*, R^*, \psi^*) = (-\frac{1}{2}, 0, 0)$ であるので、これに対応する J は以下のようになる。

$$J_{\text{sr}} = \left(\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \quad (\text{A.46})$$

この行列の固有値、固有ベクトル及び対角化行列は以下のようになった。

$$u_1 = -1; \mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$$u_2 = -1 + i; \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$$u_3 = -1 - i; \mathbf{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.50})$$

そうすると $\mathbf{v} = (\delta\sigma, \delta R, \delta\psi)^T$ として、 $\mathbf{u} = P^{-1}\mathbf{v}$ を用いると

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{v} &= J_{\text{sr}}\mathbf{v} = J_{\text{sr}}(PP^{-1})\mathbf{v} \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v} = (P^{-1}J_{\text{sr}}P)(P^{-1}\mathbf{v}) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbf{u} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 0 \\ 0 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \mathbf{u} = \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \right] \mathbf{u} \quad (\text{A.51})
\end{aligned}$$

である。ここで以下の性質を思い出しておく。

$$A, B \in M(n), [A, B] = 0 \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned}
e \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix} \quad (\text{A.53})
\end{aligned}$$

以上を踏まえると、式 (A.51) の解は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(t) &= e \left[\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \right]_t \mathbf{u}(0) \\
&= e \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t e \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix}^t \mathbf{u}(0) \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \mathbf{u}(0) \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t+it} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t-it} \end{pmatrix} \mathbf{u}(0) \quad (\text{A.54})
\end{aligned}$$

よって、 $\mathbf{v} = P\mathbf{u}$ で戻せば以下のような結果が得られる。

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & e^{-t} \sin t & 0 \\ -e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \mathbf{v}(0) \quad (\text{A.55})$$

ここで $\mathbf{v}(0) = (\delta\sigma_z(0), \delta R(0), \delta\psi(0))^T$ は与えた固定点からの変位である。この結果は次のようにも表せる。

$$\delta\sigma_z^2(t) + \delta R^2(t) = e^{-2t}(\delta\sigma_z^2(0) + \delta R^2(0)), \delta\psi(t) = e^{-t}\delta\psi(0) \quad (\text{A.56})$$

この場合の固定点近傍の系の振る舞いは、図 A.1 の (a) にその様子を示した。

subradiance を発生した場合

subradiance が発生した場合の固定点は $(\sigma^*, R^*, \psi^*) = (s_0, -s_0 - 1, \pi)$ である。ただし、 $s_0 = (1 - \sqrt{4\sigma_z^2(0) + 3})/2$ であり、常に負の値である ($s_0 < 0$)。計算は同じなので結果のみ示す。この時の固定点近傍の系の振る舞いを、図 A.1 の (b) にその要素を示した。

$$J_{\text{sub}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2s_0 & 2s_0 & 0 \\ 0 & 0 & 2s_0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.57})$$

(固有値と固有ベクトル)

$$u_1 = 0, \mathbf{p}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.58})$$

$$u_2 = 2s_0 - 1, \mathbf{p}_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 4s_0^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2s_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.59})$$

$$u_3 = 2s_0, \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.60})$$

(対角化行列とその逆行列)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{1+4s_0^2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2s_0}{\sqrt{1+4s_0^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}s_0}{2s_0-1} & \frac{-\sqrt{2}}{2s_0-1} & 0 \\ -\frac{\sqrt{1+4s_0^2}}{2s_0-1} & \frac{\sqrt{1+4s_0^2}}{2s_0-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.61})$$

(固定点からの変位の時間変化)

$$\delta\sigma_z(t) = \frac{-e^{(2s_0-1)t}}{2s_0-1} \{\delta\sigma_z(0) - \delta R(0)\} \quad (\text{A.62})$$

$$\delta R(t) = \frac{-2s_0 e^{(2s_0-1)t}}{2s_0-1} \{\delta\sigma_z(0) - \delta R(0)\} \quad (\text{A.63})$$

$$\delta\psi(t) = e^{2s_0 t} \delta\psi(0) \quad (\text{A.64})$$

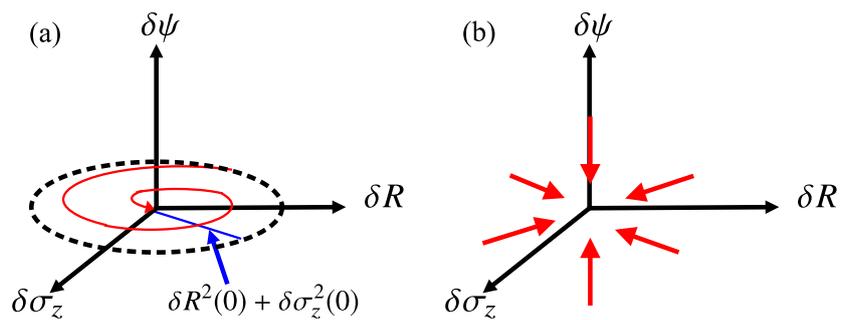


図 A.1 (a)superradiance と (b)subradiance に対応する定常状態近傍における、光を介して結合した分極集団の振る舞い。

Appendix. B Superradiance に対するマスター方程式の導出

B.1 モデル

文献 [26] に基づいて、superradiance を記述する一般的なマスター方程式の導出過程をまとめておく。ここでは、 N 個の 2 準位系と光子系が相互作用している系を考える。

$$\text{全系} \quad H = H_0 + V = H_A + H_R + V \quad (\text{B.1})$$

$$\text{2 準位系} \quad H_A = \sum_{j=1}^N \hbar\omega_0 \sigma_z^j \quad (\text{B.2})$$

$$\text{光子系} \quad H_R = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.3})$$

$$\text{相互作用} \quad V = - \sum_{j=1}^N \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{D}_j \quad (\text{B.4})$$

$$\text{光電場} \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}_j) = i \sum_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \left(b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} - b_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \right) \quad (\text{B.5})$$

$$\text{電場振幅} \quad \boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 V}} \boldsymbol{\epsilon} \quad (\text{B.6})$$

$$\text{双極子演算子} \quad \mathbf{D}_j = \mathbf{p}_j (\sigma_+^j + \sigma_-^j) \quad (\text{B.7})$$

ただし、 $\boldsymbol{\epsilon}$ は電場の偏光方向を表す単位ベクトル、 $\mathbf{p}_j = d\hat{\mathbf{a}}_j$ は双極子モーメント、 $b_{\mathbf{k}}^\dagger, b_{\mathbf{k}}$ は周波数モード \mathbf{k} を持つ光子の生成・消滅演算子、 σ_\pm^j, σ_z^j は j 番目の 2 準位系に関する Pauli 行列。また交換関係は以下のように与える。

$$[b, b^\dagger] = 1 \quad (\text{B.8})$$

$$[\sigma_z^j, \sigma_\pm^k] = \pm \delta_{jk} \sigma_\pm^k, \quad [\sigma_+^j, \sigma_-^k] = 2\delta_{jk} \sigma_z^k \quad (\text{B.9})$$

以上を用いると相互作用は以下のように書き換えられる。ただし回転波近似を用いた。

$$V = - \sum_j \sum_{\mathbf{k}} i(\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}_j) \left(\sigma_+^j b_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} - b_{\mathbf{k}}^\dagger \sigma_-^j e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_j} \right) \quad (\text{B.10})$$

B.2 相互作用描像

系全体の状態を表す密度演算子を $\rho_{A \otimes R}$ をとし、これは次の von Neumann 方程式を満たすとする。

$$i\hbar \frac{d\rho_{A \otimes R}(t)}{dt} = [H, \rho_{A \otimes R}(t)] \quad (\text{B.11})$$

ここで

$$\tilde{\rho}_{A \otimes R}(t) = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} \rho_{A \otimes R}(t) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}, \quad \tilde{V}(t) = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} V e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} \quad (\text{B.12})$$

を導入して相互作用描像に移ると、式 (B.11) は式 (B.12) を用いると

$$i\hbar \frac{d\tilde{\rho}_{A\otimes R}(t)}{dt} = [\tilde{V}(t), \tilde{\rho}_{A\otimes R}(t)] \quad (\text{B.13})$$

以降は原子系の状態に着目したいので、光子系の状態は縮約する。つまり

$$\tilde{\rho}_A = \text{Tr}_R[\tilde{\rho}_{A\otimes R}(t)] \quad (\text{B.14})$$

であり、 Tr_R は

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R[O] &= \prod_{\mathbf{k}} \sum_{n_{\mathbf{k}}} \langle n_{\mathbf{k}} | O | n_{\mathbf{k}} \rangle \\ &= \sum_{n_{\mathbf{k}_1}} \sum_{n_{\mathbf{k}_2}} \cdots \sum_{n_{\mathbf{k}_l}} \cdots \langle n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \cdots, n_{\mathbf{k}_l}, \cdots | O | n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \cdots, n_{\mathbf{k}_l}, \cdots \rangle \\ &\equiv \sum_{(n_{\mathbf{k}})} \langle (n_{\mathbf{k}}) | O | (n_{\mathbf{k}}) \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

とする。まず式 (B.13) を積分して解くと

$$\tilde{\rho}_{A\otimes R}(t) = \tilde{\rho}_{A\otimes R}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau [\tilde{V}(\tau), \tilde{\rho}_{A\otimes R}(\tau)] \quad (\text{B.16})$$

が得られる。式 (B.16) の積分変数を $\tau \rightarrow t - \tau$ としてあげると

$$\tilde{\rho}_{A\otimes R}(t) = \tilde{\rho}_{A\otimes R}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau [\tilde{V}(t - \tau), \tilde{\rho}_{A\otimes R}(t - \tau)] \quad (\text{B.17})$$

となる。全系の初期状態は、原子系は完全反転分布で光子は1つも無いと仮定する。つまり

$$\tilde{\rho}_{A\otimes R}(0) = \prod_j |e_j\rangle \langle e_j| \otimes |0\rangle \langle 0| \quad (\text{B.18})$$

である (※ただし $|0\rangle \langle 0| = \prod_{\mathbf{k}} |0_{\mathbf{k}}\rangle \langle 0_{\mathbf{k}}| = |0, 0, \cdots, 0, \cdots\rangle \langle 0, 0, \cdots, 0, \cdots|$ の意味である)。よって式 (B.17) を式 (B.11) に代入してその両辺の Tr_R をとると、

$$\frac{d\tilde{\rho}_A(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R([\tilde{V}(t), \tilde{\rho}_{A\otimes R}(0)]) - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_R([\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t - \tau), \tilde{\rho}_{A\otimes R}(t - \tau)])] \quad (\text{B.19})$$

ところで式 (B.19) の初項の交換関係の最初の部分を考えてみると

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R(\tilde{V}(t)\tilde{\rho}_{A\otimes R}(0)) &= \text{Tr}_R(\tilde{V}(t) \prod_j |e_j\rangle \langle e_j| \otimes |0\rangle \langle 0|) \\ &= \prod_{\mathbf{k}} \prod_j \sum_{n_{\mathbf{k}}} |e_j\rangle \langle e_j| \langle n_{\mathbf{k}} | \tilde{V}(t) | 0 \rangle \langle 0 | n_{\mathbf{k}} \rangle \\ &= \prod_j \sum_{(n_{\mathbf{k}})} |e_j\rangle \langle e_j| \langle n_{\mathbf{k}_1}, n_{\mathbf{k}_2}, \cdots, n_{\mathbf{k}_l}, \cdots | \tilde{V}(t) | 0 \rangle \delta_{n_{\mathbf{k}_1}, 0} \delta_{n_{\mathbf{k}_2}, 0} \cdots \delta_{n_{\mathbf{k}_l}, 0} \cdots \\ &= \prod_j |e_j\rangle \langle e_j| \langle 0 | \tilde{V}(t) | 0 \rangle \end{aligned}$$

そうすると \tilde{V} は光子の生成消滅演算子が1つ入っていることを思い出せば、この項は消える。よって

$$\frac{d\tilde{\rho}_A(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_R([\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}_{A\otimes R}(t-\tau)])] \quad (\text{B.20})$$

が得られる。この時点で Markov 近似

$$\tilde{\rho}_{A\otimes R}(t-\tau) \rightarrow \tilde{\rho}_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0| \quad (\text{B.21})$$

を施せば最終的に、

$$\frac{d\tilde{\rho}_A(t)}{dt} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau \text{Tr}_R([\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0|]]) \quad (\text{B.22})$$

を得る。

B.3 Superradiance に対するマスター方程式

ところで式 (B.14) より、

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_A(t) &= \text{Tr}_R[\tilde{\rho}_{A\otimes R}(t)] = \sum_{(n_{\mathbf{k}})} \langle (n_{\mathbf{k}}) | e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} \rho_{A\otimes R}(t) e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} | (n_{\mathbf{k}}) \rangle \\ &= \sum_{(n_{\mathbf{k}})} \langle (n_{\mathbf{k}}) | e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} \tilde{\rho}_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0| e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}} | (n_{\mathbf{k}}) \rangle \\ &= e^{\frac{iH_A t}{\hbar}} \tilde{\rho}_A(t) e^{-\frac{iH_A t}{\hbar}} \otimes \sum_{(n_{\mathbf{k}})} \langle (n_{\mathbf{k}}) | e^{\frac{iH_R t}{\hbar}} |0\rangle\langle 0| e^{-\frac{iH_R t}{\hbar}} | (n_{\mathbf{k}}) \rangle \\ &= e^{\frac{iH_A t}{\hbar}} \rho_A(t) e^{-\frac{iH_A t}{\hbar}} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

なので (B.23) を (B.22) に代入する。そうすると次式が得られる。

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_A, \rho_A(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^\infty d\tau e^{-\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \text{Tr}_R([\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0|]]) e^{\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \quad (\text{B.24})$$

式 (B.24) の積分の中身は、煩雑な計算の後に次式のように分解される。

$$e^{-\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \text{Tr}_R([\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0|]]) e^{\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \quad (\text{B.25})$$

$$\begin{aligned} &= \text{Tr}_R(V e^{-\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} V e^{\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} \rho_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0|) - \text{Tr}_R(V \rho_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0| e^{-\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} V e^{\frac{iH_0 \tau}{\hbar}}) \\ &\quad - \text{Tr}_R(e^{-\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} V e^{\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} \rho_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0| V) + \text{Tr}_R(\rho_A(t) \otimes |0\rangle\langle 0| e^{-\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} V e^{\frac{iH_0 \tau}{\hbar}} V) \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

B.1 章で定義した式 (B.1)～式 (B.10) を式 (B.26) の各項を計算すると、式 (B.24) は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_A(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [H_A, \rho_A(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \sum_{j,l} \int_0^\infty d\tau \int d\mathbf{k} \frac{V}{8\pi^3} (\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}_j) (\boldsymbol{\mathcal{E}}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}_l) \\ &\quad [\sigma_+^j e^{-\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \sigma_-^l e^{\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \rho_A(t) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} \tau} - \sigma_-^j \rho_A(t) e^{-\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \sigma_+^l e^{\frac{iH_A \tau}{\hbar}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} e^{i\omega_{\mathbf{k}} \tau} \\ &\quad - e^{-\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \sigma_-^j e^{\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \rho_A(t) \sigma_+^l e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} e^{i\omega_{\mathbf{k}} \tau} + \rho_A(t) e^{-\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \sigma_+^j e^{\frac{iH_A \tau}{\hbar}} \sigma_-^l e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l)} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} \tau}] \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

ただし、 $\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \frac{V}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{k}$ を用いた。ところで、Campbell-Baker-Hausdorff 公式

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A, [A, B]] + \dots \quad (\text{B.28})$$

と Pauli 行列の交換関係を表す式 (B.9) を用いると、

$$\begin{aligned} e^{-\frac{iH_A\tau}{\hbar}} \sigma_{\pm}^k e^{\frac{iH_A\tau}{\hbar}} &\simeq \sigma_{\pm}^k - \frac{i\tau}{\hbar} [H_A, \sigma_{\pm}^k] = \sigma_{\pm}^k - i\tau\omega_0 \sum_m [\sigma_z^m, \sigma_{\pm}^k] \\ &= \sigma_{\pm}^k \mp i\tau\omega_0 \sum_m \sigma_{\pm}^m \delta_{mk} = \sigma_{\pm}^k \mp i\tau\omega_0 \sigma_{\pm}^k \\ &\simeq \sigma_{\pm}^k e^{\pm i\omega_0\tau} \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

が得られる。(B.27) の積分中の第 2, 3 項目の j, l を入れ替えて、式 (B.29) を用いると、式 (B.27) は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_A(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [H_A, \rho_A(t)] - \sum_{j,l} \int_0^\infty d\tau \int d\omega_k \int d\theta \int d\phi \frac{\omega_k^3 d^2 \sin\theta}{16\hbar\epsilon_0 c^3 \pi^3} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_j) (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_l) e^{\frac{i\omega_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l| \cos\theta}{c}} \\ &\quad \times [(\sigma_+^j \sigma_-^l \rho_A(t) - \sigma_-^l \rho_A(t) \sigma_+^j) e^{-i\tau(\omega_0 - \omega_k)} + (\rho_A(t) \sigma_+^j \sigma_-^l - \sigma_-^l \rho_A(t) \sigma_+^j) e^{i\tau(\omega_0 - \omega_k)}] \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

ただし、

$$\int d\mathbf{k} \rightarrow \int_0^\infty dk \int_{-\pi}^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi k^2 \sin\theta \quad (\text{B.31})$$

とした。この式 (B.30) を superradiance に対するマスター方程式と呼ぶ。もう少し処理をすると、

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \int_0^\infty d\tau e^{\pm i(\omega_k - \omega_0)\tau - \eta t} = \frac{\pm i}{\omega_k - \omega_0 \pm i\eta} = \pm i\mathcal{P} \frac{1}{\omega_k - \omega_0} + \pi\delta(\omega_k - \omega_0) \quad (\text{B.32})$$

であるのでこれを用いると、

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_A(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar} [H_A, \rho_A(t)] - \sum_{j,l} \int d\omega_k \int d\theta \int d\phi \frac{\omega_k^3 d^2 \sin\theta}{16\hbar\epsilon_0 c^3 \pi^3} (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_j) (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_l) e^{\frac{i\omega_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l| \cos\theta}{c}} \\ &\quad \times [\pi\delta(\omega_k - \omega_0) \{ \sigma_+^j \sigma_-^l \rho_A(t) + \rho_A(t) \sigma_+^j \sigma_-^l - 2\sigma_-^l \rho_A(t) \sigma_+^j \} + i\mathcal{P} \frac{1}{\omega_k - \omega_0} [\sigma_+^j \sigma_-^l, \rho_A(t)]] \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

が得られる。ここで光の波長に対して 2 準位系は十分狭い領域に存在すると仮定する (長波長近似: $c^{-1}\omega_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l| \ll 1$)。また、双極子モーメント $\mathbf{p}_{j,l}$ は光の偏光方向と平行であるとする ($\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{j,l} = 1$)。そうすると

$$\int_{-\pi}^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sin\theta (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_j) (\hat{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_l) e^{\frac{i\omega_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l| \cos\theta}{c}} = 4\pi \frac{\sin(\omega_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|/c)}{\omega_k |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|/c} \simeq 4\pi \quad (\text{B.34})$$

である。よって ω_k 積分を実行すれば、

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_A(t)}{dt} &= -\frac{i}{\hbar}[H_A, \rho_A(t)] \\
&\quad - \sum_{j,l} \frac{\omega_0^3 d^2}{4\hbar\epsilon_0 c^3 \pi} [\sigma_+^j \sigma_-^l \rho_A(t) + \rho_A(t) \sigma_+^j \sigma_-^l - 2\sigma_-^l \rho_A(t) \sigma_+^j] \\
&\quad - i \sum_{j,l} \frac{d^2}{4\hbar\epsilon_0 c^3 \pi^2} \mathcal{P} \int d\omega_k \frac{\omega_k^3}{\omega_k - \omega_0} [\sigma_+^j \sigma_-^l, \rho_A(t)]
\end{aligned} \tag{B.35}$$

が最終的に得られる。式 (B.35) の第 2 項で $j = l$ の部分が自然放出、 $j \neq l$ が協力的な光放出の効果を表し、第 3 項は Lamb シフトである。

Appendix.C 振動子が2個、および不均一幅が存在する場合の蔵本モデルの解析

3.2章において述べた、振動子が2個の場合の蔵本モデルは式(3.21)及び(3.22)で与えられている。その章においては、不均一幅 Δ が存在しない場合について議論した($\Delta = 0$)。この章では、不均一幅が無視できない場合における、式(3.23)の解析結果について述べる。この時、不均一幅 Δ と、振動子間に作用する相互作用 K の大小関係によって場合分けを行う必要があるので注意が必要である。

C.1 同期する場合 ($\Delta/K < 0$)

式(3.23)はまず次のように、変数分離型の微分方程式として解くことができる。

$$\frac{1}{\Delta - K \sin \psi} d\psi = dt \quad (\text{C.1})$$

この式(C.1)の両辺を積分することで、次式が得られる。

$$\int_{\psi(0)}^{\psi(t)} d\psi \frac{1}{\Delta - K \sin \psi} = \int_0^t dt = t \quad (\text{C.2})$$

式(C.2)の左辺の積分は、三角関数を含む有理型関数の積分であるので、次の有名な処方箋を施す(Weierstrass置換)。

$$x = \tan \frac{\psi}{2}, \quad \sin \psi = \frac{2x}{1+x^2}, \quad \cos \psi = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad d\psi = \frac{2}{1+x^2} dx \quad (\text{C.3})$$

この変化により、式(C.2)左辺の積分は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} \int_{\psi(0)}^{\psi(t)} d\psi \frac{1}{\Delta - K \sin \psi} &= \int_{x(0)}^{x(t)} dx \frac{2}{rx^2 - 2x + r} \\ &= \frac{2}{r} \int_{x(0)}^{x(t)} dx \frac{1}{\left(x - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

ただし、 $r = \Delta/K$ 、 $x = \tan(\psi/2)$ である。さらに、 $y = x - \frac{1}{r}$ という変数変換を行うと、

$$\frac{2}{r} \int_{x(0)}^{x(t)} dx \frac{1}{\left(x - \frac{1}{r}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)} = \frac{2}{r} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{y^2 + 1 - \frac{1}{r^2}} \quad (\text{C.5})$$

となる。この計算を進めると、

$$\begin{aligned}
\frac{2}{r} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{y^2 + 1 - \frac{1}{r^2}} &= \frac{2}{r} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{y^2 - |1 - \frac{1}{r^2}|} \\
&= \frac{2}{r} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{\left(y + \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}\right) \left(y - \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}\right)} \\
&= \frac{-1}{r\sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \left(\frac{1}{y + \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} - \frac{1}{y - \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} \right) \\
&= \frac{-1}{r\sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} \left[\ln \frac{y(t) + \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}}{y(t) - \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} - \ln \frac{y(0) + \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}}{y(0) - \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} \right] \quad (C.6)
\end{aligned}$$

であるので、式 (C.2) は次式のようになる。

$$\frac{-1}{r\sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} \left[\ln \frac{y(t) + \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}}{y(t) - \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} - \ln \frac{y(0) + \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}}{y(0) - \sqrt{|1 - \frac{1}{r^2}|}} \right] = t \quad (C.7)$$

この式 (C.6) の両辺の対数をとって、 $y(t)$ について解き、変数を $\psi(t)$ に戻せば、次式が得られる。

$$\psi(t) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{K}{\Delta} - \sqrt{\left|1 - \left(\frac{K}{\Delta}\right)^2\right|} \cdot \frac{S^-(K, \Delta) + S^+(K, \Delta) e^{-\frac{\Delta}{K} \sqrt{|1 - (\frac{K}{\Delta})^2|} t}}{S^-(K, \Delta) - S^+(K, \Delta) e^{-\frac{\Delta}{K} \sqrt{|1 - (\frac{K}{\Delta})^2|} t}} \right] \quad (C.8)$$

$$S^\pm(K, \Delta) = \tan \frac{\psi(0)}{2} - \frac{K}{\Delta} \pm \sqrt{\left|1 - \left(\frac{K}{\Delta}\right)^2\right|} \quad (C.9)$$

定常状態における位相差はこの式 (C.9) より、次式のように得られる。

$$\psi_{t \rightarrow \infty} = 2 \tan^{-1} \left[\frac{K}{\Delta} - \sqrt{\left|1 - \left(\frac{K}{\Delta}\right)^2\right|} \right] \quad (C.10)$$

つまり、時間に依らずこの式 (C.10) で表されるような位相差を保持しながら同期することがわかった。

C.2 同期しない場合 ($\Delta/K > 0$)

式 (C.5) までは計算過程は不変であるが、 $\Delta/K > 0$ の場合はその次からの計算は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{2}{r} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{y^2 + 1 - \frac{1}{r^2}} &= \frac{2}{r} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{1 - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{1}{r^2}\right)^{-1} y^2 + 1} \\
&= \frac{2}{r - \frac{1}{r}} \int_{y(0)}^{y(t)} dy \frac{1}{\frac{r^2}{r^2-1} y^2 + 1} \\
&= \frac{2}{r - \frac{1}{r}} \int_{z(0)}^{z(t)} dz \sqrt{\frac{r^2}{r^2-1}} \frac{1}{z^2 + 1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{r^2-1}} [\tan^{-1} z(t) - \tan^{-1} z(0)] \tag{C.11}
\end{aligned}$$

ただし、計算過程で $z = \sqrt{\frac{r^2}{r^2-1}} y$ という変数変換を行なった。よって、変数を ψ に戻したのち、 $\Delta/G > 0$ の場合における式 (C.2) は次式のようにになる。

$$\tan^{-1} \left[\frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \left(\tan \frac{\psi(t)}{2} - \frac{1}{r} \right) \right] - \tan^{-1} \left[\frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \left(\tan \frac{\psi(0)}{2} - \frac{1}{r} \right) \right] = \frac{\sqrt{r^2-1}}{2} t \tag{C.12}$$

ここで、 \tan の加法定理 $\tan(\alpha - \beta) = (\tan \alpha - \tan \beta)/(1 + \tan \alpha \tan \beta)$ を用いると、式 (C.12) は次式のようにになる。

$$\frac{\frac{r}{\sqrt{r^2-1}} \left[\tan \frac{\psi(t)}{2} - \tan \frac{\psi(0)}{2} \right]}{1 + \frac{r^2}{r^2-1} \left(\tan \frac{\psi(t)}{2} - \frac{1}{r} \right) \left(\tan \frac{\psi(0)}{2} - \frac{1}{r} \right)} = \tan \frac{\sqrt{r^2-1}}{2} t \tag{C.13}$$

この式 (C.13) を $\tan \psi(t)/2$ について解き、両辺の \tan^{-1} をとることで、位相差は次式のように与えられる。

$$\psi(t) = 2 \tan^{-1} \left[\frac{\tan \frac{\psi(0)}{2} + \left\{ \frac{\sqrt{\Delta^2 - K^2}}{\Delta} - \frac{K}{\sqrt{\Delta^2 - K^2}} \left(\tan \frac{\psi(0)}{2} - \frac{K}{\Delta} \right) \right\} \tan \frac{\sqrt{\Delta^2 - K^2}}{2K} t}{1 - \frac{\Delta}{\sqrt{\Delta^2 - K^2}} \left(\tan \frac{\psi(0)}{2} - \frac{K}{\Delta} \right) \tan \frac{\sqrt{\Delta^2 - K^2}}{2K} t} \right] \tag{C.14}$$

この式 (C.14) より、 \tan が単調増加関数であることを踏まえると、時間がいくら経過しても位相差は定まらないことがわかる。つまり、2つの振動子は同期することができないことを表す。

謝辞

博士論文を執筆するにあたり、指導教員、研究室の先輩方など多くの方からの助けを頂いた。指導教員の石川陽准教授からは、学会のための発表の準備や研究に必要な知識の修得、研究関係の論文の提供などのあらゆる面で多大なる支援をいただきました。退官された小林潔教授からも、理論ゼミにおいて様々な意見やアドバイスを頂きました。全体の研究室ゼミにおいて内山和治准教授、居島薫准教授、酒井優准教授からも様々な意見を頂きました。博士論文の審査員である浮田芳昭准教授、東海林篤准教授にもお世話になりました。共同研究者である東京理科大学の宮島顕祐准教授には、学会や研究室ゼミなどで本論文の著者の研究を聞いてくださり、また意見やアドバイスをして頂きました。工学部学生専用の自習室であるフィロスの坂野斎助教には、学部生から現在に至るまで大変お世話になりました。さらにいつも弱音を吐く本論文の著者を激励して頂いた研究室の先輩方からも色々なサポートを受けました。以上の方々からのサポートがなければ本論文の完成には至らなかったと存じます。時間の都合により、ここでは多くを語る事ができないことに関しては恐縮ではありますが、この場をお借りして、深く感謝いたします。今まで、誠にありがとうございました。

参考文献

- [1] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Science*, ed. B. Chirikov, P. Cvitanović, F. Moss, and H. Swinney (Cambridge University Press, New York, 2013), Cambridge Nonlinear Science Series Vol. 12, p. 357.
- [2] M. Bennett, M. F. Schatz, H. Rockwood, and K. Wiesenfeld, Proc. R. Soc. London, Ser. A, **458**, 563 (2002).
- [3] C. A. Czeisler, J. S. Allan, S. H. Strogatz, J. M. Ronda, R. Sánchez, C. D. Ríos, W. O. Freitag, G. S. Richardson, and R. E. Kronauer, Science **233**, 667 (1986).
- [4] C. A. Czeisler, J. F. Duffy, T. L. Shanahan, E. N. Brown, J. F. Mitchell, D. W. Rimmer, J. M. Ronda, E. J. Silva, J. S. Allan, J. S. Emens, D. J. Dijk, and R. E. Kronauer, Science **284**, 2177 (1999).
- [5] Z. Néda, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A. -L. Barabási, Nature **403**, 849 (2000).
- [6] I. K. Kiss, Y. Zhai, and J. L. Hudson, Science **296**, 1676 (2002).
- [7] H. Ulrichs, A. Mann, and U. Parlitz, Chaos **19**, 043120 (2009).
- [8] H. Kitahata, J. Taguchi, M. Nagayama, T. Sakurai, Y. Ikura, A. Osa, Y. Sumino, M. Tanaka, E. Yokoyama, and H. Miike, J. Phys. Chem. A **113**, 8164 (2009).
- [9] L. Goldberg, H. F. Taylor, J. F. Weller, and D. R. Scifres, Appl. Phys. Lett. **46**, 236 (1985).
- [10] A. F. Glova, S. Y. Kurchatov, V. V. Likhanskii, A. Y. Lysikov, and A. P. Napartovich, Quantum Electron. **26**, 500 (1996).
- [11] A. K. Jain, K. K. Likharev, J. E. Lukens, and J. E. Sauvageau, Phys. Rep. **109**, 309 (1984).
- [12] A. T. Winfree, J. Theoret. Biol. **16**, 15 (1967).
- [13] J. Guckenheimer and S. Cruz, J. Math. Biol. **1**, 259 (1975).
- [14] Y. Kuramoto, Physica D **50**, 15 (1991).
- [15] Y. Kuramoto and I. Nishikawa, J. Stat. Phys. **49**, 569 (1987).
- [16] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. P. Vicente, F. Ritort, and R. Spigler, Rev. Mod. Phys. **77**, 137 (2005).
- [17] J. A. Acebrón and L. L. Bonilla, Physica D **114**, 296 (1998).

- [18] H. Chiba and D. Pazó, *Physica D* **238**, 1068 (2009).
- [19] L. DeVille, *J. Stat. Phys.* **174**, 160 (2019).
- [20] N. Jaseem, M. Hajdušek, V. Vedral, R. Fazio, L. C. Kwek, and S. Vinjanampathy, *Phys. Rev. E* **101**, 020201 (2020).
- [21] G. Zhu, J. Li, N. Zhang, X. Li, J. Dai, Q. Cui, Q. Song, C. Xu, and Y. Wang, *Sci. Rep.* **10**, 253 (2020).
- [22] C. Xu, F. Qin, Q. Zhu, J. Lu, Y. Wang, J. Li, Y. Lin, Q. Cui, Z. Shi, and A. G. Manohari, *Nano Res.* **11**, 3050 (2018).
- [23] J. M. Ward and S. N. Chormaic, *Appl. Phys. B* **100**, 847 (2010).
- [24] R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **93**, 99 (1954).
- [25] N. E. Rehler and J. H. Eberly, *Phys. Rev. A* **3**, 1735 (1971).
- [26] M. Gross and S. Haroche, *Phys. Rep.* **93**, 301 (1982).
- [27] A. V. Andreev, V. I. Emel'yanov, and Y. A. Il'inskiĭ, *Sov. Phys. Usp.* **23**, 493 (1980).
- [28] H. M. Gibbs, Q. H. F. Vreken, and H. M. J. Hikspoors, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 547 (1977).
- [29] N. Skribanowitz, I. P. Herman, J. C. MacGillivray, and M. S. Feld, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 309 (1973).
- [30] M. S. Malcuit, J. J. Maki, D. J. Simkin, and R. W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1189 (1987).
- [31] M. Xia, R. V. Penty, I. H. White, and P. P. Vasil'ev, *Opt. Express* **20**, 8755 (2012).
- [32] T. Yatsui, A. Ishikawa, K. Kobayashi, A. Shojiguchi, S. Sangu, T. Kawazoe, M. Ohtsu, J. Yoo, and G. -C. Yi, *Appl. Phys. Lett.* **100**, 233118 (2012).
- [33] K. Miyajima, Y. Kagotani, S. Saito, M. Ashida, and T. Itoh, *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, 195802 (2009).
- [34] K. Miyajima, Y. Kumagai, and A. Ishikawa, *J. Phys. Chem. C* **121**, 27751 (2017).
- [35] K. Miyajima, K. Maeno, S. Saito, M. Ashida, and T. Itoh, *Phys. Status Solidi C* **8**, 209 (2011).
- [36] M. Nasu, K. Kawamura, T. Yoshida, J. Ishihara, and K. Miyajima, *Appl. Phys. Express* **13**, 062005 (2020).
- [37] S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Science* **285**, 571 (1999).

- [38] Ö. E. Müstecaplıoğlu and L. You, Phys. Rev. A **62**, 063615 (2000).
- [39] P. P. Vasil'ev, Rep. Prog. Phys. **72**, 076501 (2009).
- [40] D. C. Dai and A. P. Monkman, Phys. Rev. B **84**, 115206 (2011).
- [41] N. Yokoshi, K. Odagiri, A. Ishikawa, and H. Ishihara, Phys. Rev. Lett. **118**, 203601 (2017).
- [42] R. G. DeVoe and R. G. Brewer, Phys. Rev. Lett. **76**, 2049 (1996).
- [43] W. Guerin, M. O. Araújo, and R. Kaiser, Phys. Rev. Lett. **116**, 083601 (2016).
- [44] M. O. Scully, Phys. Rev. Lett. **115**, 243602 (2015).
- [45] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-level Atoms* (Dover, New York, 1987), p. 78.
- [46] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge University Press, New York, 1995), p. 903.
- [47] D. Polder, M. F. H. Schuurmans, and Q. H. F. Vreken, Phys. Rev. A **19**, 1192 (1979).
- [48] C. M. Bowden and C. C. Sung, Phys. Rev. Lett. **50**, 156 (1983).
- [49] F. Haake and R. Reibold, Phys. Rev. A **29**, 3208 (1984).
- [50] R. Sezaki, A. Ishikawa, K. Miyajima, and K. Kobayashi, Appl. Phys. A **123**, 690 (2017).
- [51] M. Kira, F. Jahnke, and S. W. Koch, Phys. Rev. Lett. **81**, 3263 (1998).
- [52] M. Kira and S. W. Koch, Phys. Rev. A **78**, 022102 (2008).
- [53] D. C. Burnham and R. Y. Chiao, Phys. Rev. **188**, 667 (1969).
- [54] 高辻 正基, "超輻射", 応用物理 **44**,1091 (1975).
- [55] H. Jeffreys and B. S. Jeffreys, *Mathematical Physics 3rd. Edition*, (Cambridge University Press, London, 1966), p. 574.
- [56] F. T. Arecchi and E. Courtens, Phys. Rev. A **2**, 1730 (1970).
- [57] 郡 宏, 森田 善久 著, "生物リズムと力学系", (共立出版, 2011), p. 78.
- [58] 蔵本 由紀, 河村 洋史 著, "同期現象の科学—位相記述によるアプローチ", (京都大学学術出版会, 2017), p. 127.
- [59] 蔵本 由紀 著, "リズム現象の世界", (東京大学出版会, 2005), p. 137.
- [60] H. A. M. Leymann, A. Foerster and J. Wiersig, Phys. Rev. B **89**, 085308 (2014).

- [61] C. S. Chang and P. Stehle, Phys. Rev. A **4**, 630 (1971).
- [62] A. Ishikawa, K. Miyajima, M. Ashida, T. Itoh, and H. Ishihara, J. Phys. Soc. Jpn. **85**, 034703 (2016).

学会発表および投稿論文

投稿論文

- (1) Riku Sezaki, Akira Ishikawa, Kensuke Miyajima and Kiyoshi Kobayashi, “Theory of Superfluorescence-Laser Crossover in a Cavity QED System”, Applied Physics A **123**, 690 (2017).
- (2) Riku Sezaki, Kiyoshi Kobayashi, Kensuke Miyajima and Akira Ishikawa, “Synchronization Phenomena Originating from Quantum Effects of Photon Fields”, Journal of the Physical Society of Japan **91**, 034401 (2022).

学会発表

口頭発表

- (O.1) 瀬崎 陸、小林 潔、宮島 顕祐、石川 陽、“光子場を介した複数分極系における同期現象の全量子論”、Optics & Photonics Japan 2021、27pD9、オンライン、10/2021.
- (O.2) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における超蛍光-レーザークロスオーバーを用いた新奇発光特性の理論的解明”、第 68 回応用物理学会春季学術講会、16p-Z09-14、オンライン、3/2021.
- (O.3) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における光を介した複数分極間の同期現象”、ナノオプティクス研究グループ第 27 回研究討論会、オンライン、1/2021.
- (O.4) 瀬崎 陸、小林 潔、宮島 顕祐、石川 陽、“光子-電子結合系における複数分極集団の同期現象に対する全量子論”、第 81 回応用物理学会秋季学術講会、9p-Z17-11、オンライン、9/2020.
- (O.5) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における超蛍光-レーザークロスオーバーの理論 V”、第 80 回応用物理学会秋季学術講会、20a-E208-11、北海道、9/2019.
- (O.6) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における超蛍光-レーザークロスオーバーの理論”、第 78 回応用物理学会秋季学術講会、7a-A405-8、福岡、9/2017.

ポスター発表

- (P.1) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における光子場を介した複数分極の同期現象の理論”、第 67 回応用物理学会春季学術講会、15a-PA4-5、東京、3/2020.

- (P.2) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“輻射場の量子揺らぎによる超蛍光の同期現象の理論”、第30回光物性研究会、II-61、京都、12/2019.
- (P.3) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における超蛍光-レーザークロスオーバーの理論 IV-同期現象としての超蛍光-”、第66回応用物理学会春季学術講会、11p-PB1-12、東京、3/2019.
- (P.4) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における超蛍光-レーザークロスオーバーの理論 III”、第79回応用物理学会秋季学術講会、19p-PA7-3、名古屋、9/2018.
- (P.5) Riku Sezaki, Akira Ishikawa, Kensuke Miyajima, Kiyoshi Kobayashi, “Full-quantum-theory of superfluorescence and laser”, The 12th International Conference on Excitonic and Photonic Processes in Condensed Matter and Nano Materials, P114, Nara(Japan), 7/2018.
- (P.6) 瀬崎 陸、石川 陽、宮島 顕祐、小林 潔、“共振器 QED 系における超蛍光-レーザークロスオーバーの理論 II”、第65回応用物理学会春季学術講会、18p-P9-31、東京、3/2018.
- (P.7) Riku Sezaki, Akira Ishikawa, Kensuke Miyajima, Kiyoshi Kobayashi, “Theory of superfluorescence-laser crossover in a cavity QED system”, The 11th Asia-Pacific Conference on Near-field Optics, Poster No.26, Tainan(Taiwan), 7/2017.